数理解析研究所講究録
第 180 巻 1973 年 75-89

Consistency Proof for Arithmetic in all Finite Types

東京電機大学　　花谷　圭人

この小論では有限 type の primitive recursive functionals を含んだ Peano arithmetic $\tilde{T}$ の無矛盾性を示す．これは Hanatani 66 の結果を補い，合せて $\tilde{T}$ における prim. rec. functional の計算可能性を保証するものである。これらに於て有限の立場を超えるものとして仮定されたのは，ある制限付の 2 階述語論理の cut elimination theorem であって，その証明は Takeuti 55 により ε_0 までの超限帰納法の範囲で与えられている．このような functional の計算可能性は Gödel 58 において自然数論の無矛盾性証明のために仮定されたものであったから，ε_0 までの超限帰納法の範囲で証明できなくてもおかしくないと思っていた．T と $\tilde{T}$ のちがいはあるが Gödel 58 P284 の次の一節もこれと関連して気になる：» Das System T ist von gleicher Beweisstärke wie ein System der rekursiven Zahlentheorie, in dem vollständige Induktion für alle Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ (in der gewöhnlichen Darstellung) zugelassen wird.«

$\tilde{T}$の無矛盾性証明はinductionの消去を経て行うが，制限付2階述語論理のcut elimination theoremを用いるのはinduction消去の際である．$\tilde{T}$においてinductionと切離せないのはtypeの概念である．普通のPeano arithmeticとちがってinductionの適用できるのは，つまり自然数に等しいのは，全対象ではなくてtype 0として区別されるべき一部分だけだからである．いまこれらtype 0の対象を他から区別するZというpredicate constantを導入することにすれば全てのtypeの対象が区別できる．実際 $F_0(t) \equiv Z(t)$, $F_{(\sigma\rho)}(t) \equiv \forall x(F_\sigma(x) \supset F_\rho(tx))$ とするとき，各type τに対し$F_\tau(t)$に相当するformulaがtのtype τなることを表現する．そこで$\tilde{T}$にはZと，Zに対応した公理を置いてtypeの概念を導入し，term自体にはtypeの区別を設けない．その結果termは一般に一定形式の様々なtypeを同時にもつことになる．inductionの消去はZを2階述語論理の表現に翻訳して行う．inductionとtypeの概念はこれで同時に消えさる。

Functionalの計算可能性に関する諸研究をみると，termの書きかえに焦点を合せているものが多い．functionalはその書きかえ規則とみられ，単純な要素に分解されていることとこれらの要素の数が少ないことが要求される．combinator

や abstruction operator が好んで用いられるのはそれ故であろう。これに対しわれわれは equation がどのように変形され結びつけられて行くのか，つまり equation の deduction に焦点を合わせ，さらには deduction の書きかえに焦点を合わせる．functional の導入に defining equation によるごく普通の方法がとれることがわれわれの方法の利点である．われわれの主題である無矛盾性，即ち計算結果の一意性は，このような defining equation からの deduction が，むだのない形にいつでも書きなおせること（Normalization theorem）を用いて示される．通常一意性証明に用いられる Church-Rosser の方法に代る一方法である。

1. Equational calculus EXTAS$^+$S$^-$(PR)

1.1. Term： variable, individual constant, これらから2つの operator：successor $'$ と application ( )，を用いて帰納的に構成されたもの．即ち (1) t：term $\Rightarrow t'$ は Term (2) t, u：Terms $\Rightarrow (tu)$ は term．ここに individual constant は，(1) 0 (zero)，S，O_n，P^n_i，S_{mn}（ただし $m, n \geqq 1$，$1 \leqq i \leqq n$） (2) θ_1, θ_2 が ind. const. $\Rightarrow C_{\theta_1\theta_2}, R_{\theta_1\theta_2}$ もそれぞれ ind. const.，によって帰納的に構成されるものとする．

1.2. formula： $t = u$ の形のみ．t, u は任意の term．

1.3. 規約： θ は ind. const. を，p は ind. const. 又は variable を表わす．$t^{(n)}$ は t に successor を n 個付けたものを表わす．

$(\cdots((tu_1)u_2)\cdots u_n)$ $(n\geqq 1)$ を $tu_1u_2\cdots u_n$, $t(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $t\bar{u}$ などと表わし, $t(u_1\bar{v},u_2\bar{v},\cdots,u_n\bar{v})$ をさらに $t(\bar{u}\bar{v})$ と表わす. F, G, H は formula を表わし F が $t=u$ のとき F' は $t'=u'$ を表わす。

1.4. *axiom schemas*.

E-axiom: $p=p$

PR-axiom: PR1 $P_i^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)=t_i$

PR2 $S_{mn}(t,u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_n)=t(\bar{u}\bar{v})$

PR3 $C_{\theta_1\theta_2}=\theta_1\theta_2$

PR4 $O_n(t_1,t_2,\cdots,t_n)=0$

PR5 $St=t'$

PR6a $R_{\theta_1\theta_2}0=\theta_1$

PR6b $R_{\theta_1\theta_2}t'=\theta_2(R_{\theta_1\theta_2}t,t)$

これだけで充分なのだが対称性を与えて記述を容易にするために, 上記の PR-axiom を左型とよび両辺を入換えた右型を追加しておく. 左型の左辺, 右型の右辺を <u>defined term</u> とよぶ。

1.5. *deduction rule の schemas*.

X-rule $\dfrac{t=u}{u=t}$

T-rule $\dfrac{t_0=t_1\quad t_1=t_2\cdots\quad t_{n-1}=t_n}{t_0=t_n}$ $(n\geqq 2)$

A-rule $\dfrac{t_1=u_1\quad t_2=u_2\cdots\quad t_n=u_n}{t_1t_2\cdots t_n=u_1u_2\cdots u_n}$ $(n\geqq 2)$

S-rules: S^+-rule $\dfrac{t=u}{t'=u'}$, S^--rule $\dfrac{t'=u'}{t=u}$.

各 rule の上式を premiss，下式を conclusion という．特に A-rule の上式のうち一番左のものを A-major premiss とよぶ．

1.6. deduction とは有限個の deduction rule からなる tree form で各枝の先端は axiom であるものをいう．一般に $\mathbb{D}$ で deduction を表わす．終式が F である $\mathbb{D}$ を $\mathbb{D}|F$ とも表わし，F に至る $\mathbb{D}$ という．$\mathbb{D}|F$ が存在するとき F は deducible という．

$\mathbb{D}$ 中に X-rule が含まれないとき $\mathbb{D}$ は X-normal であるということにすれば，任意の $\mathbb{D}|F$ は X-normal な $\mathbb{D}'|F$ に書きかえることができるので以下では $\mathbb{D}$ はすべて X-normal と仮定しておくが，一般性を失わない．

2. $\mathbb{D}$ の構造に関する定義

2.1. '$\mathbb{D}$ 中 F が G の祖先[子孫]である' は普通のように定義されているものとする．F が G の S-祖先[子孫]，T-祖先[子孫]，A-祖先[子孫]とは F が G の祖先[子孫]であって，それぞれ F と G の間に，T-rule も A-rule も現われない場合，T-rule が少くとも1回現れるが A-rule が現れない場合，A-rule が少くとも1回現れるが T-rule が現れない場合をいう．特に F は F 自身の S-祖先かつ S-子孫ということにしておく．

2.2. $\mathbb{D}$ 中 F が T-knot であるとは，F が T-conclusion でありそれがいかなる T-premiss の S-祖先でもない場合をいう．$\mathbb{D}$ 中 F が A-knot であるとは，F が A-conclusion でありかつそれが

いかなるA-major premissのS-祖先でもない場合をいう.

2.3. $\mathfrak{D}$中FがGの*T-source*であるとは, FがGのT-祖先でありかつFがaxiom又はA-knotであることをいう. $\mathfrak{D}$中FがGの*A-source*であるとは, FがGのA-祖先であり, FがaxiomかT-knotかA-knotであって, FとGの間に他のA-knotがない場合をいう. Fがさらに A-major premissのS-祖先であるとき, FはGの*A-major source*であるという.

2.4. G, H をある共通のFの二つのT-sources とするとき, Gの子孫とHの子孫にそれぞれあたる2つのformulasを共に上式として含むようなT-ruleが必ずちょうど一つ存在するから, それら子孫の間の左右位置関係をそのままGとHの間の左右位置関係と定義すれば, FのT-source全体はこの順序関係により列をなす. この列を*FのT-source sequence*といい $\mathfrak{S}_F$ で表わす. Fに注目しないときは単に*T-source sequence*といい $\mathfrak{S}$ で表わす. $\mathfrak{S}$ の長さを $l\mathfrak{S}$ で表わす.

2.5. $\mathfrak{S}$ 中のformulasを左から順に $F_1, F_2, \cdots, F_n$ とする. $\mathfrak{S}$ が*normal*であるとは, $\mathfrak{S}$ 中にN1を満す F_i も, N2aやN2bを満す F_i, F_{i+1} も, N3を満す F_{i-1}, F_i, F_{i+1} も存在しないことをいう. $\mathfrak{S}$ が*strongly normal*であるとは上の条件中N3をN3*でおきかえた場合をいう.

N1　F_i が $t=t$ の形である.

N2a　F_i, F_{i+1}が共にA-knotである.

N2b　F_i, F_{i+1}が共にPR-axiomで, F_iの右辺, F_{i+1}の左辺が共にdefined termである.

N3　F_{i-1}, F_i, F_{i+1}においてF_iがA-knotでそのA-major sourceがE-axiomであり, F_{i-1}, F_{i+1}が共にPR-axiomでF_{i-1}の右辺, F_{i+1}の左辺が共にdefined termである.

N3*　F_{i-1}, F_i, F_{i+1}においてF_iがA-knot, F_{i-1}, F_{i+1}が共にPR-axiomでF_{i-1}の右辺, F_{i+1}の左辺が共にdefined termである.

$\mathbb{D}$中すべての$\mathfrak{S}$がnormal [strongly normal]であるとき, $\mathbb{D}$は<u>normal</u> [<u>strongly normal</u>]であるという. $\mathbb{D}|F$はそれをnormalなdeduction $\mathbb{D}'|F$に書きなおせるとき<u>normalizable</u>であるという.

3. EXTAS$^+$S$^-$(PR)に関する定理

定理1. $\mathfrak{S}_F$がstrongly normal $\Rightarrow$ Fは$t'=0$や$0=t'$でない.

定理2. $\mathbb{D}$がnormal $\Rightarrow$ $\mathbb{D}$はstrongly normal.

定理3. (Normalization Theorem) $\mathbb{D}$はnormalizable.

以上の結果として,

定理4. $t'=0$や$0=t'$はEXTAS$^+$S$^-$(PR)でdeducibleではない.

4. 定理の証明に用いられるPR-axiomの性質など

4.1.　一般にtは$(\cdots((p^{(k_0)}t_1)^{(k_1)}t_2)^{(k_2)}\cdots t_n)^{(k_n)}$の形をしているといえる. ただし$n\geq 0, k_i\geq 0$. このような表わし方は一意的

であり，n を $\underline{dep\,t}$ で，$p^{(k_0)}$ を $\underline{ker\,t}$ で表わし，それぞれ t の $\underline{深さ}$，t の $\underline{核}$ という．$\sum_{i=0}^{n} k_i$ を $\underline{\# t}$ で表わす．$dep\,t=0$ で p が 0 又は variable のとき t は $\underline{\text{numerical term}}$ とよばれる．

4.2. t を defined term，u を他辺とする PR-axiom に於て，

PT1. $ker\,t$ は numerical term ではない．

PT2. $\# t=0$． したがって $\# t \leqq \# u$．

t_i を defined term，u_i を対応する他の辺とする2つの PR-axioms $(i=1,2)$ において，

PT3. $ker\,t_1$ と $ker\,t_2$ が同一ならば $dep\,t_1=dep\,t_2$．

PT4. t_1 と t_2 が同一ならば u_1 と u_2 も同一である．

PT5. $ker\,t_1$ と $ker\,t_2$ が同一ならば PT2, PT3 より t_i はそれぞれ $\theta t_{i1} t_{i2} \cdots t_{in}$ と仮定してよいが，この場合は，θ が $R_{\theta_1\theta_2}$ の形の時を別にすれば次の性質がなりたつ「$t_{1j}=t_{2j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ がすべて deducible ならば $u_1=u_2$ も deducible」．θ が $R_{\theta_1\theta_2}$ の形の時には axiom schema が2通りあるが，問題の PR-axiom が両方ともどちらか一方の axiom schema に従っている場合には上記の性質が成りたつ．残るのは t_i の一方が $R_{\theta_1\theta_2}0$ 他方が $R_{\theta_1\theta_2}u'$ の形をしている場合であり，上記の性質の仮定が「$0=u'$ [又は $u'=0$] が deducible」となる場合である．

5. 定理1,2の証明

5.1. 定理1の証明には PT1, PT2 と次の補題1を用いる．

補題1. $\mathfrak{S}$をstrongly normalとする．Fが$\mathfrak{S}$中のPR-axiomでその左[右]辺がdefined termであれば，$\mathfrak{S}$中Fより左[右]にあるPR-axiomはすべてその左[右]辺がdefined termである．

5.2. 定理2の証明は$\mathbb{D}$中のT-knotの数に関する帰納法により，次の補題2.とPT3を用いる．

補題2. $\mathbb{D}$がstrongly normalならば$\mathbb{D}$中どのT-knot Fをとっても，その両辺の核の少くとも一方はFの祖先において，PR-axiomのdefined termの核として現われる．

[証明] $\mathbb{D}$中のT-knotの数に関する帰納法による．補題1とPT3を用いる．

6. 定理3の証明

6.1. $\mathbb{D}$のdegree, $\underline{\deg \mathbb{D}}$は$\mathbb{D}$の終式の$\mathbb{D}$におけるdegreeとする．Fの$\mathbb{D}$におけるdegree, $\deg F$は次のように定義される．

(1) Fがaxiomの時，$\deg F = 0$

(2) $T\ \dfrac{F_1, \cdots F_n}{F}$の時，$\deg F = (\deg F_1)^* + \cdots + (\deg F_n)^*$.

ただし $(\deg F_i)^* = \begin{cases} \deg F_i & F_i\text{がT-conclusionのS-子孫の時.} \\ \deg F_i + 1 & \text{それ以外} \end{cases}$

(3) $A\ \dfrac{F_1 F_2 \cdots F_n}{F}$の時，$\deg F = \max\{(\deg F_1)^*, \deg F_2, \cdots, \deg F_n\}$.

ただし $(\deg F_1)^* = \begin{cases} \deg F_1 & F_1\text{がA-conclusionのS-子孫の時.} \\ \deg F_1 + 1 & \text{それ以外} \end{cases}$

(4) $S\ \dfrac{G}{F}$の時，$\deg F = \deg G$.

6.2、 $\mathbb{D}|F$ において F が T-conclusion の S-子孫である時，$\mathbb{D}$ は <u>T-end</u> であるといい，$\mathfrak{S}_F$ を <u>$\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$</u> と表わす．<u>$l_T\mathbb{D}$</u> の定義は：

$$l_T\mathbb{D}=\begin{cases} l\mathfrak{S}_{\mathbb{D}} & \mathbb{D}\text{ が T-end の時} \quad (\text{この時 } l\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}\geqq 2) \\ 1 & \text{そうでない時.}\end{cases}$$

6.3、 $\mathfrak{S}_F$ と F とにはさまれた $\mathbb{D}$ の部分を F の <u>T-scope</u> とよぶ．T-scope はそこに現われるどの T-rule の上にも S^--rule がなくどの T-rule の下にも S^+-rule がない時，<u>normal</u> といい，そこに現われる T-rule がただ一つの時 <u>simple</u> という．

補題3. F も $\mathfrak{S}_F$ も deg F も変えないで F の T-scope を normal かつ simple に書きなおすことができる。

証明は略す．まず normal にすることを考えればよい．

6.4、 次のような場合に分けて $\mathbb{D}$ の normalizability を考える．

$$\deg\mathbb{D}\leqq 1 \qquad\qquad (\mathrm{I})$$

$$\deg\mathbb{D}\geqq 2\begin{cases} \left.\begin{array}{l} l_T\mathbb{D}=1 \\ l_T\mathbb{D}\geqq 2\ \{\ \mathfrak{S}_{\mathbb{D}}\text{ が normal}\end{array}\right\}(\mathrm{II}) \\ \qquad\quad\ \ \mathfrak{S}_{\mathbb{D}}\text{ が normal でない} \quad (\mathrm{III})\end{cases}$$

(I)の場合 $\mathbb{D}$ は normal. (II)の場合 $\mathbb{D}|F$ の normalizability は F の A-sources 又は T-sources に至る各部分 $\mathbb{D}_i$ のそれに帰着、ここに $\deg\mathbb{D}_i<\deg\mathbb{D}$. (III)の場合次にみるようにある特殊な場合を除けば $\mathbb{D}|F$ はある形 $\mathbb{D}^*|F$ に書きなおし得る．すなわち $\mathbb{D}$ の normalizability は $\mathbb{D}^*$ のそれに帰着する．ここに $\deg\mathbb{D}^*<\deg\mathbb{D}$,

あるいは $\deg \mathbb{D}^* \leqq \deg \mathbb{D}$ かつ $l_T \mathbb{D}^* < l_T \mathbb{D}$. しかも，実は今除外したような場合は，$\deg \mathbb{D}' < \deg \mathbb{D}$ なる $\mathbb{D}'$ がすべて normalizable であるという仮定のもとでは起り得ないのである．これは定理1,2により保証される．以上(I)(II)(III)の各場合の考察を合せ考えれば，$\deg \mathbb{D}$ と $l_T \mathbb{D}$ に関する二重帰納法により $\mathbb{D}$ の normalizability を得ることを知る．あと証明すべきは唯次のみ．

補題4. $l_T \mathbb{D} \geqq 2$ で $\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$ が normal でなく次の条件Cを満たす $\mathbb{D}|F$ は関係 $R(\mathbb{D}, \mathbb{D}^*)$ をみたす $\mathbb{D}^*|F$ に書きなおせる．

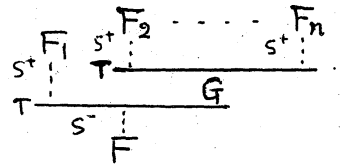
C: $\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$ 中の F は $t'=0$ や $0=t'$ の形の A-source をもたない．

$R(\mathbb{D}, \mathbb{D}^*)$: $\deg \mathbb{D}^* < \deg \mathbb{D}$, あるいは $\deg \mathbb{D}^* \leqq \deg \mathbb{D}$ かつ $l_T \mathbb{D}^* < l_T \mathbb{D}$.

[証明] $l_T \mathbb{D}$ に関する帰納法を用いる．[I]: Base, [II]: Induction Step.

[I] $l_T \mathbb{D} = 2$ で $\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$ が，(1) N1を満すFを含む，(2) N2a を満す，(3) N2b を満す，各場合と，(4) $l_T \mathbb{D} = 3$ で $\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$ がN3を満す場合．それぞれ $\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$ を消去するような常識的な書きなおしをすればよい．(3)には PR-axiom の性質 PT4 が，(4)には PT5 が関係する．CはPT5 の例外が起らないことを保証する．書きなおした結果の $\mathbb{D}^*$ が $R(\mathbb{D}, \mathbb{D}^*)$ を満すことはそれぞれの場合に確めればよい．

[II] 上の(1)−(4)以外の場合．$\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$ を $F_1, F_2, \cdots, F_n$ とする．左右対称性および補題3を考慮すれば $\mathbb{D}$ の終式 F の T-scope が次のような場合を考えれば十分といえる．



$\mathfrak{S}_G$: $F_2, \cdots, F_n$ は normal でない.

この場合 G に至る部分 deduction $\mathfrak{D}_0$ は補題の各条件を満し, $l_T \mathfrak{D}_0 < l_T \mathfrak{D}$. よって帰納法の仮定により $\mathfrak{D}_0 | G$ は $\mathfrak{D}_0^* | G$ に書きなおすことができて $R(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0^*)$ をみたす。この書きなおしにより $\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{D}^*$ になったとすればあきらかに $R(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*)$ が成立する。終.

6.5. Remark. 必要不可欠な rule ではないが abstruction や extensionality に相当する次の B-rule を $EXTAS^+S^-(PR)$ に追加した時も同様の結論を得るであろうか.

B-rule $\dfrac{ta=ua}{t=u}$ ただし a は t, u に含まれない variable.

この問題を考えてみると, type の区別に関連した制限がわれわれの system にないことからくる困難に出会う. 例えば B-rule のあとに S-rule が続く場合など, そういう制限が十分にあれば起り得ないことである. このような考察は別の機会にゆずるが, $\tilde{T}$ の無矛盾性証明のためだけならばわれわれの system で十分まにあう.

7. $\tilde{T}$ の定義

7.1. 公理は $EXTAS^+S^-(PR)$ に対応する $\overline{E}, \overline{P}, \overline{PR}$ と, Z に関する $\overline{Z}$.

$\overline{E}$: $\begin{cases} \text{E1, E2, E3 即ち } \forall x(x=x),\ \forall x\forall y(x=y \supset y=x),\ \forall x\forall y\forall z(x=y \,\&\, y=z \supset x=z) \\ \text{EA, ES 即ち } \forall x_1\forall x_2\forall y_1\forall y_2(x_1=x_2 \,\&\, y_1=y_2 \supset (x_1 y_1)=(x_2 y_2)),\ \forall x\forall y(x=y \supset x'=y') \end{cases}$

$\overline{P}$: P3 P4 即ち $\forall x\forall y(x'=y' \supset x=y)$, $\forall x \neg(x'=0)$

$\overline{PR}$: EXTAS$^+$S$^-$(PR) の各 PR-axiom に対応する ∀-prenex closed form

$\overline{Z}$: Z0, ZS, ZE 即ち $Z(0), \forall x(Z(x) \supset Z(x')), \forall x \forall y(x=y \,\&\, Z(x). \supset Z(y))$

7.2、論理系は LK に次の形の Grundsequenz を許したもの, LK$^{\mathrm{I}}$.

$\mathfrak{A}(0), \forall x(\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(x')), Z(t) \to \mathfrak{A}(t)$　　($\mathfrak{A}(x)$ は任意の formula)

8. $\tilde{T}$の無矛盾性

定理5. $\tilde{T}$は無矛盾である.

[証明] $\tilde{T}$が矛盾していると仮定して定理4に反することを示す。証明を次の三段階に分けよう.

[I] $LK^{\mathrm{I}} \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR}, \overline{Z} \to \quad \Rightarrow LK \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR} \to$

[II] $LK \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR} \to \quad \Rightarrow$ ある t に対し $LK \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR} \to t'=0$

[III] $LK \vdash \overline{E}, P3, \overline{PR} \to t'=0 \;\Rightarrow\;$ EXTAS$^+$S$^-$(PR) $\vdash t'=0$

[I] $Z(*)$ を全て $\forall\varphi[\varphi(0) \,\&\, \forall x(\varphi(x) \supset \varphi(x')). \supset \exists y(y=* \,\&\, \varphi(y))]$ に書きかえる操作を formula $\mathfrak{A}$ に施した結果を $\mathfrak{A}^{\circ}$ と表わせば, $\mathfrak{A}^{\circ}$ は, 2階の quantification を1階の formula にしか施さないよう制限した G^{1}LC (G^{1}LC* と表す) の formula であり, 次が確められる.

補題5. $\mathfrak{A}(0)^{\circ}, \forall x(\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(x'))^{\circ}, Z(t)^{\circ}, \overline{E} \to \mathfrak{A}(t)^{\circ}$ は G^{1}LC*で証明可能.

補題6. (1) $E1 \to Z0^{\circ}$, (2) $ES \to ZS^{\circ}$, (3) $E3 \to ZE^{\circ}$ は G^{1}LC*で証明可能.

したがって Γ, Θ を Z を含まない formula の列とすれば, $LK^{\mathrm{I}} \vdash \Gamma, \overline{Z} \to \Theta$ より $G^1LC^* \vdash \Gamma, \overline{Z}^{\circ}, \overline{E} \to \Theta$ さらに $G^1LC^* \vdash \Gamma, \overline{E} \to \Theta$.
ここで G^{1}LC*の cut elimination theorem を用いて $LK \vdash \Gamma, \overline{E} \to \Theta$.

[II] 仮定より明らかに $LK \vdash \overline{E}, P3, \overline{PR} \to \exists x(x'=0)$. ここで LK に対

する verschärfte Hauptsatz と次の補題を考慮すればよい.

補題7. ∨左, ⊃右, ¬右 の推論図を含まない LK の証明図は終式を変えないで次のような LK の証明図 $\mathbb{P}$ に書きなおせる. 即ち $\mathbb{P}$ においては Verdünnung右, Vertauschung右 の下式を除けば Sequenz の右辺は formula を高々一つしか含まない.

[Ⅲ] 仮定より $NK(\overline{E}, P3, \overline{PR}) \vdash t'=0$. 一方 $\overline{E}, P3, \overline{PR}$ はすべて, NK に $EXTAS^{+}S^{-}(PR)$ をつけ加えた体系 $NK(EXTAS^{+}S^{-}(PR))$ で証明可能. したがって $NK(EXTAS^{+}S^{-}(PR)) \vdash t'=0$. ここで LK の Hauptsatz に相当する Prawitz 70 の Normalization theorem を用いれば, このような証明図から論理記号に関する推論を含まぬ $t'=0$ に至る証明図を得ることができる. そのような証明図は実は $EXTAS^{+}S^{-}(PR)$ における $t'=0$ に至る deduction である. 定理4 と矛盾. 終.

Remark. $\tilde{\top}$ には type に関するきびしい制限を置かなかったので type をもたない term を含み, またそれらを含んだ命題が証明される. 制限を加えて証明力を小さくすればなおさら無矛盾になる.

文　献

K. Gödel (1958) Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica 12, 280–287

Y. Hanatani (1966) Calculabilité des Fonctionnelles Récursives Primitives de Type Fini sur les Nombres Naturels, Ann. of the Japan Assoc. for Philo. of Sci., vol 3, No 1, 19–30

D. Prawitz (1970) Ideas and results in proof theory, Proc. of the Second Scandinavian Logic Symposium (North-Holland 1971), 235–307

G. Takeuti (1955) On the fundamental conjecture of GLC I. Journal of the Math. Soc. of Japan, vol. 7, No. 3, 249–275