数理解析研究所講究録
第182巻 1973年 141-155

Limits of discrete series for the Lorentz groups

阪大 基礎工 米山俊昭

§0. 序.

Bargmann [1] によれば, $G = SU(1,1)$ の discrete series は, 複素平面における単位円板 $X = \{x \in \mathbb{C};\ |x| < 1\}$ 上の正則関数の作る Hilbert 空間上で, 次の様に構成される. $d\mu(x)$ を X 上の Euclidean measure とし, H を X 上の正則関数 f で,

$$(0.1) \qquad \|f\|^2 = \frac{n-1}{\pi}\int_X |f(x)|^2 (1-|x|^2)^{n-2} d\mu(x) < +\infty$$

なるものによって生成される Hilbert 空間とする. G の H 上の action $T_g(n)$ を,

$$(0.2) \qquad T_g(n) f(x) = (\bar{a} + \bar{b}x)^{-n} f\left(\frac{ax+b}{\bar{b}x+\bar{a}}\right)$$

によって定義する. ただし, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in G$, $n \geq 2$.
このとき, 表現 $T(n)$ は G の discrete series に属する.

$n = 1$ の場合にも, G の action を (0.2) で定義し, norm を

$$(0.3) \qquad \|f\|^2 = \lim_{n \downarrow 1} \frac{n-1}{\pi}\int_X |f(x)|^2 (1-|x|^2)^{n-2} d\mu(x)$$

におきかえることによって, G の既約 unitary 表現が得られ

る．この表現は discrete series には属さない．これを discrete series の limit と呼ぶ．

一方，G の principal series は，X の boundary $U=\{u\in\mathbb{C};\ |u|=1\}$ 上の関数の作る Hilbert 空間上で，構成される．このとき，H からその空間への boundary value imbedding が定義され，それによって，discrete series の limit が principal series に imbed されることが知られている．

高橋［6］は，上と同様な discrete series の limit を De Sitter 群に対して構成している．ここでは，一般の Lorentz 群に対して，discrete series の limits が構成され，またそれらが，principal series に imbed されることを示す．

Knapp and Okamoto［4］は，同様なことを，holomorphic discrete series に対して論じている．

§1．準備．

Lorentz 群 $SO_e(n,1)$ の universal covering group $Spin(n,1)$ は，高橋［7］によれば，以下の様に Clifford algebra に係数を持つ 2×2 の行列より成る群として実現される．

E_n を n 次元実ベクトル空間で positive definite な 2 次形式 Q を持つものとする．ただし，Q は次式によって定義される．$\{e_1,\cdots,e_n\}$ を E_n の base とするとき，

$$(1.1)\qquad Q(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=x_1^2+\cdots+x_n^2\quad (x_i\in\mathbb{R}).$$

$T(E_n)$ を E_n の tensor algebra とし, $I(Q)$ を $x\otimes x+Q(x).1$ $(x\in E_n)$ の形の元より生成される $T(E_n)$ の ideal とする. Clifford algebra C_n は $C_n=T(E_n)/I(Q)$ として定義される. このとき, 自然な写像 $E_n\hookrightarrow T(E_n)\hookrightarrow C_n$ は一対一である. そこで E_n を C_n の部分空間と考えると, $\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_p};\ 1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_p\leqq n\}$ が C_n の base となり, また

$$(1.2)\qquad e_i^2=-1,\quad e_ie_j+e_je_i=0\quad (i\neq j)$$

となる.

$x_1,x_2,\cdots,x_n\in E_n$ のとき, $x_1x_2\cdots x_p\longmapsto(-1)^px_1\cdots x_p$ によって与えられる C_n の自己同型を $x\longmapsto x'$ と書く. 同じように $x_1x_2\cdots x_p\longmapsto x_p\cdots x_2x_1$ によって与えられる C_n の自己歪同型を $x\longmapsto {}^tx$ と書く. さらに $\bar{x}={}^t(x')=({}^tx)'$ と書くことにする. $V_n=\mathbb{R}.1+E_n$ とおき,

$$T_n=\{a\in C_n;\ \forall x\in E_n,\ \exists y\in V_n;\ ax=ya'\}$$

とおく. このとき, $a\in T_n$ ならば, $a\bar{a}$ は負でない実数であって, a の norm を $|a|=(a\bar{a})^{1/2}$ によって定義する. $T_n^{\circ}=\{a\in T_n;\ |a|=1\}$ とおくと T_n° は積に関して群をなし, $Spin(n+1)$ と同型である. 一方 $Spin(n)$ は $SO(n)$ の double covering であって, その covering map τ は, $a\in Spin(n)$ のとき $\tau(a)$ を $x\longmapsto axa'^{-1}$ $(x\in V_n)$ によって定義される V_n 上の変換

として与えられる．さらに，$n \geqq 3$ のとき，$Spin(n)$ は単連結である．

G を行列 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix}$ で

(1.3) $\quad a, b \in T_{n-1}, \quad b\bar{a}' \in V_{n-1}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1$

を満足するものの全体とすると，G は群をなし，$n \geqq 3$ のとき $Spin(n, 1)$ と同型である．$n = 2$ のときは，$SU(1, 1)$ と同型である．K を $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix}$ $(k \in T_{n-1}^{\circ})$ の形の元よりなる G の部分群とすると，K は $Spin(n)$ と同型であって，G の maximal compact 部分群である．以後，$k \in K$, $k \in Spin(n)$, $k \in T_{n-1}^{\circ}$ を同一視し，$k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix}$ とかくことがある．

G の岩沢分解 $G = KAN$ は次の様に与えられる．

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} ch\, t/2 & sh\, t/2 \\ sh\, t/2 & ch\, t/2 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ z = \begin{pmatrix} 1 - z/2 & z/2 \\ -z/2 & 1 + z/2 \end{pmatrix} ; z \in E_{n-1} \right\}$$

(1.4) $$\begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch\, t/2 & sh\, t/2 \\ sh\, t/2 & ch\, t/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - z/2 & z/2 \\ -z/2 & 1 + z/2 \end{pmatrix},$$

ここに，$k = (a+b)/|a+b|$, $\quad e^{t/2} = |a+b|$,

$$z = (\bar{a}b - \bar{b}a)/|a+b|^2 ,$$

§ 2. Principal series.

U, X をそれぞれ $|x| = 1$, $|x| < 1$ なる $x \in V_{n-1}$ のなす空間とすると，G は左から U 及び X に次の様に作用する．

(2.1) $$g\cdot x = (ax+b)(b'x+a')^{-1}$$

ただし，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$，$x \in U$ または X.

M を A の K における centralizer とする．M は $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ $(m = m' \in Spin(n))$ の形の元よりなる．さらに M は $Spin(n-1)$ と同型である．$(K/M)^* = K/M - \{kM ; k+k'=0\}$，$U^* = U - \{-1\}$ とおき，$p: K \to U$ を $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \longmapsto k\bar{k'}$ によって定義すると，p は $(K/M)^*$ と U^* の同型を与える．岩沢分解によって，p を G まで拡張すると，$\begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \longmapsto (a+b)(b'+a')^{-1}$ となる．一方 $s: U^* \to K$ を

(2.2) $$s(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+u}{|1+u|} & 0 \\ 0 & \dfrac{1+\bar{u}}{|1+u|} \end{pmatrix}$$

によって定義すると，すべての $u \in U^*$ に対して，$p(s(u)) = u$ となる．さらに，ある低次元の集合を除いて，すべての G の元 g が，$g = s(p(g))\, m(g)\, a_{t(g)}\, z$ $(m(g) \in M,\ a_{t(g)} \in A,\ z \in N)$ の形に一意的に分解される．また，$p(g\, s(u)) = g\cdot u$ となることより，

(2.3) $$g\, s(u) = s(g\cdot u)\, m(g,u)\, a_{t(g,u)}\, z \qquad (m(g,u) \in M,\ a_{t(g,u)} \in A,\ z \in N)$$

を得る．詳しく書くと，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$，$u \in U$ に対して，

$$e^{t(g,u)} = |au+b|^2 = |b'u+a'|^2,$$

$$m(g,u) = \frac{(a+b')(1+u) + (b+a')(1+\bar{u})}{|(a+b')(1+u) + (b+a')(1+\bar{u})|}$$

となる．

補題 2.1. $d\mu(u)$ を U 上の K-不変 measure で $\int_U d\mu(u)=1$ となるものとする．このとき，

(2.5) $$d\mu(g\cdot u) = e^{(n-1)t(g,u)}d\mu(u),$$

となり，$e^{t(g,u)}$ と $m(g,u)$ は multiplier である．

M が $Spin(n-1)$ と同型であることより，すべての M の既約 unitary 表現は次の様な整数列又は半整数列 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1})$ によってparametrize される．

$n=2m+1$ のとき， $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_{m-2}\geqq|\lambda_{m-1}|$

$n=2m$ のとき， $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_{m-2}\geqq\lambda_{m-1}\geqq 0,$

(cf. [2])．

G の principal series の表現は，次の様に構成される．λ を上のような整数列（又は半整数列）とし，それに対応する M の既約 unitary 表現を σ^λ とする．$\mathcal{H}(\lambda)$ を U 上で定義され，σ^λ の表現空間 V^λ に値をとる関数 f で，

(2.6) $$\|f\|^2=\int_U\|f(u)\|^2_{V^\lambda}\,d\mu(u)<+\infty$$

となるものより成る Hilbert 空間とする．ただし，$\|\ \|_{V^\lambda}$ は V^λ における norm を表わす．$g\in G$ に対して，$\mathcal{H}(\lambda)$ 上の作用素 $U_g(\lambda,s)$ $(s\in\mathbb{C})$ を，

(2.7) $$U_g(\lambda,s)f(u)=e^{-st(g^{-1},u)}\sigma^\lambda(m(g^{-1},u))^{-1}f(g^{-1}\cdot u)\quad(f\in\mathcal{H}(\lambda))$$

によって定義すると，$g\longrightarrow U_g(\lambda,s)$ は G の強連続な表現であって，$\mathrm{Re}(s)=\frac{n-1}{2}$ ならば，unitary である．さらに，

$U_g(\lambda, \frac{n-1}{2}+i\nu)$ は G の principal series の表現である．この表現の既約性に関して，次の事が知られている [5]，

$n=2m+1$ のとき，$U(\lambda, \frac{n-1}{2}+i\nu)$ はすべて既約である．

$n=2m$ のとき，λ が半整数列で，$\nu=0$ の場合を除いて，$U(\lambda, \frac{n-1}{2}+i\nu)$ はすべて既約である．

§ 3. Discrete series.

$n=2m$ のとき，かつそのときにかぎり G は discrete series を持つ．そこで以後は $n=2m$ を仮定する．G は空間 $X=\{x \in V_{n-1} ; |x|<1\}$ にたから作用する．$p_0 : G \to X$ を $\begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \mapsto ba'^{-1}$ によって定義すると，p_0 は G/K から X の上への同型に拡張される．さらに，$s_0 : X \to G$

(3.1) $$s_0(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t/2 & x\, \mathrm{ch}\, t/2 \\ \bar{x}\, \mathrm{ch}\, t/2 & \mathrm{ch}\, t/2 \end{pmatrix}$$

(ただし，$\mathrm{th}\, t/2 = |x|$，$t \geq 0$)，によって定義するとき，すべての $x \in X$ に対して，$p_0(s_0(x)) = x$ となる．したがって，すべての $g \in G$ が次の様に一意的に分解される．

(3.2) $$g = s_0(x)\, k(g) \qquad (x = p_0(g),\ k(g) \in K).$$

一方，$p_0(g\, s_0(x)) = g \cdot x$ より，$g\, s(x)$ は (3.2) によって，

(3.3) $$g\, s_0(x) = s_0(g \cdot x)\, k(g, x) \qquad (k(g, x) \in K)$$

と一意的に分解される．$k(g, x)$ は，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$，$x \in X$ に対して，

(3.4) $$k(g,x)=\frac{a+bx}{|a+bx|}$$

となる。($k\in K$ と $k\in T^{\circ}_{2m-1}=Spin(2m)$ を同一視した。)

補題 3.1. $d\mu(x)$ を X 上の Euclidean measure とすると、$(1-|x|^2)^{-2m}d\mu(x)$ は X 上の G-不変な measure であって、

(3.5) $$\int_G f(g)\,dg=c\int_X\int_K f(s_0(x)k)(1-|x|^2)^{-2m}d\mu(x)\,dk,$$

ただし、$x=p_0(g)$, c はある正の定数とする。

$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1},\lambda_m)$ を $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_{m-1}\geqq|\lambda_m|$ となる、整数列(または半整数列)$\geqq m$, それに対応する K の既約 unitary 表現を σ^λ とし、その表現空間を V^λ とする。(K は $Spin(2m)$ と同型である)。ν を整数(または半整数)とし、$H_1(\lambda,\nu)$ を次の条件を満足する函数 $f: X\to V^\lambda$ のなす Hilbert 空間とする。

(3.6) $$\|f\|^2=c\int_X\|f(x)\|^2_{V^\lambda}(1-|x|^2)^{2\nu-2m}d\mu(x)<+\infty$$

(ただし、c は正の定数)

$$\int_X(1-|x|^2)^{2\nu-2m}d\mu(x)=\frac{\pi^m\Gamma(2\nu-2m+1)}{\Gamma(2\nu-m+1)}$$

であるから、有界な函数 $\in H_1(\lambda,\nu)$ であって、$H_1(\lambda,\nu)\neq 0$.

G の $H_1(\lambda,\nu)$ 上の unitary 表現 $g\longrightarrow T_g(\lambda,\nu)$ を、

(3.7) $$T_g(\lambda,\nu)f(x)=|b'x+a'|^{-2\nu}\sigma^\lambda(k(g^{-1},x))^{-1}f(g^{-1}\cdot x)$$
$$(f\in H_1(\lambda,\nu))$$

ただし、$g^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\b'&a'\end{pmatrix}$,

によって定義する．

$H_0(\lambda,\nu)$ を C^∞ 関数よりなる $H_1(\lambda,\nu)$ の部分空間とし，Ω を G の Casimir 作用素とする．このとき，$H_0(\lambda,\nu)$ 上において，$T_\Omega(\lambda,\nu)$ を考えることができる．G は $SO_e(2m,1)$ と局所同型であるから，$SO_e(2m,1)$ と G の Lie algebra を同一視する．[6] の記号を用いて，

$$T_\Omega(\lambda,\nu) = \sum_{1\leq i,j\leq 2m} T_{X_{ij}}(\lambda,\nu)^2 - \sum_{1\leq i\leq 2m} T_{Y_i}(\lambda,\nu)^2$$

と書ける．さらに [6] と同様な方法によって，

$$(3.8)\quad -T_\Omega(\lambda,\nu)f = [\,(1-|x|^2)\{\frac{1-|x|^2}{4}\Delta + (m-\nu-1)D + \sum_{i,j} x_j\sigma^\lambda(X_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i}\} + \sum_{i,j,k} x_j x_k \sigma^\lambda(X_{ij})\sigma^\lambda(X_{ik}) - \sum_{i<j}\sigma^\lambda(X_{ij})^2 + \nu(\nu+m+1)|x|^2 - m\nu\,]\,f$$

が示される．ただし，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{2m}^2}$，$D = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_{2m}\frac{\partial}{\partial x_{2m}}$

$X_{ii}=0$，$X_{ij}+X_{ji}=0$ $(i\neq j)$．

[6] と同様な方法で，G の discrete series の表現を構成するためには，もう少し $T_\Omega(\lambda,\nu)$ を詳しく調べなければならない．ここでは，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ が

$$(3.9)\quad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{m-1}=\lambda_m \quad \text{又は} \quad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{m-1}=-\lambda_m$$

となる場合を考える．これは，K の表現 σ^λ を M に制限したときにも既約となる場合である．このような λ に対応する K の表現に対して，Gelfand and Cejtlin [7] の結果より計算すると，

(3.10) $$\sum_{i,j,k} x_j x_k\, \sigma^{\lambda}(X_{ij})\, \sigma^{\lambda}(X_{ik}) = -|x|^2 \lambda_1(\lambda_1+m-1)$$

を得る．

補題3.2．　λ，ν を $\lambda \geqq \nu \geqq m$ となる整数（または半整数）とし，$\lambda-\nu$ は整数であるものとする．$\lambda^+=(\lambda,\cdots,\lambda,\lambda)$ $\lambda^-=(\lambda,\cdots,\lambda,-\lambda)$ とおき，それに対応する K の既約 unitary 表現をそれぞれ，σ^{λ^+}，σ^{λ^-} とする．このとき，

(3.11) $$-T_\Omega(\lambda^\pm,\nu)f = \Big[(1-|x|^2)\Big\{\frac{1-|x|^2}{4}\Delta + (m-\nu-1)D + \sum_{i,j} x_j\, \sigma^{\lambda^\pm}(X_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\} + (\nu(\nu-m+1)-\lambda(\lambda+m-1))|x|^2 - (m\lambda(\lambda+m-1)-m\nu)\Big]f,$$

となる．

次の微分方程式を考える．

(3.12) $$T_\Omega(\lambda^+,\nu)f = -[(m-1)\lambda(\lambda+m-1)+\nu(\nu-2m+1)]f.$$

補題3.2によって，(3.12)は

(3.13) $$\Big\{\frac{1-|x|^2}{4}\Delta + (m-\nu-1)D + \sum_{i,j} x_j\, \sigma^{\lambda^+}(X_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda(\lambda+m-1)+\nu(\nu-m+1)\Big\}f = 0,$$

となる．$f(x)=\varphi(r)$，$r=|x|$ とおくと，$X_{ii}=0$，$X_{ij}+X_{ji}=0$ $(i\neq j)$ によって，

$$\sum_{i,j} x_j\, \sigma^{\lambda^+}(X_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi = 0$$

を得る．したがって(3.13)は，

$$\Big\{\frac{1-r^2}{4}\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2m-1}{r}\frac{d}{dr}\Big) + (m-\nu-1)r\frac{d}{dr} + (\lambda+m-\tfrac{1}{2})(\lambda+\tfrac{1}{2})\Big\}\varphi(r) = 0$$

となる．$z=r^2$ と変数変換すると，

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}\varphi(z) + (m-(2\nu-m+2)z)\frac{d}{dz}\varphi(z) - (\lambda+\nu)(\lambda-\nu+m-1)\varphi(z) = 0.$$

これは，超幾何方程式である．したがって，任意の $v\in V^{\lambda^+}$

に対して，　$f_v(x) = F(\nu-\lambda-m+1, \lambda+\nu; m; |x|^2)v$　とおくと，f_v は (3.12) の解である．さらに，$F(\nu-\lambda-m+1, \lambda+\nu; m; z)$ は，$\lambda-\nu+m-1$ 次の多項式であるから，$f_v \in H_0(\lambda^+, \nu)$ となる．同様にして，$f_v \in H_0(\lambda^-, \nu)$ が証明される．

定理 1.　λ, ν を $\lambda \geq \nu \geq m$ であって，$\lambda-\nu$ が整数となる整数（または半整数）とする．$\sigma^{\lambda^\pm}$ を $\lambda^+=(\lambda, \cdots, \lambda, \lambda)$, $\lambda^-=(\lambda, \cdots, \lambda, -\lambda)$ に対応する K の既約 unitary 表現とする．このとき，$H(\lambda^\pm, \nu)$ を，それぞれ，

(3.14)　　$T_\Omega(\lambda^\pm, \nu) f = -[(m-1)\lambda(\lambda+m-1) + \nu(\nu-2m+1)] f$

となる関数 f より生成される $H_0(\lambda^\pm, \nu)$ の部分空間とすると，$H(\lambda^\pm, \nu)$ は non-trivial, closed であって，$T_g(\lambda^\pm, \nu)$ に関して不変である．$T(\lambda^\pm, \nu)$ を $H(\lambda^\pm, \nu)$ に制限して得る G の unitary 表現（これも $T(\lambda^\pm, \nu)$ と書く）は既約であって，G の discrete series に属する．さらに，$H_1(\lambda^\pm, \nu)$ の内積 (3.5) における定数 c を，

$$c = \frac{(2\nu-2m+1)\,\Gamma(\lambda-\nu+2m-1)\,\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(m)^2\,\Gamma(\lambda-\nu+m)\,\Gamma(\lambda+\nu-m+1)}$$

とおき，　$f_v(x) = F(\nu-\lambda-m+1, \lambda+\nu; m; |x|^2)v$,　$(v \in V^{\lambda^\pm})$

とおくと，$f_v(x) \in H(\lambda^\pm, \nu)$ であって，$\|f\|^2 = \|v\|^2_{V^{\lambda^\pm}}$ となる．

$n=4$ のときは，この構成法によって，De Sitter 群の

universal covering group のすべての discrete series が実現できる (cf. [6]).

§4. Limits of the discrete series.

λ を正の半整数とし，半整数列 $(\lambda,\cdots,\lambda,\lambda)$ もまた λ で表わすことにする．σ^λ を半整数列 λ に対応する K の既約 unitary 表現とし，その表現空間を V^λ とする．σ^λ を M に制限しても既約であるから，σ^λ を M の表現と考えるとき，その表現も σ^λ で表わす．$H_1(\lambda)$ を C^∞ 関数 $f: X \to V^\lambda$ のなす空間とする．$(k(g,x))'$ の代わりに $k'(g,x)$ と書く．$H_1(\lambda)$ 上の作用素 $T_g^+(\lambda)$ 及び $T_g^-(\lambda)$ $(g \in G)$ を

$$(4.1) \qquad T_g^+(\lambda) f(x) = |b'x+a'|^{-(2m-1)} \sigma^\lambda(k(g^{-1},x))^{-1} f(g^{-1}\cdot x),$$

$$(4.2) \qquad T_g^-(\lambda) f(x) = |b'x+a'|^{-(2m-1)} \sigma^\lambda(k'(g^{-1},x))^{-1} f(g^{-1}\cdot x)$$

によって定義する．ただし，$g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$.

discrete series の場合と同様にして，$f \in H_1(\lambda)$ に対して，

$$(4.3) \qquad -T_\Omega^\pm(\lambda) f = \Big[(1-|x|^2)\Big\{\frac{1-|x|^2}{4}\Delta - \frac{1}{2}D + \sum_{i,j} x_j \sigma^\lambda(X_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\} + \Big(\frac{1}{2}(m-\tfrac{1}{2}) - \lambda(\lambda+m-1)\Big)|x|^2 + \Big(m\lambda(\lambda+m-1) - m(m-\tfrac{1}{2})\Big)\Big]f,$$

となる．ただし，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{2m}^2}$, $D = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_{2m}\frac{\partial}{\partial x_{2m}}$, $X_{ii} = 0$, $X_{ij} + X_{ji} = 0$ $(i \neq j)$.

$H_0^\pm(\lambda)$ を次の条件を満足する関数 f より成る $H_1(\lambda)$ の部分空間とする．

(4.3) $T_{\Omega}^{\pm}(\lambda) f = -[(m-1)\lambda(\lambda+m-1) - (m-\frac{1}{2})^2] f$,

(4.4) f は boundary U への連続な extension を持つ,

(4.5) $\|f\|^2 = \int_U \|f(u)\|^2_{V^\lambda} \, d\mu(u) < +\infty$.

このとき, $H_0^{\pm}(\lambda)$ は $T_g^{\pm}(\lambda)$ $(g \in G)$ に関して stable である. $H^{\pm}(\lambda)$ をそれぞれ $H_0^{\pm}(\lambda)$ の completion とする.

discrete series のところで見たように, (4.3) は超幾何方程式

$$\left\{\frac{1-|x|^2}{4}\Delta - \frac{1}{2}D + \sum_{i,j} x_j \, \sigma^\lambda(X_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda(\lambda+m-1) - (m-\frac{1}{2})^2\right\} f = 0$$

であるから, (4.3) は non-trivial な解

$$f_v(x) = F(\tfrac{1}{2}-\lambda, \lambda+m-\tfrac{1}{2}; m; |x|^2)\, v \quad (v \in V^\lambda)$$

を持つ. さらに, (4.5) の norm の定義で,

$$\|f_v\| = \left(\frac{\Gamma(m)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+m-\frac{1}{2})}\right) \|v\|_{V^\lambda}$$

となる. したがって,

補題 4.1. $H^{\pm}(\lambda) \neq 0$.

§5. Imbedding in the principal series.

§4 の記号をそのまま使う. $H_0^{\pm}(\lambda)$ はそれぞれ $T_g^{\pm}(\lambda)$ $(g \in G)$ に関して stable であるから, $H^{\pm}(\lambda)$ も stable である. G の $H_0(\lambda)$ 上での表現 $T^{\pm}(\lambda)$ を $H^{\pm}(\lambda)$ に拡張する.

$\sigma^\lambda(k(g,u)) = \sigma^\lambda(m(g,u))$, $\sigma^\lambda(k'(g,u)) = \sigma^\lambda(m(g,u))$ であることに注意すれば, 次の補題を得る.

補題 5.1. $I^+(\lambda): H_0^+(\lambda) \to \mathcal{H}(\lambda)$, $I^-(\lambda): H_0^-(\lambda) \to \mathcal{H}(\lambda)$ を

$$I^{\pm}(\lambda) f(u) = f(u) \qquad (f \in H_0^{\pm}(\lambda)) \tag{5.1}$$

によって定義すれば，$I^{\pm}(\lambda)$ は linear isometry であって，

$$I^{\pm}(\lambda) T_g^{\pm}(\lambda) = U_g(\lambda, m-\tfrac{1}{2}) I^{\pm}(\lambda) \tag{5.2}$$

がすべての $g \in G$ に対して成り立つ．

定理 2. $H_0^{\pm}(\lambda)$ 上の作用素 $T_g^{\pm}(\lambda)$ は，$H^{\pm}(\lambda)$ 上に拡張できて，$g \longmapsto T_g^{\pm}(\lambda)$ は G の強連続な unitary 表現である．さらに $T^{\pm}(\lambda)$ は既約であって，$U(\lambda, m-\frac{1}{2})$ の部分表現と unitary 同値である．

系. G の principal series の表現 $U(\lambda, m-\frac{1}{2})$ は可約である．

注. $f \in H_0^{\pm}(\lambda)$ に対して，

$$\int_U \|f(u)\|^2_{V^\lambda}\, d\mu(u) \tag{5.3}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+m-\frac{1}{2})^2}{\pi^m \Gamma(m) \Gamma(\lambda+\frac{1}{2})^2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \int_X \|f(x)\|^2_{V^\lambda} (1-|x|^2)^{\varepsilon-1}\, d\mu(x)$$

が成り立つ．したがって，discrete series の表現の構成と比べると，表現 $T^{\pm}(\lambda)$ が，序で述べた意味で discrete series の limit であることがわかる．

References

[1] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math., 48 (1947), 568-640.

[2] H. Boerner, Representations of Groups, North-Holland, Amsterdam, 1963.

[3] I. M. Gelfand and M. L. Cejtlin, Finite dimensional representations of the groups of orthogonal matrices (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 71 (1950), 825-828, 1017-1020.

[4] A. W. Knapp and K. Okamoto, Limits of holomorphic discrete series, J. of Func. Analysis, 9 (1972), 375-409.

[5] A. W. Knapp and E. M. Stein, Intertwining operators for semisimple groups, Ann. of Math., 93 (1971), 489-578.

[6] R. Takahashi, Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 289-433.

[7] R. Takahashi, Série discrète pour les groupes de Lorentz $SO_0(n,1)$, Colloque sur les fonctions sphériques et la théorie des groupes, Nancy, 1971.

[8] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Clifford modules, Topology 3, Supp. 1, (1964), 3-38.

[9] W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Springer, Berlin, 1966.