数理解析研究所講究録
第182巻 1973年 156-180

Formal vector fieldsのLie環のcohomologyについて

京大 理　蟹江幸博

§0. 序

本稿では Gel'fandとFuksによって創始されたベクトル場の作るLie環のcohomology理論の中で，formal vector fieldsに関する部分について述べる。元々この理論は，コンパクトLie群の表現全体をその分類空間の位相不変量を用いて表わすことの類似を，非コンパクト群に対して行なう為の準備の側として始められたが(cf. [11]～[14])，幾つかの具体的な結果を得てからは([15]～[17])，むしろ可微分多様体の微分不変量を求めるという意図の方が重要になっている。

一般に位相的Lie環LとL-module Tがあるとき，表現Tに係数を持つcohomology $H^*(L;T)$とは，次のcomplex$\{C^q(L;T), d^q(L;T)\}$のhomologyである：

$$C^q(L;T) = \{L上の連続なT値交代線型写像\} \quad (q>0)$$

$$X, X_1, \cdots, X_{q+1} \in L, \quad \omega \in C^q(L;T) \quad (q>0)$$

に対し

$$(d\omega)(X_1, X_2, \cdots, X_{q+1}) = \sum_{1 \le i \le q+1} (-1)^i X_i \cdot \omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots X_{q+1})$$
$$- \sum_{1 \le i < j \le q+1} (-1)^{i+j-1} \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots \hat{X}_j, \cdots, X_{q+1})$$

$$(dt)(X) = Xt \qquad \text{for } t \in C^0(L; T) = T$$

(有限次元 Lie 環の cohomology については [5]〜[9])

M を n 次元コンパクト oriented C^∞-多様体, $\mathfrak{a}(M)$ を M 上の C^∞-vector 場全体の作る Lie 環とする。その時問題はまず, $\mathfrak{a}(M)$ の trivial 表現に係数を持つ cohomology $H^*(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R})$ を計算することである。Gel'fand と Fuks は [17] で 各 $q \ge 0$ に対して $\dim H^q(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R}) < \infty$ を示し, $\dim L = \infty$ のときにも cohomology を扱うことが出来ることを示した。それは $M = S^1$ の場合しか完全には計算されていない (cf [15], [17]) (i.e. $H^*(\mathfrak{a}(S^1); \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[x_2] \otimes \Lambda(x_3)$)。しかし, $C^*(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R})$ には ある意味で $H^*(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R})$ を multiplicative に生成する, diagonal と呼ばれる subcomplex が存在し, その homology $H^*_\Delta(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R})$ も勿論 微分不変量である. Gel'fand と Fuks は $H^*_\Delta(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R})$ に収束し E_2-term が $H(M; \mathbb{R}) \otimes H(\mathfrak{a}(n); \mathbb{R})$ と表わせる spectral sequence を構成した。(ここで $\mathfrak{a}(n)$ は, $\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$; $P_i \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ の形をした $\mathbb{R}^n$ の原点に於ける formal vector fields 全体を表

わし，$\left[\sum_i P_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] = \sum_i \left(\sum_j P_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} - q_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$ によって Lie環を作る。）この spectral sequence は，M の rational Pontryagin class が消えているとき（特に M が parallelizable であるとき）trivial になり（[23]〜[25]），その時 $H_\Delta^*(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R})$ の additive base により $H^*(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R})$ は乗法的に生成される（[20]）。最近 Losik と Guillemin により $H_\Delta^*(\mathfrak{a}(M); \mathbb{R})$ は，M から構成されるある principal bundle の real cohomology として説明されている（[26], [28]）。

第二の問題として，表現が trivial でない場合（例えば，関数の空間や，外微分型式の空間など（[30]，[31]），$H_\Delta^*(\mathfrak{a}(M); T)$ を計算することがあるが，この場合も diagonal complex の homology には有効な手段がある。つまり，$H_\Delta^*(\mathfrak{a}(M); T)$ に収束する spectral sequence で $H(M; \mathbb{R})$ と，T の formal な対応物に係数をもつ $\mathfrak{a}(n)$ の cohomology との tensor 積を E_2-term にもつものが構成出来る（[31]）。それにより，多くの場合にその有限次元性を示すことが出来る（[32], [33], [44]）。

第三の問題として　$\mathfrak{a}(M)$ の subalgebras（例えば M のある subset A の上で消えている vector 場全体，M が付加的な構造をもつ時　その構造と compatible な vector 場全体など）の，cohomologies の計算がある。一点で消えている vector 場の Lie 環は，H_Δ から H への step の補助手段として用いることが出

来，一，二の問題の多くの場合に H の有限次元性を示すことが出来る（[35]～[37]）。構造を持つvector場の場合には現在の所 特殊な場合の一次元cohomologyが消えるという結果（[38], [39]）を除いて，formalな対応物しか問題にされていない。

以上の問題に於いて そのformalな対応物が非常に重要な役割を果しており，また この理論の典型的な議論をそこに見ることが出来るので，本稿では 種々の構造を持つformal vector fieldsを考慮しつつ，$\mathfrak{a}(n)$ のcohomologiesについて述べることにした。また $H^*(\mathfrak{a}(n);\mathbb{R})$ と，foliation の characteristic class（[45]）との関係が発見され（[46], [47]），foliation の研究にこの理論を応用することが考えられている（[47]～[51]）。筆者はここで 多様体上のある構造に附随した characteristic class の構成が，むしろその構造をもつ formal vector fields の Lie 環の $\mathbb{R}$ 係数の cohomology から得られる可能性を指摘しておきたい。また Gontyaroba が代数曲線上でやったように（[52]），C^∞ 多様体だけでなく，algebraic variety の上にもこの理論を構築することも考えられてよい問題であろう。これには 第三の問題で A を closed submanifold としての議論が有用であるかも知れない。

§1. 種々の定義

Lを$\mathcal{R}$上のLie環とし，L_0を余次元有限の部分環とする。Lの部分空間の族$\{L_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$を，$L_{-p}=L$，$L_0=L$，$L_p=\{X\in L_{p-1};[X,L]\subset L_{p-1}\}$，$(p>0)$と定めたとき，$L_p\supset L_{p+1}$，$[L_p,L_q]\subset L_{p+q}$，$(p,q\in\mathbb{Z})$という性質を満たすので，このfiltrationによってLの位相を定めれば，Lは位相的Lie環となる。更に$\bigcap_p L_p=\{0\}$であり，Lがこの位相でcompleteであるとき(L,L_0)をTLA (transitive Lie環)と呼ぶ。$\dim L=\infty$のときTLA (L,L_0)はinfinite typeであるという。(以下，infinite typeだけを扱う)

<u>定義</u>　TLA (L,L_0)が <u>primitive</u>

$\iff$　L_0がLの極大部分環

TLA (L,L_0)が <u>irreducible</u> (<u>既約</u>)

$\iff$　L_0のL/L_0への自然な表現が既約

$\mathcal{R}$上のprimitive TLAは分類されていて，既約でないものは実及び複素のcontact TLAしかない([55])。また既約なものも分類されていて([54])，次のように書かれる。$n=\dim L/L_0$とすれば$L/L_0\cong V\ (=\mathcal{R}^n)$。$\mathfrak{g}=L_0/L_1$はLie環となり，$\mathfrak{g}$は$V$にfaithfulな表現を持っている(i.e. $\mathfrak{g}\subset V\otimes V^*$)。$\mathfrak{g}$の部分環$\mathfrak{f}$に対してprolongation

$$\mathfrak{f}^{(p)}=(\mathfrak{f}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\cdots\otimes V^*}_{p})\cap V\otimes S^{p+1}(V^*)$$

が定義されて

$$\mathfrak{g}^p\,(=L_p/L_{p+1}) \cong \mathfrak{g}^{(p)}, \quad (p \geqq 1)$$

となり，しかも $\mathfrak{g}=\mathfrak{f}$ かまたは $\mathfrak{g}=\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{z}$（ここで $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}$ の center）となっている。このとき，$\mathfrak{f}$ になり得るものは $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{sp}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{sp}_{\mathbb{C}}$ であって，既約なTLAは 全部で 12 の type がある。

今 $\mathfrak{g}=\mathfrak{f}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})=V\otimes V^*$ とすれば，$\mathfrak{g}^{(p)}=V\otimes S^{p+1}(V^*)$ となるから，

$$\begin{aligned} L &\cong \sum_{p\geqq -1}\mathfrak{g}^p = \sum_{p\geqq 0} V\otimes S^p(V^*) \\ &\cong V\otimes\sum_{p\geqq 0} S^p(V^*) \cong \mathbb{R}[\![V]\!]\otimes V \end{aligned}$$

（ここで $\mathbb{R}[\![V]\!]$ は V 上の formal series の作る algebra）。任意の $v\in V$ に対し，V^* 上では内積となるような $\mathbb{R}[\![V]\!]$ 上の derivation D_v が存在し，それによって定まる $\mathbb{R}[\![V]\!]\otimes V$ 上の Poisson blacket が L の $[\ ,\ ]$ となる。V の base を $e_1, \cdots, e_n$，V^* の dual base を $\xi^1, \cdots, \xi^n$ としたとき L の元は $\sum_{i=1}^n p_i(\xi_1,\cdots,\xi_n)\,e_i$，（$p_i$ は n 変数の formal series）と書き表わされ，

$$\Big[\sum_{i=1}^n p_i(\xi)\,e_i,\ \sum_{i=1}^n q_i(\xi)\,e_i\Big] = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\Big(p_j\frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} - q_j\frac{\partial p_i}{\partial \xi_j}\Big)e_i$$

を得，L は formal vector fields の作る Lie 環 $\mathfrak{a}(n)$ と同一視される。

同様にして 例えば $\mathfrak{g}=\mathfrak{f}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ のとき L は volume を保つ formal vector 場の作る Lie 環となり，$\mathfrak{g}=\mathfrak{f}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$

のとき L は formal Hamiltonian vector 場の作る Lie 環となり，また 例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$，$\mathfrak{k} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ のとき L は 定数倍を除いて volume element を保つ formal vector場の作るLie環となり，構成は違うが contact TLA は contact formal vector 場の作る Lie 環となることが知られている。

さて $C^*(L;T)$ の homology を求めるのだが，$\mathfrak{k}$ が L の連続射影の像であるような部分環であるとき Hochschild と Serre は $C^*(L;T)$ に 次のような filtration $C^*(L;T) = A^0 \supset A^1 \supset \cdots \supset A^p \supset A^{p+1} \supset \cdots$ を導入し，spectral sequence $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}\}$ を構成した([6])：

$$A^p = \sum_{q \geq 0} A^{p,q}, \quad (\text{当然，} A^{0,q} = C^q(L,T))$$

$$A^{p,q} = \left\{ \omega \in C^{p+q}(L;T) \; ; \; X_1, \cdots, X_{q+1} \text{ のうち } q+1 \text{ 個が } \mathfrak{k} \text{ に属すれば，} \omega(X_1, \cdots, X_{p+q}) = 0 \right\}$$

すると E_1-term は次のように表わされる ([6] Th.2 の Cor)：

$$E_1^{p,q} \cong H^q(\mathfrak{k}; A^{p,0})$$

ここで，

$$A^{p,0} = \{ \omega \in C^p(L;T) \; ; \; i(X)\omega = 0, \; {}^{\forall}X \in \mathfrak{k} \}$$
$$(\cong C^p(L/\mathfrak{k}; T)).$$

また $\mathfrak{k}^{\perp}$ を $\mathfrak{k}$ に直交している L の ideal L^* の部分空間とすれば，$\mathfrak{k}$ の L^* での adjoint 表現は $\mathfrak{k}^{\perp}$ を不変にする。

そこで $\mathfrak{k}$ が $\mathfrak{k}^{\perp}$ に reductive に働いていると仮定すれば，E_2 term を書き表わすことが出来る。$C^*(L, \mathfrak{k}; T) = \{\omega \in C(L; T);$ $i(X)\omega = 0,\ \theta(X)\omega = 0,\ \forall X \in \mathfrak{k}\}$ は，$C^*(L; T)$ の subcomplex となり，この homology を $H^*(L, \mathfrak{k}; T)$ と表わせば，（[6]. Th 11 の Cor）

$$E_2^{p,q} \cong H^q(\mathfrak{k}; \mathbb{R}) \otimes H^p(L, \mathfrak{k}; T)$$

最後に $\mathfrak{g}$ の Weil algebra $W(\mathfrak{g})$ について思い出しておく（[2]）。Weil algebra $W(\mathfrak{g}) = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \otimes S(\mathfrak{g}^*)$（ここで Λ は exterior algebra，S は symmetric algebra を表わす）は次のような graded structure を持つ。

$$W(\mathfrak{g}) = \sum_{p \geq 0} W^p = \sum_{p \geq 0} \sum_{r+2s=p} \Lambda^r(\mathfrak{g}^*) \otimes S^s(\mathfrak{g}^*)$$

$i(X)$, $\theta(X)$ は $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ 上で定義されているので，$i(X)$ は $S(\mathfrak{g}^*)$ 上で 0 であるような antiderivation，$\theta(X)$ は $S^1(\mathfrak{g}^*)$ 上で $\Lambda^1(\mathfrak{g}^*)$ でと同じように定め それを derivation として $W(\mathfrak{g})$ に拡張しておく。$W(\mathfrak{g})$ は differential δ を持ち，graded differential algebra となる。即ち $\gamma \in \Lambda^1(\mathfrak{g}^*)$ に対しては $\delta\gamma = d_{\mathfrak{g}}\gamma + h(\gamma)$，$\tilde{\gamma} \in S^1(\mathfrak{g}^*)$ に対しては $\theta(x)\delta = \delta\theta(X)$ が成り立つように定義することによって δ は $W(\mathfrak{g})$ の differential として一意の拡張を持つ。（ここで $d_{\mathfrak{g}}$ は complex $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ の differential で，h は $\gamma \in \Lambda^1(\mathfrak{g}^*)$ と

同じ $S'(\mathfrak{g}^*)$ の元を表わす線型写像で，$\bar{\gamma} = h(\gamma)$ とおく。)

§2. $H^*(\mathfrak{a}(n)\,;\,\mathbb{R})$ の計算

complex $C^q(L\,;\mathbb{R})$ の cochain ω を考えると 連続性から，X_i の一つが充分大きな p に対して L_p に属せば，$\omega(X_1,\cdots,X_q)=0$ となる。従って

$$C^1(L\,;\mathbb{R}) = \sum_{p\geq -1}(\mathfrak{g}^p)^* \cong \sum_{p\geq 0} S^p(V)\otimes V^*$$
$$C^q(L\,;\mathbb{R}) = \Lambda^q C^1(L\,;\mathbb{R})$$
$$= \sum_{P_{-1}+P_0+P_1+\cdots=q}\oplus\ \Lambda^{P_{-1}}(\mathfrak{g}^{-1})^* \wedge \Lambda^{P_0}(\mathfrak{g}^0)^* \wedge \Lambda^{P_1}(\mathfrak{g}^1)^*\wedge\cdots$$

($\| \ \mathfrak{g}_{(P_{-1},P_0,P_1,\cdots\cdots)}$ とおくと，これは $\mathfrak{g}^0$- 不変である)。今 $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in \mathfrak{a}(n) = \mathfrak{a}$ を取れば $[\alpha, \sum P_i e_i] = \sum_i\left(\sum_j \xi_j \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} - P_i\right)e_i$ となり，従って $\mathfrak{g}^p = \{X\in\mathfrak{a}\,;\,[\alpha, X] = pX\}$，$(p\geq -1)$ となっており，このことだけから $\dim H^*(\mathfrak{a}\,;\mathbb{R}) < \infty$ が分る。nontrivial center を持つ既約な TLA は この α の役割を果す元を含んでおりまた contact TLA も同種の元を含んでいることにより，$\dim H^*(L\,;\mathbb{R}) < \infty$ が従う ([40])。

実際：cochain $\omega\in C^*(L\,;\mathbb{R})$ が，$\theta(\alpha)\,\omega = -r\omega$ を満たすとき weight r を持つと言うことにすれば，$\omega\in\mathfrak{g}_{(P_{-1},P_0,P_1,\cdots)}$ は weight $-P_{-1}+P_1+2P_2+\cdots\cdots$ を持つ。weight r の cochains は，$i(\alpha)$-stable な subcomplex C_r を作り，$C^*(L;\mathbb{R}) = \sum_r\oplus C_r$ となる。更に $r\neq 0$ のとき complex C_r は acyclic とな

る。(∵) $\omega \in C_r$ が cocycle なら，$-r\omega = \theta(\alpha)\omega = d\,i(\alpha)\omega$) 従って 包含写像 $C_0 \hookrightarrow C^*(L;\mathbb{R})$ は homologies の同型を導く。そして complex C_0 は各次数に対し有限次元であり，n^2+2n を越える次数に対しては 0 であるから，$\dim C_0 < \infty$ である。

$C^*(L;\mathbb{R})$ に収束する spectral sequence を作る為に，部分環 $\mathfrak{g}^0$ に関する Hochschild-Serre の filtration を考えれば，

$$E_1^{p,q} \cong H^q(\mathfrak{g}^0;\, A^{p,0})$$

となり．L を nontrivial centre を持つ既約な TLA とすると

$$A^{p,0} \cong \sum_{p_{-1}+p_1+p_2+\cdots=q} \oplus \underbrace{\Lambda^{p_{-1}}(\mathfrak{g}^{-1})^* \wedge \Lambda^{p_1}(\mathfrak{g}^1)^* \wedge \cdots\cdots}_{\mathfrak{g}_{(p_{-1},0,p_1,p_2,\cdots)}}$$

であり．各 $\mathfrak{g}_{(p_{-1},0,p_1,p_2\cdots)}$ は $\mathfrak{g}^0$ 不変で 且 $\theta(H)$ に関して semi-simple である。従って $A^{p,0}$ は その $\mathfrak{g}^0$-不変元全体 $B^p (= \{\omega \in C^p(L;\mathbb{R});\ i(X)\omega = 0,\ \theta(X)\omega = 0,\ \forall X \in \mathfrak{g}^0\})$ で置きかえてよい（[5]，または [9]）。$B = \sum_{p\geq 0} B^p$ とおいておく。

Gel'fand と Fuks が $L = \mathfrak{a}(n)$ のときに採った方法は ([18])，$A^{p,0}$ の元が $\theta(H)$ 不変であることを示して $A^{p,0}$ の $sl(n,\mathbb{R})$ 不変元はまた $gl(n,\mathbb{R})$ 不変であることを示し，$A^{p,0}$ の $SL(n,\mathbb{R})$ 不変元を H. Weyl の invariant theory ([0]) を利用することによって決定し，A. Borel の定理 ([1]) を使う方法であった。

ところで $Sp(n;\mathbb{R})$ の vector invariants も Weyl によって決定されていることによって（[0]），この方法は nontrivial center を持つ既約な TLA に対して $H^*(L;\mathbb{R})$ の計算を可能にする一般的な方法となる（[41]）。しかし $L=\mathfrak{a}$ の場合には（本質的には同じことだが）Weil algebra を使うことによって Weyl を直接に引用する必要がなくなり，transgression を定める Borel の定理も Weil algbra でのそれで代用することが出来る。（$L=\mathfrak{a}$ でなくても多くの場合には可能である。）

以下，$L=\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(n)$，$\mathfrak{g}^0\cong\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$。$\pi$ を $\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{g}^0$ への連続射影 $\pi(X)=X^0$ とする（ここで，$X\in\mathfrak{a}$ に対しその $\mathfrak{g}^p$ 成分を X^p と書く）。π は $\mathfrak{a}$ 上の $\mathfrak{g}$-値 connection form であり，その curvature form Π は，$\Pi(X,Y)=[Y^1,X^{-1}]-[X^1,Y^{-1}]$ となる。H. Cartan [2] によって，この connection form は graded algebras としての準同型（Weil 写像）

$$\varphi: W=W(\mathfrak{g})=\Lambda(\mathfrak{g}^*)\otimes S(\mathfrak{g}^*)\longrightarrow C^*(\mathfrak{a};\mathbb{R})$$

を定める。$\gamma\in\Lambda^1(\mathfrak{g}^*)$ に対しては $\varphi(\gamma)X=\gamma\,\pi(X)$，$\tilde{\gamma}\in S^1(\mathfrak{g}^*)$ に対しては $\varphi(\tilde{\gamma})(X,Y)=\tilde{\gamma}\,\Pi(X,Y)$ となっている。従って（イ）$\varphi(\Lambda^p\mathfrak{g}^*)\subset\Lambda^p(\mathfrak{g}^0)^*$，（ロ）$\varphi(S^p(\mathfrak{g}^*))\subset\Lambda^p(\mathfrak{g}^{-1})^*\wedge\Lambda^p(\mathfrak{g}^1)^*$ となる。故に，$\ker\varphi$ は $\sum_{r>n}S^r(\mathfrak{g}^*)$ で生成された W の ideal J である。J はま

た W の subcomplex であり quotient complex $W_{2n} = W/J$ に移って，準同型 $\psi : W_{2n} \longrightarrow C^*(\mathfrak{a}\,;\mathbb{R})$ を得，次の定理が示される．

<u>定理 1</u>　（Weyl を引用する部分に対応して）

<u>ψ は</u>　$H^*(W_{2n})$ <u>と</u> $H^*(\mathfrak{a}\,;\mathbb{R})$ <u>との同型を導く</u>

(2) により，

<u>系</u> 1　（[21]）

<u>$H^*(\mathfrak{a}\,;\mathbb{R})$ のすべての cohomology class は，その値が (arguments の) formal vector fields の 2-jet にしか依らない cocycles を含む</u>。

定理の証明は complex W_{2n} に $C^*(\mathfrak{a}\,;\mathbb{R})$ での filtration と compatible なものを入れることによる。即ち，

$$U^{p,q} = \{ \omega \in W_{2n}^{p+q}\,;\ i(X_1)\cdots i(X_{q+1})\omega = 0 \quad \forall X_1, \cdots, X_{q+1} \in \mathfrak{g} \}$$

とおけば それから得られる spectral sequence は $U^{p,0} = 0$ （p：奇数 または $p > 2n$），$= S^{\frac{p}{2}}(\mathfrak{g}^*)$　（$p = 2r \leq 2n$）であることから

$$E_1^{p,q} \cong H^q(\mathfrak{g}\,;\ I_S^r(\mathfrak{g}^*)) \qquad (p = 2r \leq 2n)$$
$$\cong 0 \qquad (p：奇数 または p > 2n)$$

となる（ここで $I_S^r(\mathfrak{g}^*)$ は $S^r(\mathfrak{g}^*)$ の $\mathfrak{g}$-不変元全体，

$I_\rho(\mathfrak{g}^*)_n = \sum_{r<n} I_\rho^r(\mathfrak{g}^*)$)。従って また $E_1^{p,q} \cong E_2^{p,q}$ である。そこで 二つの方法（本質的には全く同じ）が生じる。一つは Bの形を決めて（線型代数の議論で済み，$B^{2r+1} = 0$，$B^{2r} < \Lambda^r(\mathfrak{g}')^* \wedge \Lambda^r(\mathfrak{g}')^*$ となる），E_1-termでの同型を言う方法，

<u>命題</u> 1 (C. Godbillon [34])

$\psi : W_{2n} \longrightarrow C^*(\mathfrak{a} ; \mathbb{R})$ <u>は</u>

$I_\rho(\mathfrak{g}^*)_n$ <u>と</u> B <u>との同型を導く</u>

であり，もう一つは，$H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}^\perp ; \mathbb{R})$ を（Young図式と置換の性質を用いて）決定し．E_2-termでの同型を言う方法（$C^*(\mathfrak{a} ; \mathbb{R})$ の方の spectral sequence の E_2-term は $H(\mathfrak{g} ; \mathbb{R}) \otimes H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}^\perp ; \mathbb{R})$ であったことに注意）

<u>命題</u> 2 (V. Guillemin [28])

ψ <u>は</u> $I_\rho(\mathfrak{g}^*)_n$ <u>と</u> $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}^\perp ; \mathbb{R})$ <u>との同型を導く</u>

である。

<u>§3. $H(W_{2n})$ の決定と topological interpretation</u>

complex W_{2n} の homology を定めれば良いことになったが，これについては H. Cartan [3] により次のことが分っている：

(1) 元 $u_q \in E_1^{0,2q-1} \cong H^{2q-1}(\mathfrak{g} ; \mathbb{R})$，$(q = 1, 2, \cdots, n)$ が存在して $E_1^0 \cong \sum_r E_1^{0,r}$ は $\Lambda(u_1, \cdots, u_n)$ と同型となり，

(2) 各 u_q の代表元 $w_q \in U^{0,2q-1}$ として $c_q = d w_q \in U^{2q,0}$ となるものがとれ（c_q は $\mathfrak{g}$-不変となり，$\deg c_q = 2q$ と思ったとき），

(3) $I_S(\mathfrak{g}^*)_n \cong \mathbb{R}[c_1, \cdots, c_n]_{2n}$ （$= \{ c_i$ に関して $2n$ 次までの polynomials $\}$）となる。

そこで graded differential algebra $\Lambda(u_1, \cdots, u_n) \otimes \mathbb{R}[c_1, \cdots, c_n]$ （ここで，$d u_q = c_q$）の homology を計算すればよいことになり，

<u>定理</u> 2

$$v_{i_1, \cdots, i_\ell, j_1, \cdots, j_m} = (u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_\ell}) \otimes (c_{j_1} c_{j_2} \cdots c_{j_m})$$

<u>とおけば</u>（<u>ここで</u> <u>index はいつも</u> $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n$，$1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_m \leq n$，$|j| = j_1 + \cdots + j_m \leq n$ <u>を満たすようにとる</u>），<u>これは</u> $i_1 + |j| > n$ <u>を満たすとき cocycle となる</u>。

<u>更に</u> $i_1 \leq j_1$ <u>を満たす cocycles</u> $v_{i_1, \cdots, i_\ell, j_1, \cdots, j_m}$ <u>の cohomology class は</u> $H^*(W_{2n}; \mathbb{R})$ <u>の (additive) base をなす</u>。

この証明は r に関する induction により，spectral sequence の E_{2r}-term の base として，$i_1 < r$，$i_1 + |j| > n$，$i_1 \leq j_1$ を満たすか または $i_1 \geq r$，$j_1 \geq r$ を満たすよ

うな $v_{i_1,\cdots,i_l,j_1,\cdots,j_m}$ の class がとれることを示せばよい。更にここで，$H^*(\mathfrak{a}(n);\mathbb{R})$ の non zero な元の filtration 次数を見ることにより，

系 2

algebra $H^*(\mathfrak{a}(n);\mathbb{R})$ の積は trivial である．

こうして $H^*(\mathfrak{a}(n);\mathbb{R})$ は完全に定まったのだが，これにはまた topological な説明を与えることが出来る（[18]）。B_U をユニタリ群 $U(n)$ の分類空間とし $p: E_U \longrightarrow B_U$ を普遍 $U(n)$ 主-bundle とする。$[B_U]_{2n}$ を B_U の $2n$ 切片とするとき $X_n = p^{-1}([B_U]_{2n})$ とおけば，

定理 3

$$H^*(\mathfrak{a}(n);\mathbb{R}) \cong H^*(X_n;\mathbb{R})$$

[証明]

$\mathfrak{u}(n)$ を $U(n)$ の Lie 環とするとき $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C} = \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})\otimes\mathbb{C} \cong \mathfrak{u}(n)\otimes\mathbb{C}$ だから，$W(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C} \cong W(\mathfrak{u}(n))\otimes\mathbb{C}$ となる。$\mathcal{E} = \mathcal{E}_U$ を E_U 上の de Rham complex とせよ。E_U に connection を一つ定めれば Weil 写像 $\varphi_U: W(\mathfrak{u}(n)) \longrightarrow \mathcal{E}$ を得る。$W(\mathfrak{u}(n))_{2n}$ に W_{2n} でと同じ filtration を入れておき，$\mathcal{E}_{2n} = \mathcal{E}/\mathcal{B}_{2n}$ とおくと（ここで $\mathcal{B}_{2n}$ は次数 $> 2n$ の B_U 上の forms を p で引き戻して得られる forms

の生成する ideal である), 写像 $\tilde{\varphi}: W(\mathfrak{U}(n))_{2n} \longrightarrow \mathcal{E}_{2n}$ が定まる。そこで $\mathcal{E}_{2n}$ の Leray-Serre の spectral sequence (例えば〔10〕)と, $W(\mathfrak{U}(n))_{2n}$ の spectral sequence を考えると, その E_2-term は同型であり, 従って $\tilde{\varphi}$ は homology の同型を導く。一方 complex $\mathcal{E}_{2n}$ の homology は $H^*(X_n; \mathbb{R})$ であるから, $H^*(W_{2n}; \mathbb{C}) \cong H^*(X_n; \mathbb{C})$ を得る。従って $H^*(\mathfrak{a}(n); \mathbb{R})$ と $H^*(X_n; \mathbb{R})$ とは vector space としては同型である。ところで X_n が n-普遍 $U(n)$-bundle であることから $H^*(X_n; \mathbb{R})$ の積は trivial であり, 一方 $H^*(\mathfrak{a}(n); \mathbb{R})$ も系2によって同様であるから algebra として同型となる。

L が nontrivial center を持つ既約な TLA のときにも同様の topological な説明がある(〔41〕)。コンパクト Lie 群 H をその Lie 環の複素化が $\mathfrak{f} \otimes \mathbb{C}$ と同型となるようにとり, Z を $\mathfrak{z}$ に対応する torus とせよ(これは $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{z}$ の場合で, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}$ ならば 以下 Z の分は不要)。B_H を H の分類空間とし, $p: E_H \longrightarrow B_H$ を普遍 H 主-bundle とせよ。$Y_L = Z \times p^{-1}([B_H]_{2n})$ とおくと(ここで $[B_H]_{2n}$ は B_H の $2n$ 切片), $H^*(L; \mathbb{R}) \cong H^*(Y_L; \mathbb{R})$ が得られる。

§4. $H^*(L;\Omega^*)$ について

本節では nontrivial center を持つ既約なTLAを扱う。Lの nontrivial 表現に係数を持つときの cohomology $H^*(L;T)$ を求めるとき，表現TがL_0の表現から誘導される場合を考えよう。

Nを有限次元L_0-moduleとする。$[L]$, $[L_0]$をそれぞれL, L_0の包絡環とするとき $\mathfrak{g}^{-1}$はL_0に supplementary なLの可換部分環故 vector space として$[L] = [L_0] \otimes S(V)$となり，従ってLの induced module $\tilde{N} = Hom_{[L_0]}([L], N)$は$\mathbb{R}[[V]] \otimes N$と同型となる。このときLの元の$\tilde{N}$へのactの仕方は，$X \in L$, $n \in N$, $a(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n) = \sum_{r \geq 0} a_r \xi^r \in \mathbb{R}[[V]]$に対して，

$$X(an) = (Xa)n + \sum_{r \geq 0} \sum_{s \leq r} \frac{a_{r-s}}{s!} \xi^r \left(\widetilde{\left[\frac{\partial^s X}{\partial \xi^s} \right]} \cdot n \right)$$

となる（ここで$\tilde{X}$はXのL_0成分を表わす）。（[31]にこの action の式があるが間違っている。）ここで特に$N = \Lambda(V^*)$とすると，Nは$\mathfrak{g}^0$-moduleとなり射影：$L_0 \longrightarrow \mathfrak{g}^0$によって$N$を$L_0$-moduleと見ることが出来，そのとき$\tilde{N} \cong \Omega^*$となることが確められる（ここで，$\Omega^*$はV上の formal exterior differential forms 全体の空間で，自然な作用によってL-moduleである）。するとCartan-Eilenberg [4]により

$$H^*(L;\Omega^*)\cong H^*(L_0;\Lambda(V^*))$$

となる。そこで右辺を計算するのだが その前に $C^*(L_0;\Lambda(V^*))$ が subcomplex $C^p(L_0;\Lambda^q(V^*))$ によって bigraded differential algebra になることに注意しておく。

定理 4

$H^*(B_H;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}[y_1,\cdots,y_n]$ $(\deg y_i=2k_i)$ という形であったら

$$H^*(L;\Omega^*)\cong H^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}[\tau_1,\cdots,\tau_p]_n$$

となる。ここで,

$$\deg\tau_i=k_i,\quad \tau_i\in H^{k_i}(L;\Omega^{k_i})$$

[証明]

$H^*(L;\Omega^0)\cong H^*(L_0;\mathbb{R})\cong H^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ は容易。他の部分は $L=\mathfrak{a}$ の場合にだけ示す(他も同様)。L_0 の部分環 $\mathfrak{g}^0\cong\mathfrak{g}$ に附随した Hochschild Serre の spectral sequence の E_1-term は

$$E_1^{p,q}\cong H^q(\mathfrak{g};\mathbb{R})\otimes D^p$$

ここで; $D^p=\{\omega\in C^p(L_0;\Lambda(V^*))\,;\ i(X)\omega=0,\ \theta(X)\omega=0,\ \forall X\in\mathfrak{g}\}$ である。すると,

$$D^p\cap C^p(L_0;\Lambda^r(V^*))$$
$$\cong\sum_{p_1+p_2+\cdots=p}\oplus\ \{\Lambda^r(V^*)\wedge\Lambda^{p_1}(\mathfrak{g}^1)^*\wedge\Lambda^{p_2}(\mathfrak{g}^2)^*\wedge\cdots\ \text{の}\ \mathfrak{g}\text{-不変元}\}$$

となり

命題1の証明と同様にして algebraとして $D^p \cong B^{2p}$ が分る（ここで B^{2p} は $\Lambda^p(\mathfrak{g}^{-1})^* \wedge \Lambda^p(\mathfrak{g}^1)^*$ の $\mathfrak{g}$-不変元の空間である）。また $H^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ の class を表わす cocycle ω は $C^*(L_0;\Lambda(V^*))$ の元としてdをとったとき，D^p の nonzero な元を表わし得ないので，$d_r = 0$ $(\forall r \geqq 1)$ となり，$E_1 \cong H^*(L_0;\Lambda(V^*))$ である。

§5. 補足（他のTLAについて）

本稿では専ら nontrivial center を持つ既約なTLAの cohomology を考えたが，その cohomology class は 系1でと同じ顕著な性質 即ち，その値が arguments の 2-jets にしか依らない cocycle がとれるという性質を持っている。しかし center を持たないようなもの 例えば Hamiltonian formal vector fields の作る Lie 環では 2-jets だけでは値の定まらないような cocycles しかとれない class が存在する。この Lie 環には α のような元が存在しないから homology をとれば同じになる有限次元subcomplexを作ることは出来ないが，同種の定義によるsubcomplexは有限次元となる。問題はそれに supplementary な subcomplex であって，Gel'fand 達はそれが acyclic になると期待していたのだが，電子計算機を用いた計算により その中に上述の元が存在することを発見した（[42]）。それは同時に，volume を保つ vector fields の Lie 環の場合に

も同じ事情が起こることを示している。そして $\dim H^*(L;\mathbb{R})$ が有限であるかどうかも未解決であり、この事情は center を持たない TLA に対する本質的な困難である。しかし、cohomology の有限次元性の分っている contact TLA の場合に $H^*(L;\mathbb{R})$ をもとめることは難しいことではない。

また $\mathfrak{a}(n)$ の部分環 L_k $(k>0)$ に対して $\dim H^q(L_k;\mathbb{R}) < \infty$ $(q \geqq 0)$ が予想されていたが（[22]），$n=1$ の場合にはその形も定まり有限次元性を示すことが出来る（[44]）。

Bibliography

[A] 一般的文献と有限次元Lie環のcohomology

0. H. Weyl : The Classical Groups; their invariants and representation, Princeton Univ. Press, 2nd ed. (1946).

1. A. Borel : Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57-1(1953), 115-207.

2. H. Cartan : Notions d'algebre differentielle; application aux groupes de Lie et aux groupes de Lie et aux varietés òu opère un groupe de Lie, Colloque de Topologie(espaces fibrés),(1950), 15-27.

3. H. Cartan : La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, Colloque de Topologie(espaces fibrés),(1950), 57-71.

4. H. Cartan - S. Eilenberg : Homological Algebra, Princeton Univ. Press (1956).

5. C. Chevalley - S. Eilenberg : Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. A.M.S, 63(1948), 85-124.

6. G. Hochschild - J. P. Serre : Cohomology of Lie algebras, Ann. of Math., 57(1953), 591-603.

7. J. L. Koszul : Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. France 78(1950), 65-127.

8. J. L. Koszul : Sur la structure multiplicative de l'anneau de cohomologie des espaces homogènes, Colloque de Topologie (espaces fibrés),(1950), 73-81.

9. Seminaire "Sophus Lie", 1954/1955.

10. J. T. Schwartz : Differential Geometry and Topology; Gordon & Breach Sc. Pub., New York(1968).

[B] $\mathfrak{a}(M)$と$\mathfrak{a}(n)$のcohomology (trivial表現)

11. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomology of Lie groups with real coefficients, DAN,SSSR, 176(1967).

12. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Topological invariants of non-compact Lie groups related to infinitesimal representations, DAN,SSSR(1967).

13. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Topology of noncompact Lie groups, F. A. 1-4(1967), 33-45.

14. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : On classifying spaces for principal bundles with Hausdorff bases, DAN,SSSR, 181-3(1968).

15. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : The cohomologies of the Lie algebra of vector fields in a circle, F. A. 2-4(1968), 92-93.

16. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of Lie algebras of vector fields, F. A. 3-2(1968), 87.

17. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of Lie algebras of of tangential vector fields of a smooth manifold, F. A. 3-3(1969), 32-52.

18. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of the Lie algebra of formal vector fields, Izv. Akad. Nauk, SSSR, 34-2(1970).

19. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : On cohomologies of a Lie algebra of smooth vector fields, (Soviet Math. Dokl. 11-1(1970), 268-271).

20. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of Lie algebra of tangential vector fields II. F. A. 4-2(1970), 23-31.

21. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : On cycles, representing cohomology classes of Lie algebras of formal vector fields, Usp. Math. Nauk SSSR, 25-5(1970), 70-71.

22. I. M. Gel'fand : The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; some questions of integral geometry, Actes Congrès intern. math. 1(1970), 95-111. Nice.

23. I. M. Gel'fand - D. A. Kazdan : Some problems of differential geometry and computations of cohomologies of Lie algebra of vector fields, DAN,SSSR, 200(1971), 269-272.

24. I. M. Gel'fand - D. A. Kazdan - D. A. Fuks : Actions of infinite-dimensional Lie algebras, F. A. 6-1(1972), 10-15.

25. M. V. Losik : On cohomologies of Lie algebras of vector fields with coefficients in trivial identity representations, F. A. 6-1, (1972), 24-36.

26. M. V. Losik : Topological interpretation of homologies of diagonal complexes of Lie algebras of vector fields with trivial identity representations, F. A. 6-3(1972), 79-80.

27. V. W. Guillemin : Remarks on some results of Gelfand and Fuks, Bull. A.M.S. 78-4(1972), 539-540.

28 V. W. Guillemin : Cohomology of vector fields on a manifold, Advances in Math., 10(1973), 192-220.

29. J. Vey : Sur la cohomology de l'algebra des champs de vecteurs sur une varieté, C. R. Acad. Sc. Paris, 273(1971), 850-852.

[C] $\mathfrak{a}(M)$ と $\mathfrak{a}(n)$ の cohomology (nontrivial 係数)

30. M. V. Losik : On the cohomologies of infinite-dimensional Lie algebras of vector fields, F. A. 4-2(1970), 43-53.

31. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of Lie algebras of vector fields with nontrivial coefficients, F. A. 4-3(1970), 10-25.

32. K. Shiga : Stable range of some differential complexes,(preprint).

33. M. V. Losik : On cohomologies of Lie algebras of vector fields with nontrivial coefficients, F. A. 6-4(1972), 44-46.

34. C. Godbillon : Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, Seminaire Bourbaki, n 421, 1972-73.

[D] $\mathfrak{a}(M)$ または $\mathfrak{a}(n)$ の部分環の cohomology

35. V. N. Reshestnikov : On two cohomologies of Lie algebras of vector fields on a circle, Usp. Math. Nauk, 26-1(1971), 229-230.

36. V. N. Reshestnikov : Cohomologies of Lie algebras of vector fields on manifolds, vanishing at a given point, Usp. Math. Nauk, 27-1(1972), 251-252.

37 V. N. Reshestnikov : On cohomologies of Lie algebras of vector fields on manifolds with nontrivial coefficients, Dan,SSSR, 208-5(1973), 1041-1043.

38. V. I. Arnol'd : One dimensional cohomologies of Lie algebras of divergence-free vector fields and rotation number of dynamical systems, F. A. 3-4(1969), 77-78.

39. B. I. Rozenfel'd : One dimensional cohomologies of Lie algebras of contact vector fields, F. A. 4-2(1970), 91-92.

40. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Upper bounds for cohomologies of infinite Lie algebras, F. A. 4-4(1970), 70-71.

41. B. I. Rozenfel'd : Cohomologies of some infinite dimensional Lie algebras, F. A. 5-4(1971), 84-85.

42. I. M. Gel'fand - D. I. Kalinin - D. B. Fuks : On cohomologies of Lie algebras of Hamiltonian formal vector fields, F. A. 6-3 (1972), 25-29.

43. L. V. Gontyaroba : Cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on a line, Usp. Math. Nauk. 5(1972), 231-232.

44. L. V. Gontyaroba : Cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on a line, F. A. 7-2(1973), 6-14.

[E] foliationとの関係について

45. C. Godbillon - J. Vey : Un invariant des feuilletages de codimension un, C. R. Acad. Sc. Paris, Juin 1971

46. I. N. Bernstein - B. I. Rozenfel'd : On characteristic classes of foliations, F. A. 6-1(1972), 68-69.

47. A. Haefliger : Sur les classes caracteristiques des feuilletages, Seminaire Bourbaki, n 412, 1971-72.

48. R. Bott - A. Haefliger : On characteristic classes of Γ-folications, Bull. A.M.S. 78-6(1972), 1039-1044.

49. S. M. Vishik : On Characteristic classes and singularities of foliations, F. A. 6-4(1972), 71-72.

50. S. M. Vishik : Singularities of analytic foliations and characteristic classes, F. A. 7-1(1973), 1-15.

51. D. B. Fuks : Characteristic classes of foliations, Usp. Math. Nauk, 28-2(1973), 3-17.

[F] 代数多様体の上で

52. L. V. Gontyaroba : On cohomologies of Lie algebras of vector fields on algebraic curves, Usp. Math. Nauk, 27-1(1972), 243-244.

[G] 無限Lie環の分類

53. S. Kobayashi - T. Nagano : On filtered Lie algebras and geometric structures, III and IV, J. Math. Mech. 14(1965), 679-706, and 15(1966), 163-175.

54. Y. Matsushima : Sur les algebras de Lie linéaires semi-involutives, Colloque de Topologie de Strasbourg(1954), 1-17.

55. T. Morimoto - N. Tanaka : The classification of the real primitive infinite Lie algebras, J. Math. of Kyoto Univ. 10-2(1970), 207-243.

ここで，F. A.は Functional Analysis and its Application の略である。文中の引用は数字に[ ]をつけた。