数理解析研究所講究録
第 180 巻 1973 年 1-9

Generalized スライス と finite model property

東大 理　　古森 雄一

中間命題論理を、モデルを用いて研究する際に、そのモデルが束モデルにしてもKripkeモデルにしても、finite model property (fmp) の概念は非常に重要なものである。例えば、モデルによる論理の決定問題に関する唯一の一般的な定理は "論理が有限公理化可能でfmpを持てば決定可能である" というものである。また、任意の論理がKripkeモデルを持つかどうかは、まだ未解決であるが、fmpを持てばKripkeモデルを持つことが知られている。直観主義論理(LJ)がfmpを持つことから、"任意の中間論理はfmpを持つ" という予想もなされたが、Jankov [3] はfmpを持たない中間論理が存在することを示した。一方、細井 [2] はスライスと呼ばれる概念を用いて中間論理の分類を定義した。Jankov が存在を示したfmpを持たない論理の例は $\mathcal{S}_\omega$ に属しているので、有限スライス上の任意の論理がfmpを持つかどうかは未解決の問題で

あった。

最近、[4]で有限スライス上の論理はfmpを持つことが示され、性質の悪い論理はすべて$\mathcal{S}_\omega$に属しており、有限スライスに比べて複雑な構造を有しているので、$\mathcal{S}_\omega$を更に細分する分類の必要性が感じられる。

既に、$\mathcal{S}_\omega$の分類の試みはいくつかあるが、全てスライスに直交するような分類で$\mathcal{S}_\omega$を縦割にするような感じのものである。

ここでは、スライスに平行に横割にするような$\mathcal{S}_\omega$の細分を考えてみる。更に、それによって$\mathcal{S}_\omega$のある部分集合に含まれる論理もfmpを持つことを示し、いくつかの興味ある問題を提起する。

§1. Generalized Δ-projection.

この§と次の§では、だいたい[4]に従って(後の都合上[4]を多少一般化するが)話を進める。

命題論理の命題式の集合で代入と *modus ponens* に関して閉じており、直観主義論理の公理を含んでいるものを論理と呼ぶ。命題式全体の集合をW，直観主義(古典)論理で *valid* な命題式全体の集合をLJ(LK)と書く。Pを *pseudo-Boolean algebra* (PBA)としたとき、L(P)によりPで *valid* な命題式全体の集合を表わす。

まず fmp の定義を述べる。

<u>定義 1.1.</u> 論理 L が fmp を持つ $\iff$ 有限PBAの集合 $\{P_i \mid i \in I\}$ があって $L = \bigcap_{i \in I} L(P_i)$ となる。

論理 L の Lindenbaum algebra を $\lambda(L)$, $\lambda(L)$ の subalgebra で n 個の命題変数で生成されるものを $\lambda^n(L)$ と書く。このとき次の定理が知られている。

<u>定理 1.2.</u> 任意の PBA P に対して、$L(P)$ は論理である。逆に、任意の論理 L に対して、$L = L(\lambda(L)) = \bigcap_{n<\omega} L(\lambda^n(L))$ 。

次に、generalized スライスの定義に必要な generalized Δ-projection を定義する。

<u>定義 1.3.</u> L を論理、α を ordinal とする。

$$\Delta(L) = LJ + \{((a \supset A) \supset a) \supset a \mid A \in L\}$$

$$\Delta^0(L) = L$$

$$\Delta^{\alpha+1}(L) = \Delta(\Delta^\alpha(L))$$

α が limit ordinal のとき、集合 $\{L' \mid L'$ は論理で $(\forall \beta < \alpha)(L' \not\supseteq \Delta^\beta(L))\}$ の極大元全体の集合を $\mathfrak{M}$ とする。

$$\Delta^\alpha(L) = \bigcap_{L' \in \mathfrak{M}} L'$$ ($\mathfrak{M}$ が空集合のときは $\bigcap_{L' \in \mathfrak{M}} L' = LJ$ とする。)

このとき、[2]で証明された次の定理はスライスの定義とみなすことができる。

<u>定理1.4.</u> $L \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow L = W$

$L \in \mathcal{S}_n \Leftrightarrow \Delta^n(W) \subseteq L$ かつ $\Delta^{n-1}(W) \not\subseteq L \quad (1 \leq n < \omega)$

$L \in \mathcal{S}_\omega \Leftrightarrow (\forall n < \omega)(\Delta^n(W) \not\subseteq L)$

論理記号 $\supset$ に対応する束演算を $\rightarrow$ と書くことにする。

<u>定義1.5.</u> P を PBA, 1 を P の最大元とする。P の部分集合 F が P のフィルターであるとは次の2つの条件を満たすことである：

(1) $1 \in F$

(2) $x \in F$ かつ $x \rightarrow y \in F \Rightarrow y \in F$ 。

<u>定義1.6.</u> P を PBA, F を P のフィルターとする。P 上の関係 $\sim_F$ を次のように定義する：

$$x \sim_F y \Leftrightarrow x \rightarrow y \in F \text{ かつ } y \rightarrow x \in F \quad 。$$

<u>定義1.7.</u> PBA P が irreducible であるとは、P から最大元を除いた集合 P^- が最大元をもつことである。(P^- の最大元を 2 と書く。)

このとき、次の定理がよく知られている。

<u>定理1.8.</u> 任意の PBA P と任意の P のフィルター F に対して、関係 $\sim_F$ は同値関係で $P/\sim_F$ は自然に PBA となる。また、F がある $x \neq 1$ に関する極大フィルター、すなわち x を含まない P のフィルターの集合の中で極大なもののとき、$P/\sim_F$ は irreducible となり、$[x] = 2_{P/\sim_F}$ となる。($P/\sim_F$ を P/F と書く。)($\sim_F$ による x の同値類を $[x]$ と書いた。)

明らかに、P^- は PBA で $P/\{1,2\}$ と同型である。

<u>補題 1.9.</u> P が irreducible PBA $\Rightarrow \{\Delta^{\alpha+1}(L) \subseteq L(P)$
$\Leftrightarrow \Delta^{\alpha}(L) \subseteq L(P^-)\}$

(証明) $\Delta^{\alpha}(L) \nsubseteq L(P^-)$ とすると、$A \in \Delta^{\alpha}(L)$ かつ $A \notin L(P^-)$ を満たす命題式 A がある。このとき、$f(A) \neq 1_{P^-}$ となる P^- の assignment f が存在する。f^* を次のような P の assignment とする: $f^*(a) = 2_P$ ，任意の A に現れる命題変数 b に対して $f^*(b) = f(b)$ 。($f(b) = 1_{P^-}$ のときは $f^*(b) = 2_P$ としても $f^*(b) = 1_P$ としてもよい。)

このとき $f^*(((a \supset A) \supset a) \supset a) = 2_P$ 。よって、$((a \supset A) \supset a) \supset a \notin L(P)$ 。ところが、$((a \supset A) \supset a) \supset a \in \Delta^{\alpha+1}(L)$ であるから、$\Delta^{\alpha+1}(L) \nsubseteq L(P)$。逆も同様である。(Q.E.D.)

§2. ある有限生成 algebra の有限性

Diego [1] の方法により、次の補題が証明できる。

<u>補題 2.1.</u> 任意の $m, n < \omega$ に対して，$\lambda^m(L)$ が有限で $L(P) \supseteq \Delta^n(L)$ かつ P が m 個の元で生成されるならば、P は有限 PBA である。

(証明) n に関する帰納法による。$n = 0$ のとき、$L(P) \supseteq L$ で $\lambda^m(L)$ が有限である。P は $\lambda^m(L)$ をあるフィルターで割ったものと同型になっているから当然 finite である。

以下は全く [4] の lemma 2.1 の証明と同様である。(Q.E.D)

この補題において、L＝Wとすると[4]の結果が得られる
。

<u>定理2.2.</u> Lが有限スライス上にあるならばfmpを持つ。

§3. Generalized スライス

定理1.4と同様にして、次のようにgeneralizedスライスを定義する。

<u>定義3.1.</u> $L \in G\mathcal{S}_\alpha \Leftrightarrow \Delta^\alpha(W) \subseteq L$ かつ

$$(\forall \beta < \alpha)(\Delta^\beta(W) \nsubseteq L)$$

定理1.4とこの定義から次の定理は明らかである。

<u>定理3.2.</u> $G\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n \quad (n < \omega)$

$$\mathcal{S}_\omega \supseteq \bigcup_{\alpha \geq \omega} G\mathcal{S}_\alpha$$

<u>定理3.3.</u> $\alpha \neq \beta \quad \Rightarrow \quad G\mathcal{S}_\alpha \cap G\mathcal{S}_\beta = \phi$

$\Delta^\omega(W) = S_\omega (= LJ + (a \supset b) \vee (b \supset a))$ で $\lambda^m(S_\omega)$ は有限PBAであるから、補題2.1より次の定理が得られる。

<u>定理3.4.</u> $L \in G\mathcal{S}_{\omega+n} \ (n<\omega) \Rightarrow L$ はfmpを持つ　。

$\mathcal{S}_\omega \subseteq \bigcup_{\alpha \geq \omega} G\mathcal{S}_\alpha$ を言うためには、あるordinal α があって、$\Delta^\alpha(W) = LJ$ となることを言わなければならない。それを言うために δ をもし $\Delta^\alpha(W) = LJ$ となるordinalがあるならばその最小なものを δ とし、もしないならばordinal全体のclassとする。

<u>定理3.5.</u> $\alpha \in \delta \Rightarrow G\mathcal{S}_\alpha \supseteq \{\Delta^\alpha(W)\}$

（証明） $(\forall\beta<\alpha)(\Delta^{\beta}(W)\supsetneq\Delta^{\alpha}(W))$ を示せばよい。
超限帰納法による。

α が limit ordinal のときは、定義1.3より明らか。

α が limit ordinal でないとき： $\alpha=\gamma+1$ とおく。
$\Delta^{\gamma+1}(W)\subseteq\Delta^{\gamma}(W)$ は明らか。帰納法の仮定により
$(\forall\beta<\gamma)(\Delta^{\beta}(W)\supsetneq\Delta^{\gamma}(W))$ であるから、$\Delta^{\gamma+1}(W)\subsetneq\Delta^{\gamma}(W)$
を示せばよい。次の補題を用いれば、明らかである。(Q.E.D)

<u>補題3.6</u>　$L\neq LJ \Rightarrow \Delta(L)\subsetneq L$

（証明） $L\neq LJ$ であるから、$A\notin LJ$ かつ $A\in L$ なる命題式 A がある。A を含まない有限モデルをもつ論理が（LJ が fmp を持つことから）存在する。その1つを L' とする。次のような論理の集合 h を考える： $h=\{L''\mid L'\subseteq L''$ かつ $L\not\subseteq L''\}$。
$L'\in h$ であるから h は空でない。L' が有限モデルをもつことから h は有限集合である。この集合の1つの極大元を K とする。極大元であるから、K が irreducible な有限モデル P をもつことが分る。P の Jankov の命題式 [cf. 3] を X_P とすると、$X_P\in L$ かつ $X_P\notin\Delta(L)$ が以下のように示せる。

$X_P\notin L$ とすると $L\subseteq L(P)=K$。これは K が h の元であることに反する。

$X_P\in\Delta(L)$ とすると、$\Delta(L)\not\subseteq L(P)$。補題1.9により

、$L \neq L(P^-) \supsetneqq L(P)$。これは $K=L(P)$ が h の極大元であることに反する。 (Q.E.D)

定理3.5.と論理全体の集合の濃度が連続濃度であることから、次の定理が得られる。

<u>定理3.7.</u> $\Delta^\alpha(W)=LJ$ となる ordinal α が連続濃度 ordinal 以下の limit ordinal で存在する。このような ordinal のうち最小なものを究極 ordinal といい uo と書く。

<u>定理3.8.</u> $\mathcal{S}_\omega = \sum_{\alpha=\omega}^{uo} \mathcal{G}\mathcal{S}_\alpha$ （直和）

<u>問題3.9.</u> uo を求めよ。

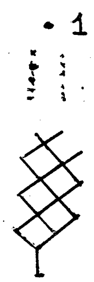
任意の n に対して $\lambda^n(L)$ が有限になる論理を strongly finite model property (sfmp) を持つ論理ということにする。$\Delta^\alpha(W)$ がはじめて sfmp を持たなくなる ordinal α を sfmpo と書く。明らかに（補題2.1による）、sfmpo は limit ordinal である。また sfmpo $\geqq \omega \cdot 2$ である。

<u>問題3.10.</u> sfmpo を求めよ。

sfmpo の定義より、次の定理は明らかである。

<u>定理3.11.</u> $L \in \mathcal{G}\mathcal{S}_\alpha$ ($\alpha <$ sfmpo) $\Rightarrow$ L は fmp を持つ

下図のようなモデルを M とする。



問題 3.12. $\Delta^{sfmpo}(W) = L(M)$?

問題 3.13. L が sfmp を持たない $\Rightarrow L \subseteq L(M)$?

上の2つの問題は互いに同値である。

さて、fmp を持たない論理をはじめて含む GS_α の ordinal を fmpo と書くことにする。

問題 3.14. fmpo を求めよ。sfmpo と fmpo の関係はどうか？（例えば sfmpo = fmpo か？）

参考文献

[1] A. Diego, Sur les algèbres de Hilbert, Collection de logique mathématique, Série A, No. 21, Paris, 1966.

[2] T. Hosoi, On intermediate logics I, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. I, 14 (1967), 293-312.

[3] V. A. Jankov, Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, Soviet Math. Dokl., 9 (1968), 806-807.

[4] Y. Komori, The finite model property of the intermediate propositional logics on the finite slices, (to appear).