数理解析研究所講究録
第179巻 1973年 127-140

不確定セルオートマタに対する並列写像の全射性について

早大 理工 夜久竹夫

§1. 序

セルオートマタの並列写像に関する研究は比較的古くから行なわれてきた[1]. 当初は写像の全射性と単射性との関係が主なテーマであったが[1, 2, 3, 4]、後にいくつかのモデルにおける写像の値域の性質に関する研究[5, 11]、あるいは写像の全射性および単射性に対する決定問題についての研究も加わった[5, 6]. そのうちで全射性に対する決定問題はエデンの園問題とよばれている。又、少し異なったモデルであるテサレーションオートマタの global maps に対しても同様に全射性を決定する問題が考えられ、これは completeness problem といわれている[7, 8]. 我々がここで問題とするのは、[5]で最初に解かれた1次元セルオートマタのエデンの園問題を任意次元の不確定セルオートマタに対して考えることである. [11]では比較的短かい構成法を伴なう手法に

よって2次元の場合の写像の値域に対する *membership problem* を否定的に解くことができた。我々はこの手法をさらに発展させ、より複雑な構成法を伴なう手法を導入する。詳細な証明は[12]を参照されたい。

この論文は次の様な構成をしている。§2で記法と得られている結果をまとめ、§3で *Turing machine* を *simulate* する1次元セルオートマタを二つと、それらから構成される2次元セルオートマトンの定義式を与える。§4, 5, 6で上の2次元セルオートマトンを用いて結果を得る。

§2.

<u>セルオートマトン</u>(ca)を $A=(V, Z^d, \lambda, f, v_q)$ であらわす。ここで V は <u>*state alphabet*</u>，Z は整数の集合、d は<u>次元</u>、λ は <u>*neighbourhood index*</u>，f は <u>*local map*</u> で A を構成する有限オートマトンの *state function*、v_q は <u>*quiescent symbol*</u> とする。帰納的に定義される写像 $c: Z^d \to V$ を<u>様相</u>といい、集合 $\{i \in Z^d \mid c(i) \neq v_q\}$ が有限のとき c は <u>*finite support*</u> という。様相の集合を C であらわし<u>並列写像</u>を $F: C \to 2^C$（又は $F: D \to 2^C$, $D \subset C$）であらわす。様相 $c: Z^d \to V$ の Z^d の有限部分集合 J への制限 $c|J: J \to V$ を<u>パターン</u>といい、パターンの集合 P に対しても F と同様に

制限された並列写像 $G: P \longrightarrow 2^P$ が定義できる [5]。以下で finite support な様相の集合を C_F，制限された並列写像を G，パターンの集合を P であらわす．又 n 次元 ca を n-ca とかく．f が確定的なとき ca を確定 ca、不確的なとき不確定ca という．明らかに次が成り立つ．

補題 1 [4]．ca A に対し　$F(C)=C \Leftrightarrow G(P)=P$. ⊠

Turing machine (TM) を $T=(S, B, M, m_0, M_T, \alpha, \beta, \gamma)$ であらわす [10]．ここで S は alphabet, B は blank symbol, M は state alphabet, m_0 は initial state, M_T は terminal state, そして α, β, γ はそれぞれ new symbol function, move function, next state function である．本稿では次の仮定をおく．

$$\gamma : (M-M_T) \times S \longrightarrow M-\{m_0\}. \qquad ⊠$$

定理 [1, 2, 3, 4]．A を確定 1-ca 又は確定 2-ca とする．このとき F の全射性と単射性に関して次の関係が成立する．ただし $F|_{C_F}$ は F の C_F への制限である．

$$
\begin{array}{ccc}
F|_{C_F}\text{が全射} & \overset{[4]}{\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}} & F\text{が全射} \\
\Downarrow \;\not\Uparrow\;[3] & \overset{[2]}{\nearrow}\;\;\underset{[1]}{\not\swarrow} & \Uparrow\;\not\Downarrow\;[4] \\
F|_{C_F}\text{が単射} & \overset{\not\Longrightarrow}{\underset{[4]}{\Longleftarrow}} & F\text{が単射}
\end{array}
\qquad \boxtimes
$$

<u>定理</u>[5, 6, 11]．(i) 確定 1-ca A に対して次の決定問題は可解である[5, 6]．

$$F(C) = C\ ?$$

$$F(C_F) = C\ ?.$$

又，(ii) 次の決定問題は確定1-ca A に対して可解であるが[5, 6] 確定 2-ca A に対して可解でない[11]．ただし $c \in C_F$．

$$c \in F(C_F)\ ?$$

$$c \in F(C_F)\ ?\ . \qquad \boxtimes$$

§3. TM の *third simulator*

はじめに与えられたTM に対して，Herman [9]，Smith [10] らが用いた 1-ca を定義する．この 1-ca を基礎に別の 1-ca を構成する．

TM $T = (S, B, M, m_0, M_T, \alpha, \beta, \gamma)$ の <u>*first simulator*</u> とは次のような 1-ca $A_1 = \{V_1, Z, X_1, f_1, (B, *)\}$ である．ここで $V_1 = S \times (M \cup \{*\})$，$X_1 = (-1, 0, 1)$ そして f_1 は次のように定義される．$s_0, s_1, s_2 \in S$ と $m \in M$ に対して，

V_0	V_1	V_2	$f_1(V_0,V_1,V_2)$	条件
$(S_0,*)$	$(S_1,*)$	$(S_2,*)$	$(S_1,*)$	
$(S_0,*)$	$(S_1,*)$	(S_2,m)	$(S_1,\gamma(m,S_2))$	$\beta(m,S_2)=-1$
			$(S_1,*)$	$\beta(m,S_2)=1$
$(S_0,*)$	(S_1,m)	$(S_2,*)$	$(\alpha(m,S_1),*)$	
(S_0,m)	$(S_1,*)$	$(S_2,*)$	$(S_1,*)$	$\beta(m,S_0)=-1$
			$(S_1,\gamma(m,S_0))$	$\beta(m,S_0)=1$
その他の値に対して f_1 は定義されない.				

A_1 の様相の集合, *local map*, 並列写像をそれぞれ C_1, f_1, F_1 であらわす.

<u>補題 2</u> [9, 10]. TMが *blank tape* で停止するならば, そのときにのみ $n>0$ と $i\in Z$ が存在して

$$(F_1)^n(C_{initial})(i)\in S\times M_T$$

ただし $C_{initial}$ は次のような様相. $C_{initial}(j)=\begin{cases}\# & (j=0)\\(B,*) & (j\neq 0).\end{cases}$

T の <u>*second simulator*</u> は次のような 1-ca $A_2=(V_2, Z, X_2, f_2, (B,*))$ である. ただし $V_2=(S\times(M\cup\{*\}))\cup\{\#, \sigma, \tau, \xi\}$, $X_2=(-2,-1,0,1,2)$, f_2 は $(V_2)^5$ の部分集合から V_2

への写像で次のように定める。$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, u_0, u_1, u_2, u_3, v, v' \in V_2$; $u \in V_2 - \{\#\}$; $w, w', w'' \in S \times (M \cup \{*\})$; $s_{\#,\tau,\xi} \in \{\#,\tau,\xi\}$; $s_{\#,\sigma,\xi} \in \{\#,\sigma,\xi\}$; $W = S \times (M \cup \{*\})$ として、$s_{\tau,w} \in \{\tau\} \cup W$; $s_{\sigma,w} \in \{\sigma\} \cup W$ に対して。

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	$f_2(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4)$	条件
u_0	u_1	$\#$	u_2	u_3	(B, m_0)	
v	$s_{\#,\tau,\xi}$	u	$s_{\#,\sigma,\xi}$	v'	ξ	
v	$s_{\#,\tau,\xi}$	u	$s_{\tau,w}$	v'	τ	
v	$s_{\sigma,w}$	u	$s_{\#,\sigma,\xi}$	v'	σ	
v	$s_{\sigma,w}$	ξ	$s_{\tau,w}$	v'	$(B,*)$	
v	σ	σ	τ	v'	$(B,*)$	
v	σ	τ	τ	v'	$(B,*)$	
v	w	σ	τ	v'	$(B,*)$	
v	σ	τ	w	v'	$(B,*)$	
v	$s_{\sigma,w}$	σ	w'	v'	$(B,*)$	$w'=v'=(B,m_0)$
					$f_1((B,*),(B,*),w')^*$	その他
v	σ	w	τ	v'	$f_1((B,*),w,(B,*))^*$	
v	σ	w	w'	v'	$(B,*)$	$w=w'=(B,m_0)$
					$f_1((B,*),w,w')^*$	その他

（前ページより続く）

$$v \quad w \quad \tau \quad S_{\tau,w} \quad v' \quad \begin{cases} (B,*) & v=w=(B,m_0) \\ f_1(w,(B,*),(B,*))\ ^{*} & \text{その他} \end{cases}$$

$$v \quad w \quad w' \quad \tau \quad v' \quad \begin{cases} (B,*) & w=w'=(B,m_0) \\ f_1(w,w',(B,*))\ ^{*} & \text{その他} \end{cases}$$

$$v \quad w \quad w' \quad w'' \quad v' \quad \begin{cases} (B,*) & w=w'=w''=(B,m_0) \\ f_1(w,w',w'')\ ^{*} & \text{その他} \end{cases}$$

注(*)　f_1が定義されているときにのみ$f_2(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4)$は定義される．その他の値に対してf_2は定義されない．

<u>補題3</u>．A_2に対しても補題1と同様の命題が成り立つ．⊠

A_2からさらに不確定 2-ca A_3を構成する．TMの<u>*third simulator*</u>は$A_3=(V_2,Z^2,L,f_3,\#)$である．ただし，$L=((0,0),(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1))$で*local map* $f_3:(V_2)^6 \longrightarrow 2^{(V_2)}$は次のように定める（$f_3$の定義域が$(V_2)^6$の部分集合でないことに注意）．$v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 \in V_2$に対して

$$f_3(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=\begin{cases} \# & (v_0=\#) \\ V_2-\{\#\} & (v_0\neq\#\ \text{かつ}\ f_2(v_1,\cdots,v_5)\ \text{が定義されていて}\ f_2(v_1,\cdots,v_5)=v_0) \\ V_2-\{\#,(B,*)\} & (\text{その他}) \end{cases}$$

A_3の様相の集合、パターンの集合、並列写像、制限された並列写像をそれぞれC_3, P_3, F_3, G_3で示す.

§4.

この節ではTMが*blank tape*に対して停止すれば$F_3(C_3)\subsetneqq C_3$であることを示す. はじめにいくつか記号を定める.

<u>記号.</u>

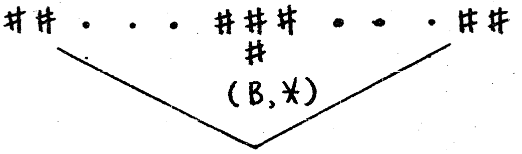
$$P_{\{(B,*),\#\}}=\{p\in P_3 \mid p: J\longrightarrow\{(B,*),\#\},\ J\subsetneqq Z^d\}$$

$$P_3^{n,n'}=\{p: J\to V_2 \mid J=\{(i,j)\in Z^2 \mid 0\geqq j\geqq -n,\ -2(n'+j)\leqq i\leqq 2(n'+j)\}\}$$

$$P_{\{(B,*),\#\}}^{n,n'}=P_{\{(B,*),\#\}}\cap P_3^{n,n'}$$

$$P_{\{(B,*),\#\}}^{n,n',\#}=\{p\in P_{\{(B,*),\#\}}^{n,n'} \mid p(i,0)=\#\ \text{for}\ \forall i\ (-2n'\leqq i\leqq 2n')\}.\quad \boxtimes$$

下の図のようなパターン $p \in P^{n,n,\#}_{\{(B,*),\#\}}$ を考えると、次の補題を得る.



(のこりは全て(B,*)).

<u>補題4</u>. TM T が *blank tape* に対して停止するならば n が存在して $P^{n,n,\#}_{\{(B,*),\#\}} - G_3(P_3) \neq \phi$. 従って $F_3(C_3) \subsetneq C_3$ ⊠

§5.

A_3, $p \in P^{n,n,\#}_{\{(B,*),\#\}}$ と q ($G_3(q) \ni p$) が与えられたとき Z^2 の部分集合から 2^{Z^2} への写像 φ を次のようなものとする.
$q(k,l) \in S \times (M - \{(B,m_0)\})$ であるような (k,l) に対し、
$\varphi(k,l) = (k+i,\ l+1)$ ($i = 1$ 又は $i = -1$) で TM のヘッドが右に動いているか左に動いているかで i を定める. 条件を加えることにより次の補題を得る(くわしい定義は証略する).

<u>補題5</u>. 上で定めた φ に対して $\varphi(k,l)$ が定義されていれば $\#(\varphi(k,l)) = 1$, かつ $\#(\varphi^{-1}(\varphi(k,l))) = 1$ である. ⊠

A_2 をくわしく調べることにより

<u>補題6</u>. $P \in \mathcal{P}^{n,n'}_{\{(B,*),\#\}}$, $G_3(g) \ni P$、かつ、ある(i,j)に対して $g(i,j) \in (S \times M) - \{(B,m_0)\}$ とする。このとき

(i) ちょうど$(k,l) \in \mathbb{Z}^2$がuniqueに存在して

$$\begin{cases} \varphi^t(i,j) = (k,l) \\ g(k,l) = (B,m_0) \\ g(k,l+1) = g(k+1,l+1) = \#. \end{cases}$$

(ii) 関数$y_0(x) = -x-k-l-1$, $y_1(x) = x-k+l-1$, $y_2(x) = -x-i-j$, と$y_3(x) = x-i+j$で囲まれる集合$A = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid y_1(a) < b < y_3(a),\ y_0(a) < b < y_2(a)\}$を考える。このとき$\forall (a,b) \in A$に対して

$$\begin{cases} \varphi(a,b) = (l,\tau) \\ g(a,b) = (F_1)^{-b+l}(C_{initial})(a-k). \end{cases}$$

ただし$C_{initial}$は§3で定義したもの、F_1はTのfirst simulatorの並列写像である。

<u>補題7</u>. $n, n' > 0$, $P \in \mathcal{P}^{n,n',\#}_{\{(B,*),\#\}}$, $G_3(g) \ni P$とする。$i, i', j \in \mathbb{Z}$, $(i'-i > 2)$, に対して$g(i,j) \in (S \times M) - \{(B,m_0)\}$で$g(i',j) \in (S \times M) - \{(B,m_0)\}$ならば$i_0 \in \mathbb{Z}$が存在して$i < i_0 < i'$かつ$g(i_0,j) \in \{\sigma, \tau, \xi, \#\}$. ⊠

補題7より.

補題8. $n, n' > 0$, $p \in P^{n,n',\#}_{\{(B,*),\#\}}$, $G_3(q) \ni p$ とする. $i, j \in Z$ に対して $q(i,j) \in (S \times (M \cup \{*\})) - \{(B, m_0)\}$ で $q(i+1, j) \in (S \times (M \cup \{*\})) - \{(B, m_0)\}$ ならば 次の i), ii)のうちどちらか一方又は両方が成立する. i) $q(i,j) \in S \times \{*\}$, ii) $q(i+1, j) \in S \times \{*\}$.

補題9. $n > 0$ が存在して $P^{n,n,\#}_{\{(B,*),\#\}} - G_3(P_3) \neq \phi$ ならば TM T は blank tape に対して停止する.

(証明の概略). N を上のようなnの最小のものとする. $p \in P^{N,N,\#}_{\{(B,*),\#\}} - G_3(P_3)$ とする. 写像 p の制限 $p' \in P^{N,N-1,\#}_{\{(B,*),\#\}}$ を考えると q が存在して $G_3(q) \ni p'$ となる. 補題7、補題8より $i_N \in Z$ が存在して $q(i_N, -N+1) \in S \times M_T$. 従って補題7よりTは blank tape で停止する. ☒

さらにある種の書きかえ系を考えることにより

補題10. $n > 0$ が存在して $G_3(P_3) \subsetneq P_3$ ならば $P^{n,n,\#}_{\{(B,*),\#\}} - G_3(P_3) \neq \phi$ である. ☒

§6.

補題4と補題9, 補題10より次の定理が示される.

定理1. 任意に与えられた$d \geqq 2$に対して、d次元セルオートマトンの並列写像が全射であるかどうかは帰納的に可解でない。☒

third simulator における記号#の定義から

定理2. 任意に与えられた$d \geqq 2$に対して、d次元セルオートマトンの並列写像の finite support な様相の集合への制限が全射であるかどうかは帰納的に可解でない。☒

確定的な場合についてのエデンの園問題は open となっている。

参考文献

1. E.F. Moore, Machine models of self-reproduction, Proc. Symp. Appl. Math. 14 (1962), 17-33.
2. J. Myhill, The converse of Moore's Garden-of-Eden theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 685-686.
3. S. Amoroso and G. Cooper, Garden-of-Eden theorem for finite configuration, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 158-164.

4. S. Amoroso, G. Cooper and Y. N. Patt, Some Comments on the concepts of a Garden-of-Eden configuration, 11pp. unpublished.

5. Y. Kobuchi and H. Nishio, Some regular state sets in the system of one-dimensional iterative automata, to appear in <u>J. Information Sci.</u> (<u>信学会論文誌</u> 54-C (1971), 396-403にも一部掲載).

6. S. Amoroso and Y. N. Patt, Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures, <u>JCSS</u> 6 (1972), 448-464.

7. H. Yamada and S. Amoroso, A completeness problem for pattern generation in tessellation automata <u>JCSS</u> 4 (1970), 137-176.

8. 丸岡章・木村正行，1次元－2状態－スコープ3テセレーションオートマトンの完全性について. 11pp.

9. A. R. Smith III, Simple computation universal cellular spaces, <u>JACM</u> 18 (1971) 339-353.

10. G. T. Herman, Computing ability of a developmental model for filamentous organisms, <u>J. Theoret. Biol.</u> 25 (1969), 421-435.

11. T. Yaku, The constructibility of a configuration in a cellular automaton, to appear in JCSS.

12. T. Yaku, Surjectivity of parallel maps for cellular automata of arbitrary dimension, 46pp, (投稿中).