数理解析研究所講究録
第179巻 1973年 182-193

適応オートマトンについて

東北大　工
阿曽弘具，木村正行

1. はじめに

ある種の外界の中にいて，外界と相互作用をもちつつ，自己の行動をある程度有利に保つように自己を制御するオートマトンはいかなる種類の論理機構によって構成されうるか，という問題を考える．そのようなオートマトンは自己維持系と考えられ，生物が外界に適応して生存していく姿の数学的モデルとも考えられる．また，外界を未知の制御対象と考えるならば，制御対象が未知にもかかわらずより良い制御をする制御系――適応制御系，学習制御系――の一つの数学的モデルを与える問題とも考えることができる．

この種の問題は，最初，M.L.Tsetlinによって，"ランダムな媒質中でのあるオートマタのふるまい"の分析という形で論じられ[(1)]，その後，そのふるまいを記述するために定義された適応的性質(expediency，漸近的最適性など)をもつ種々のオートマト

ンを提案するという形で論じられてきた.[2][3][4][5][6] その問題自身はそれらのオートマトン間のゲームを論ずるという形で発展している．しかし，また，その議論は生物の学習行動や適応性に関する数学的モデルを与えることを目指しているのであるから，今までとは逆に，まず適応的性質を与えておいて，その性質をもつオートマトンはどのような構造をもつのかと問うことに大きな意味があると思われる．本論では，適応的性質を厳密に定義し，この一般的問題を論ずる．また，二，三の具体的オートマトンを提示する． なお，本論は文献(7)の要訳であり，くわしい証明などはそちらを参照されたい．

2. 適応的オートマトン

2.1 諸定義　外界はオートマトンの行動に対してある反応をする．各行動を a,b などで記し，その集合を A とする．各反応を k,l などで記し，その集合を R とする．A,R は有限集合であるとし，$\#A=m$，$\#R=n$ とする．外界とオートマトンとの行動-反応は時系列をなす．各時刻 t における行動，反応はそれぞれ確率変数 u_t, w_t によって示す．外界からの反応 w_{t+1} は行動 u_t に依存するある確率で定まるとする．その確率は，時刻には依存せず，次式で与えられる．

$$\forall t \in \{0,1,2,\cdots\},\ \forall k \in R,\ \forall a \in A;\ \Pr[w_{t+1}=k \mid u_t=a] = {}^{a}\pi_k\ .$$

${}^{a}\pi_k$を第k要素にもつ$1\times R$確率行ベクトルを${}^{a}\pi$とし，${}^{a}\pi$を第a行にもつ$A\times R$確率行列を$\mathbf{P}$とする．$\mathbf{P}$は外界の構造を与えていると考えられ，$\mathbf{P}$を単に外界とも呼ぶ．$1\times R$確率行ベクトルの集合を$\mathcal{P}$，$A\times R$確率行列の集合を$\mathcal{C}$とする．

オートマンの行動の良さ（有利さ），あるいは，オートマトンの良さは，外界からの反応kに対する利得r_kをもとに判断されるとする．$\hat{r}$をRから実数($\mathbb{R}$)への写像とし，$\hat{r}(k)=r_k$とする．$\hat{r}$は$R\times 1$列ベクトルrによって表現される．

［定義2.1］ オートマトンMおよび外界$\mathbf{P}$に対して，

$$\mathcal{E}(M|\mathbf{P}) = \inf\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E[\hat{r}(w_t)]\right)$$

を$\mathbf{P}$に対するMの評価という．ただし，$E[\hat{r}(w_t)]$は時刻tにおける利得の期待値をあらわし，$\inf$はMに可能な，初期行動の分布に関する下限を意味する．

未知な外界に常に有利に対処するということはどのような可能な$\mathbf{P}$にも有利に対処しうるということを意味するであろう．

［定義2.2］ オートマトンMが合目的的(purposeful)であるとは，${}^{\forall}\mathbf{P}\in\mathcal{C}$; $\mathcal{E}(M|\mathbf{P}) \geqq \xi\mathbf{P}r$ であることである．ただし，$\xi=\frac{1}{m}\mathbb{1}_A^T$，不等号の等号は$\mathbf{P}r$が定数ベクトルのときのみ成立するとする．（$\mathbb{1}_A$は$A\times 1$列ベクトルで各要素が1のものである）

［定義2.3］ オートマトンMが適応的(adaptive)であるとは，次の条件を満たす非負な実数εが存在することである．

$^\forall P\in\mathcal{C}$; $\mathcal{E}(M|P)\geq\max\{Q(P)-\varepsilon, \xi Pr\}$, かつ, $^\exists P\in\mathcal{C}$; $Q(P)-\varepsilon>\xi Pr$. ただし, $Q(P)=\max_{a\in A}(Pr)_a$. また, Mが完全適応的であるとは, 上の条件を満たすεとして零をとれることである. すなわち, $^\forall P\in\mathcal{C}$; $\mathcal{E}(M|P)=Q(P)$ となることである.

オートマトンM'が目的をもたないならば, 各時刻において行動をでたらめに選択するであろう. このとき, $^\forall P\in\mathcal{C}$; $\mathcal{E}(M'|P)=\xi Pr$ であり, 合目的性は, このM'より常に大きい平均期待利得が得られることを示している. 適応性は, Mが任意の外界Pに対して, Pに対する最適行動($Q(P)$を与える行動)を多く選択してとり, 平均期待利得の最大値$Q(P)$にεの巾をもって近い利得を得るということを意味する.

さて, 以上において, オートマトンについてそれが行動するという以外何の規定もなかった. 以下では, オートマトンの一般的数学的モデルとして確率的順序機械(Stochastic sequential machine, 以下ではSSMと略記する)を考えることにする. SSMは, 推移系(transition system) Mと初期状態分布πの2-タップルで$\langle M,\pi\rangle$と定義される. Mは次の5-タップルで定義される.

$$M=\langle S, R, A, \Phi, \Psi\rangle$$

ここで, Sは有限集合で状態の集合をあらわし, Sの元をi, jなどで記し, 時刻tにおける状態をあらわす確率変数をx_tとする. R, Aはそれぞれ入力, 出力の集合で, 反応, 行動の集合

に等しい。$\mathfrak{P}$は状態推移行列の集合で，$\mathfrak{P}=\{{}^kP \mid k\in R,\ {}^kP:$ $\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}$確率行列$\}$．$\mathfrak{G}$は状態-行動の確率的関係で，$\mathfrak{S}\times A$確率行列である．$\mathfrak{G}$が0-1要素の場合$g$ともかき，$g$は$\mathfrak{S}$から$A$の上への写像になっているとする．${}^kP\in\mathfrak{P}$と$\mathfrak{G}$の意味は次の通りである．$\forall t\in\{0,1,2,\cdots\},\ \forall k\in R,\ \forall i,j\in\mathfrak{S}\ ;\ Pr[x_{t+1}=j \mid x_t=i,\ u_{t+1}=k]={}^kP_{ij}$

$$\forall t\in\{0,1,2,\cdots\},\ \forall i\in\mathfrak{S},\ \forall a\in A\ ;\ Pr[u_t=a \mid x_t=i]=\mathfrak{G}_{ia}$$

この推移系Mに対する初期状態分布πは$1\times\mathfrak{S}$確率行ベクトルで，$\forall i\in\mathfrak{S}\ ;\ Pr[x_0=i]=\pi_i$　を意味する．Mのことを単に$\mathfrak{S}$SMともいう．

2.2 適応的オートマトン

[定理2.4] オートマトンMが適応的であるための必要十分条件は，Mが合目的的であることである．

(略証) εとして，$d(M)=\sup\limits_{P\in\mathcal{C}}\left(G(P)-\mathcal{E}(M|P)\right)$ をとればよい ∎

この定理から，以下では，合目的的オートマトンについてのみ議論をすすめる．なお，$d(M)$はMにのみ依存し，Mの合目的性の(あるいは適応性の)程度を示していると考えられる．

2.3 合成系　以下は次章の準備である．外界とオートマトンとの結合によって生ずる一つの閉じた系を合成系と呼ぶ．

[補題2.5] 合成系において，$\{x_t,\ t=0,1,\cdots\}$はマルコフ連鎖をなし，その$\mathfrak{S}$上の推移確率行列$Q(M|P)$は$\forall i,j\in\mathfrak{S}\ ;$

$Q(M|P)_{ij}=\sum\limits_{k\in R}\sum\limits_{a\in A}\mathfrak{G}_{ia}\cdot{}^a\pi_k\cdot{}^kP_{ij}$　で与えられる．また，x_t

の分布から，u_t, w_{t+1} の分布が得られる。

固定されたSSM:Mに対して，$Q(M|P) = Q(P)$ とも記す。

［補題2.6］ 外界 $P \in \mathcal{C}$，SSM:M に対して，

$$\mathcal{E}(M|P) = \min_{i \in S} (L(P)\,\mathcal{T}\,P\,r)_i$$

ただし，$L(P) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} Q(P)^t$ ，$Q(P)^0 = I_S$（単位行列）。

［補題2.7］ SSM:Mについて，外界 P に対する M の評価は，$Q(P)$ のエルゴード部分連鎖に関する平均期待利得で決まる。

3. 合目的的オートマトンのクラス

3.1 存在　合目的的SSMのクラスを $\mathcal{M}$ とする。

［定理3.1］ 合目的的SSMが存在する。すなわち，$\mathcal{M} \neq \emptyset$.

（略証）次の $M = \langle S, R, A, \mathfrak{P}, G \rangle$ は合目的的である。

$S = A$，$G = I_A$（単位行列）。 $\forall k \in R$；${}^kP \in \mathfrak{P}$ ならば，

$$ {}^kP = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} {}^k\bar{z} & {}^kz & & 0 \\ & {}^k\bar{z} & {}^kz & \\ & 0 & \ddots & {}^kz \\ {}^kz & & & {}^k\bar{z} \end{bmatrix} \end{array} .$$

ただし，$r_{k^*} = \max_{k \in R} r_k$，$r_{\ell^*} = \min_{k \in R} r_k$，

$0 < c < 1$，$0 < d < 1 - c$ として，

$${}^kz = c\frac{r_{k^*} - r_k}{r_{k^*} - r_{\ell^*}} + d, \quad {}^k\bar{z} = 1 - {}^kz .$$ ■

3.2 合目的的SSMの強連結性

［定義3.2］ 二つのSSM:M, $\tilde{M}$ について，$\forall P \in \mathcal{C}$；$\mathcal{E}(\tilde{M}|P) \geq \mathcal{E}(M|P)$ のとき，$\tilde{M}$ はMより良いといい，$\tilde{M} \gg M$ と記す．また $\tilde{M} \gg M$ かつ $M \gg \tilde{M}$ のとき，$\tilde{M}$ とMは等価であるといい，$\tilde{M} \approx M$.

Gが S から A の上へのある写像 g の行列表現であるような

合目的的SSMの集合を$\mathcal{M}_d$とする．明らかに，$\mathcal{M}_d \subseteq \mathcal{M}$．

[定理3.3] 各$M \in \mathcal{M}$に対して，等価な$\tilde{M} \in \mathcal{M}_d$が存在する．

(略証) $\tilde{M} = \langle \tilde{\mathcal{S}}, R, A, \tilde{\Phi}, \tilde{g} \rangle$として，$\tilde{\mathcal{S}} = A \times \mathcal{S}$，$^{\forall}a \in A, {}^{\forall}i \in \mathcal{S};\ \tilde{g}(a,i) = a$なる$\tilde{g}$，$\tilde{\Phi} = \{ {}^k\tilde{P} \mid k \in R,\ {}^k\tilde{P} = K\,{}^kP f(G),\ {}^kP \in \Phi,\ K = \mathbb{1}_A \otimes I_S \}$ととればよい．ただし，$f(G)$：$S \times AS$確率行列，$^{\forall}i,j \in \mathcal{S}, {}^{\forall}a \in A;\ f(G)_{i,aj} = \delta_{ij} G_{ja}$．∎

そこで，以下の議論では，特にことわらないでもGは$\mathcal{S}$からAの上へのある写像gの行列表現(0-1要素)であるとする．各$a \in A$に対して，$\mathcal{S}_a = g^{-1}(a) = \{ i \mid i \in \mathcal{S},\ g(i) = a \}$とする．

[命題3.4] SSM:Mが合目的的ならば($M \in \mathcal{M}_d$ならば)，$^{\forall}k \in R - \{k^*\}, {}^{\forall}A' \subsetneq A, {}^{\forall}\mathcal{S}' \subseteq \bigcup_{a \in A'} \mathcal{S}_a;\ {}^kP' \mathbb{1}_{S'} \neq \mathbb{1}_{S'}$．ここで，$k^*$は$r_{k^*} = \max_{k \in R} r_k$なる反応，${}^kP'$は${}^kP$の$\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'$部分行列である．

(証明は背理法による)．$\mathcal{C}^+ = \{ P \mid P \in \mathcal{C},\ P > 0 \}$とする．

[系3.5] SSM:Mが合目的的ならば，$^{\forall}P \in \mathcal{C}^+, {}^{\forall}A' \subsetneq A, {}^{\forall}\mathcal{S}' \subseteq \bigcup_{a \in A'} \mathcal{S}_a;\ Q'(P)\mathbb{1}_{S'} \neq \mathbb{1}_{S'}$．ただし，$Q'(P)$は$Q(P)$の$\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'$部分行列である．

強連結な合目的的SSMの集合を$\mathcal{M}_c$とする．$\mathcal{M}_c \subseteq \mathcal{M}_d \subseteq \mathcal{M}$．

[定理3.6] 各$M \in \mathcal{M}$に対して，より良い$\hat{M} \in \mathcal{M}_c$が存在する．

(略証) ある$P \in \mathcal{C}^+$に対する$Q(M|P)$の一つのエルゴード部分連鎖に対応する状態空間$\hat{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$をとり，$\hat{\mathcal{S}}$上に${}^kP, g$を制限したものを${}^k\hat{P}, \hat{g}$とすればよい．∎

この定理の証明の過程から，$\mathcal{M}_c$が同定されれば，その元のSSMの状態の直和に適当な過渡状態を付加することによっ

て，一般的な合目的的SSMが得られることが知られる．

3.3 一つの必要条件と完全適応的オートマトン

［定義3.7］ SSM:$M=\langle \mathfrak{S}, R, A, \Phi, g\rangle$ （$\mathfrak{S}=A\times B$，$g(a,i)=a$ なる g）に対して，T_A を A 上の置換とするとき，それに対応する変換 $T_A(M)=M'=\langle \mathfrak{S}, R, A, \Phi', g\rangle$ を次のように定義する． $\forall k\in R$; ${}^kP'\in\Phi'$ ならば，${}^kP'=T\,{}^kP\,T^{-1}$．ここで，${}^kP\in\Phi$，$T=T_A\otimes I_B$ ．

［命題3.8］ 合目的的SSM:M に対して，任意の A 上の置換 T_A について，その対応する変換によるSSM:$T_A(M)$ は合目的的である．

次の定理は系3.5による．

［定理3.9］ 完全適応的オートマトンは存在しない．

4. SSMのあるクラスの合目的性

定理3.6および命題3.8で暗示されることを考えに入れて，SSMのクラスを次のように制限する．

［特殊化1］ 次下の条件を満たすSSM:$M=\langle \mathfrak{S}, R, A, \Phi, g\rangle$ をCSSM（counting type SSM）という．

1） $\mathfrak{S}=A\times B$ ，$g(a,i)=a$ なる g．($G=I_A\otimes 1_B$)． $B=\{0, 0'\}\cup B'$ （B の元を i, j で記す）．$B'=\emptyset$，または，$=\{1, 2, \cdots, A\}$． Φ は $\Phi=\{{}^k\hat{P}\mid k\in R, {}^k\hat{P}$; $B\times B$ 確率行列$\}$ と $\Gamma=\{{}^j\Gamma\mid j\in B, {}^j\Gamma: A\times A$ 確率行列$\}$ とから，つぎのように与えられる． $\forall k\in R$; ${}^kP\in\Phi$ ならば $\forall a, b\in A$ $\forall i, j\in B$; ${}^kP_{ai,bj}={}^k\hat{P}_{ij}\cdot{}^j\Gamma_{ab}$ ．（これは，SSM:$\langle A, B, A, \Gamma, I_A\rangle$

と $\langle B, R, B, \Psi, I_B \rangle$ を直列に結合したものである).

2) $\langle A, B, A, \Gamma, I_A \rangle$ は強連結で，さらに，${}^{j}\Gamma = {}^{0}\Gamma \ (j=0), = I_A \ (j \neq 0)$.

3) $\langle B, R, B, \Psi, I_B \rangle$ は強連結で，さらに，$\forall k \in R;\ i \neq 0, 0'$ ならば ${}^{k}\hat{p}_{i0} = 0$.

上で(2)は ${}^{0}\Gamma$ がエルゴード連鎖であることを意味し，(3)より ${}^{k}\hat{P}$ および $Q(P)$ の $(aB \times bB)$ 部分行列 $U_{ab}({}^{a}\pi)$ は次のように記される.

$$
{}^{k}\hat{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0' \\ B' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 0' & B' \end{array} \\ \begin{bmatrix} {}^{k}z & {}^{k}y & {}^{k}\mu \\ {}^{k}z' & {}^{k}y' & {}^{k}\mu' \\ 0 & {}^{k}f & {}^{k}\bar{P} \end{bmatrix} \end{array}, \quad
U_{aa}({}^{a}\pi) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0' \\ B' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 0' & B' \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_a {}^{0}\Gamma_{aa} & y_a & \mu_a \\ z'_a {}^{0}\Gamma_{aa} & y'_a & \mu'_a \\ 0 & f_a & \bar{P}_a \end{bmatrix} \end{array}, \quad
\underset{(b \neq a)}{U_{ab}({}^{a}\pi)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0' \\ B' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 0' & B' \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_a \Gamma_{ab} & 0 & 0 \\ z'_a \Gamma_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

ただし，$z_a = \sum_k {}^{a}\pi_k \cdot {}^{k}z$, $\mu_a = \sum_k {}^{a}\pi_k \cdot {}^{k}\mu$, $\bar{P}_a = \sum_k {}^{a}\pi_k \cdot {}^{k}\bar{P}$ であり，z'_a, y_a, y'_a, μ'_a, f_a なども同様である.

［補題4.1］ CSSM:M について，ある $P \in \mathcal{C}$ に対して，$\forall a \in A$; $z'_a \neq 0$ かつ $(I - \bar{P}_a)^{-1}$ が存在するならば，$L(P) = \mathbb{1}_S \cdot \alpha(P)$ で与えられ，$\forall b \in A$; $\alpha(P)$ の $1 \times bB$ 部分行ベクトル $\alpha_b(P)$ は，$\alpha_b(P) = (\alpha_b(P)_0, \alpha_b(P)_{0'}, \alpha_b(P)_{B'})$ として，次のように与えられる.

$$
\alpha_b(P)_0 = \frac{\beta_b}{D(P)}, \quad \alpha_b(P)_{0'} = \frac{\beta_b}{D(P)} \cdot \frac{1 - z_b}{z'_b}, \quad \alpha_b(P)_{B'} = \frac{\beta_b}{D(P)} \left(\mu_b + \frac{1 - z_b}{z'_b} \mu'_b \right) \bar{N}_b.
$$

ただし，$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_b, \cdots, \beta_m)$ は ${}^{0}\Gamma$ の不動点確率行ベクトル，$\bar{N}_b = (I - \bar{P}_b)^{-1}$, $D(P) = \sum_{a \in A} \beta_a T({}^{a}\pi)$, $T({}^{a}\pi) = 1 + \mu_a \bar{N}_a \mathbb{1} + \frac{1 - z_a}{z'_a} (1 + \mu'_a \bar{N}_a \mathbb{1})$.

以下では，$k^* \in R : r_{k^*} = \max_k r_k$, $\ell^* \in R : r_{\ell^*} = \min_k r_k$ とする.

［補題4.2］ CSSM: M が合目的的ならば，$\forall b \in A$; ${}^{b}\pi \in \mathcal{P} - \{e^{k^*}\}$ のとき，$\bar{N}_b$ は存在し，$z'_b \neq 0$ である. ただし，e^{k^*} は，第 k^* 要素にのみ 1 をもつ確率行ベクトル. （命題3.4による）

$\mathcal{P}^* = \{\rho \mid \rho \in \mathcal{P}, \rho \neq e^{k^*}\}$, $\mathcal{C}^* = \{P \mid P \in \mathcal{C}, P$ の各行 ${}^{a}\pi \in \mathcal{P}^*\}$.

［補題4.3］ CSSM：M が合目的的ならば，$\forall P \in \mathcal{C}^*$；$\mathcal{E}(M|P) = \alpha(P)GPr$．$\alpha(P)$ は補題4.1 で与えられるものである．

［補題4.4］ 補題4.1 の $\alpha(P)$ について，$\forall a \in A$；$(\alpha(P)G)_a = \beta_a T({}^a\pi) \big/ \sum_{b\in A} \beta_b T({}^b\pi)$．また，$\rho, \nu \in \mathcal{P}^*$ に対して，${}^m\pi = \rho$，${}^1\pi = \nu$，${}^a\pi = \frac{1}{2}(\rho+\nu)$ $(2 \leq a \leq m-1)$ と選んだ $\mathcal{C}$ の元を $\hat{P}$ とすると，$\hat{P} \in \mathcal{C}^*$，かつ，$\mathcal{E}(M|\hat{P}) - \xi\hat{P}r = \frac{1}{2D(\hat{P})}(\beta_m T(\rho) - \beta_1 T(\nu))(\rho r - \nu r)$．

さて，補題4.1 の $T({}^a\pi)$ は ${}^a\pi$ と Ξ とにのみ依存している．考えているCSSM：M が合目的的ならば，補題4.2 より，T は $\mathcal{P}^*$ から $\mathbb{R}$ への関数と考えることができる．補題4.1 から，T は n 個の変数の有理式であるから，連続である．また，補題4.1 の β について，命題3.8 から，$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_m$ と仮定してよい．

［補題4.5］ CSSM：M が合目的的ならば，$\forall \rho, \nu \in \mathcal{P}^*$；$\nu r > \rho r$ ならば $T(\nu) \geq T(\rho)$．（証明は補題4.4を用いて背理法による）

［補題4.6］ CSSM：M が合目的的ならば，補題4.1 における $T : \mathcal{P}^* \to \mathbb{R}$ なる関数は，ρr についての増加関数である．すなわち，$\hat{T} : [r_{e^*}, r_{k^*}) \to \mathbb{R}$ なる増加関数が存在して，$T(\rho) = \hat{T}(\rho r)$．

［補題4.7］ CSSM：M が合目的的ならば，G は二重確率行列（列和も 1）である．

（補題4.6 の否定は補題4.5 に矛盾し，補題4.7 の否定は補題4.4 を用いて合目的性に矛盾することが示せる．）

［系4.8］ CSSM：M が合目的的ならば，補題4.6 の $\hat{T}$ は狭義

な増加関数である．

［定理4.9］ CSSM：M が合目的的であるための必要十分条件は，1) $^\forall k\in R-\{k^*\}$：$^k\hat{p}$ の $\{0'\}\cup B'$ 上の部分連鎖が過渡的であること（すなわち，$^k\Phi$ が過渡的で，$^kz'>0$），かつ，
2) Φ によって定まる $\mathcal{P}^*$ から $\mathbb{R}$ への写像 T について，ある狭義に増加な $[r_{\ell^*}, r_{k^*})$ から $\mathbb{R}$ への写像 $\hat{T}$ が存在して，$^\forall\rho\in\mathcal{P}^*$；$T(\rho)=\hat{T}(\rho r)$ であること，かつ，
3) Γ の元 γ が二重確率行列であること，である．

（略証）必要性は命題3.4，補題(4.2)，4.6，4.7，系4.8 で示されている．十分性は補題2.7 などを用いて示される．■

この定理は Φ について間接的に規定しているだけで，Φ がどのような形をしているかは，さらに議論をすすめなければならないであろう．$T(\rho)$ が ρr の関数となるための一つの十分条件は，Φ に対して，ある B×B 行列 C, D が存在して，任意の $k\in R$ について $^k\hat{p}=C\cdot r_k+D$ となることである．さらに，$T(\rho)$ が ρr の増加関数であるということから，C, D に制限が加わるであろう．この形が必要であるということはまだ知られていない．また，γ について，二重確率行列であることが必要十分条件であるが，文献(4)と同様に，適応するまでの時間を計算すると，それが γ の値によって影響をうけることが示せる．

［特殊化2］ CSSM で，γ が二重確率行列，$^k\hat{p}\in\Phi$ が次のよう

にあらわせるSSMをそれぞれ(1) W-SSM，(2) B-SSMという．

$$
(1)\quad {}^{k}\hat{p} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0' \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \hat{n} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 0' & 1 & 2 & \cdots & v & \cdots & \hat{n} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
{}^k z & 0 & 0 & & & {}^k\bar{z} & & 0 \\
{}^k z & 0 & 0 & & & {}^k\bar{z} & & 0 \\
0 & {}^k z & 0 & {}^k\bar{z} & \ddots & & O & \\
0 & 0 & {}^k z & 0 & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & 0 & {}^k\bar{z} \\
0 & 0 & O & & & & {}^k z & {}^k\bar{z}
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad
(2)\quad {}^{k}\hat{p} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0' \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \hat{n} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 0' & 1 & 2 & \cdots & v & \cdots & \hat{n} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
{}^k z & 0 & 0 & & & {}^k\bar{z} & & 0 \\
{}^k z & 0 & 0 & & & {}^k\bar{z} & & 0 \\
0 & {}^k z & 0 & \ddots & & O & & {}^k\bar{z} \\
0 & 0 & {}^k z & \ddots & \ddots & & & {}^k\bar{z} \\
 & & & \ddots & \ddots & {}^k z & 0 & {}^k\bar{z} \\
0 & 0 & O & & & & {}^k z & {}^k\bar{z}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

ただし，${}^k z$，${}^k\bar{z}$ は．$0<c\leq 1$，$0\leq d\leq 1-c$ として，定理3.1と同じ値．

［定理4.10］ W-SSM，B-SSMは合目的的である．

これらは，$R=\{1,2\}$ とすれば，今までに知られている形をほぼすべて含んでいる．

5. むすび

「どのような構造をもつオートマトンが合目的的であるのか」という問に部分的ではあるが答を与えた（定理3.3，3.6，4.9）また，適応性について，合目的性と等価なこと（定理2.4），完全適応的オートマトンが存在しないこと（定理3.9）を示した．

おわりに，御討論いただいた本多波雄教授ならびに本多研，木村研，福島研の諸氏に感謝いたします．

文献 （AT は Automatika i Telemekhanika の略）

(1) M.L. Tsetlin, AT22, P1210 (1961)　(2) V. Yu. Krylov, AT24, P1114 (1963)

(3) N.P. Kandelaki, et al. AT27, P1037 (1966)　(4) N.B. Vasil'ev, et al. AT28, P1100 (1967)

(5) K.S. Fu "Adaptive, learning and Pattern recognition system" ch11. P406. (1970) Academic Press.

(6) 竹内，北橋．電子通信学会．論文誌 55-D, P587 (1972)，55-A. P569 (1972)

(7) 阿曽，木村，電子通信学会研究会資料 AL PRL 72-106 -107 (1973-01).