数理解析研究所講究録
第 182 巻 1973 年 181-195

回転群の上の Haar Measure について.

京大　　下村宏彰

§0 序

この報告の目的は，無限次元・実ヒルベルト空間の上の，直交群 $O(H)$ における Haar Measure について，考えるものである。もちろん，このような測度は $O(H)$ が通常考えられるトポロジーで局所コンパクトではないから存在しない。
D. Shale [1] は有限加法的不変測度を構成したが，その方法が本質において，考えるヒルベルト空間の完全正規直交系 (C. O. N. S.) に依存するため，単にその測度だけではなく，定義域である σ-field も又，C. O. N. S. に依存するように思われる。そこで，base independent な測度空間を作れるかという問題は，単に応用だけではなく，それ自身において，興味ある問題となってくるが，ここではふれないことにする。ここでやりたいことは，Shale の有限加法的測度を完全加法的 (σ-additive) にする為には，$O(H)$ をどの程度大きな

空間にひろげればよいかということである。

§1.

この節ではまず有限次元直交群の Haar Measure の、構成を、土台の Euclid 空間の measure とむすびつけて、みなおすことにする。

R^n を、n 次元 Euclid space, $O(R^n)$ をその上の直交群とする。まず R^n の n 個の直積 $\prod_{i=1}^n R^n \simeq R^{n^2}$ を考えよう。

$x \in \prod_{i=1}^n R^n \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad x_i \in R^n \quad (i=1, 2 \cdots n)$

もし $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が代数的に、一次独立だとすれば、その Shmidt の直交化が考えられる。

ここで $G(x_1), G(x_1, x_2), \cdots, G(x_1, x_2 \cdots, x_n)$ を $x_1, x_2 \cdots x_n$ をその順序で直交化した n 個のものとする。

ここで、しばらく、R^n の C. O. N. S $e_1, e_2, \cdots, e_n$ をとって固定しよう。$e = \langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle$

Def 1.1

R^n の上の endmorphism $\xi_e(x)$ を、次のものとする

$x = (x_1, \cdots, x_n)$

$$\xi_e(x)\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i G(x_1, \cdots, x_i)$$

明らかに $\xi_e(x) \in O(R^n)$ であり、したがって ξ_e は $\prod_{i=1}^n R^n$

の，開盃な開集合から $O(R^n)$ の上への map となる。

ここで g_n を $\prod_{i=1}^{n} R^n$ の上の Canonical ~~Gaussian~~ Measure (mean 0 variance 1) として，set function μ を $\mu(E) = g_n(\xi_e^{-1}(E))$ でもって定義すると，μ は測度，total mass 1 の $O(H)$ 上の Haar measure となることはみやすい。

§2.

この節以降，H: separable, Hilbert space

$\dim(H) = \infty$, $\langle\cdot\rangle_H$, $\|\cdot\|_H$ スカラー積，ノルム

$\mathcal{L}^f = \{K;\ K \subset H$ なる subspace で $\dim(K) < \infty\}$

$\theta(K, H) = \{T;\ K$ から H への isometric mapping$\}$ として

記号を固定する。まず $\theta(K, H)$, $K \in \mathcal{L}^f$ における measure space の構成から話を始めよう。

K の c.o.n.s. $\langle e_1, \cdots, e_k\rangle = e$ $\dim(K) = k$ を1つとって固定する。$H^{(k)} = \prod_{i=1}^{k} H$ (H の k 個の直積) とおき，$H^{(k)}$ に直積位相を入れて考えると明らかにヒルベルト空間である。

$y = (y_1, \cdots, y_k)$ $y_k \in H$ $\qquad \|y\|_{H^k}^2 = \sum_{j=1}^{k} \|y_j\|_H^2$

§1で行ったと同様の議論により，$\xi_{e,k}$ を $H^{(k)}$ から $\theta(K, H)$ への onto mapping として定義できる。

しかしながら，有限次元の場合のように，rotationally inv-

ariant な σ-additive measure は存在しないから，我々は，canonical な Gauss cylindrical measure g_K，すなわち，χ の Bochner-Fourier 変換が
$\hat{g}_k(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|y\|^2_{H_k}\right)$ で与えられるものを，§1 の Gauss measure の代用としよう。

<u>Lemma 1.1</u>

$\mathfrak{B}_{K,e} \equiv \{ E;\ E \subset \mathcal{O}(K,H)\quad \xi^{-1}_{e,K}(E)$ が Gauss cylindrical measure g_K に関して本質的に cylinder set$.\}$ とおくと $\mathfrak{B}_{K,e}$ は $\mathcal{O}(K,H)$ の，上の field である．

ここに F が本質的に cylinder set とは，(略して e.c. g_K) $\exists\, G_1, G_2$, ; cylinder set $\quad G_1 \subset F \subset G_2$
$g_K(G_2 \setminus G_1) = 0$ なることをいう．

証明は明らかだから省略する．
次に $\mathfrak{B}_{K,e}$ の上で set function μ_K を
$\mu_{K,e}(E) = g_K(G_2) = g_K(G_1)$ (但し，$G_1 \subset \xi^{-1}_{e,K}(E) \subset G_2$
$g_K(G_2 \setminus G_1) = 0$) とおいて定義しよう。
$T \in O(H)$，$E \in \mathfrak{B}_{K,e}$ とする。
更に $T^{(k)}$; $H^{(k)} \longrightarrow H^{(k)}$ を
$T^{(k)}(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (Tx_1, \cdots, Tx_k)$ とすれば，

$T^{(k)}$ は orthogonal map であって $\xi_e \circ T^{(k)} = T \circ \xi_e^K$
$\xi_{e,K}^{-1}(TE) = T^{(k)}\xi_{e,K}^{-1}(E)$ より，$T\mathfrak{G}_K = \mathfrak{G}_K$
$\mu_{K,e}(TE) = \mu_{K,e}(E)$ である。すなわち field $\mathfrak{G}_{K,e}$ は $O(H)$ の，左からの作用で，閉じていて，$\mu_{K,e}$ は ~~f~~ left $O(H)$ invariant である。

§3,

次に，Kの次元をあげて これらの projective limit を考えよう。

$K, L \in \mathcal{L}^f$ $K \subset L$ として，L の c.o.n.s $\langle e_1, e_2 \dots e_l \rangle$ は K の c.o.n.s. $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ の順序をもったの延長であるとする。更に $\gamma_{L,K}$ を $\theta(L, H)$ から $\theta(K, H)$ への restriction map とする。

<u>Lemma 3.1</u>

$\gamma_{L,K}$ は，上に定義された各 field に関して，measurable であり，又 measure preserving map である。

$$\begin{tikzcd} H^L \arrow[r, "P_{L,K}"] \arrow[d, "\xi_{e,L}"'] & H^K \arrow[d, "\xi_{e,K}"] \\ \theta(L,H) \arrow[r] & \theta(K,H) \end{tikzcd}$$

証明は，右の図式が，可換であることと，（但し $P_{L,K}$ は H^L から H^K への projection）と $g_k = P_{LK}\, g_L$ なることに，注意すれば，出来る。

ここで L の c.o.n.s が必ずしも, K の c.o.n.s の延長でないと, 上の図式の可換性は, 成立しない。そこで話を功く進める為に, 次のような制限をもうける。H の c.o.n.s $\langle e_1, e_2, \cdots e_n, \cdots \rangle = e$ を1つとって, 固定する。更に $K_n = V(e_1, \cdots, e_n)$ とし, K_n の c.o.n.s. は, 順序もこめて, 上の順になっているとする。γ_{K_{n+1}, K_n} を $\gamma_{n+1, n}$ で又 γ_n を $O(H)$ から $\theta(K_n, H)$ への restriction map とする。さて $\mathcal{R}_{H, e} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{-1}(\mathcal{R}_{K_n, e})$ $\mu_{H,e}(\gamma_n^{-1}(E_n)) = \mu_{K_n, e}(E_n)$ とおけば $\mathcal{R}_{H,e}$ は $O(H)$ の上の field であり, $\mu_{H,e}$ は, その上の有限加法的 measure である ことは, みやすい。もちろん $O(H)$ の左からの作用で $\mathcal{R}_{H,e}$, $\mu_{H,e}$ は それぞれ不変である。
以上は土台のヒルベルト空間 H の measure space を $O(H)$ へ持ち込む話であったが, 一方, 有限次元回転群の作る Compact Group の Haar measure を利用して, 話ができないものかと, 考えるのは, ごく自然であろう。
これは §0 で述べた D. Shale [1] における基本的考え方であるが, 結果的には, この二つは, 同じものであるということを, 今から示そう。その為に次の定義をもうける。

Def 3.1

map $\pi_{K_n, M}$ を $\mathcal{O}(H)$ から $\mathcal{O}(K_n, M)$ への，次のものとする。ここで $M \in \mathcal{L}^f$ $\dim(M) \geq n$

$T \in \mathcal{O}(H)$, $P_M T e_1, \cdots, P_M T e_n$ が1次独立ならば

$$\pi_{K_n, M}(T)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i G(P_M T e_1 \cdots P_M T e_i)$$

$\beta(\mathcal{O}(K_n, M))$ を $\mathcal{O}(K_n, M)$ の通常の Borel field とし，$\mathcal{C}_{H,e}' = \bigcup_{\substack{E \in \beta(\mathcal{O}(K_n, M)) \\ M \in \mathcal{L}^f \quad n=1,2\cdots}} \pi_{K_n, M}^{-1}(E)$ とおくと

Lemma 3.2

$\mathcal{C}_{H,e}' \subset \mathcal{C}_{H,e}$ である.

(proof) $\pi_{K_n, M}^{-1}(E) = \gamma_n^{-1}(F)$

$F = \{T ;\ T \in \mathcal{O}(K_n, M)\quad S_M(T) \in E\}$,

$$S_M(T)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j G(P_M T e_1, \cdots P_M T e_j)$$

であるから，$\xi_{K_n, e}^{-1}(F)$ が $H^{(n)}$ の e.c. g_n であることを示せばよい。$x = (x_1, \cdots, x_n)$ とすると，

$x \in \xi_{K_n, e}^{-1}(F) \Longleftrightarrow x_1, \cdots, x_n$ は1次独立で $S_M(\xi_{K_n, e}(x)) \in E$

$$S_M(\xi_{K_n, e}(x))\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j G(P_M x_1, \cdots, P_M x_n)$$

より，$x \in \xi_{K_n, e}^{-1}(F)$ なることは，本質的に $P_M x_1, \cdots, P_M x_n$ で決まるから，$\xi_{K_n, e}^{-1}(F)$ は e.c g_n である.

よって $\mathcal{O}_{2H,e}'$ を含む最小の field は $\mathcal{O}_{2H,e}$ に含まれる。逆に次のこともいえる。

<u>Lemma 3.3</u>

$E \in \mathcal{O}_{2K,H}$ とすると

$\exists M \in \mathcal{L}^f$ $\exists n$, Integer $\exists F \in \mathcal{B}(O(K_n, M))$

$\pi_{K_n,M}^{-1}(F) \subset E$ であり $\mu_{H,e}(\pi_{K_n,M}^{-1}(F)) = \mu_{H,e}(E)$

次に $N, M \in \mathcal{L}^f$ $N \supset M$ のとき、$O(K_n, N)$ から $O(K_n, M)$ への onto map $\pi_{K_n,N,M}$ を定義し（と同様に CP_M の代りに N から M への projection を使う）、定義して $\mu_{K_n,M} \equiv \pi_{K_n,M}\,\mu_{H,e}$ とおいて $O(K_n, M)$ の上の set function をつくると、

i) $\mu_{K_n,M}$ は $O(M)$ left, $O(K_n)$ right invariant な total mass 1 の unique σ-additive measure である。これがって、K_n の c.o.n.s に depend しない。

ii) $\pi_{K_n,N,M}\,\mu_{K_n,N} = \mu_{K_n,M}$ となる。

それ故、上の二つの性質により $\{O(K_n, M), \pi_{K_n,M}, \mu_{K_n,M}\}$ は、本質的に projective limit space を作る。

§4.

この節では $\{\Theta(K_n, M), \mathcal{T}(K_n, W, M), \mu_{K_n, M}\}$ の projective limit space を考察し、実際に、この空間に measure space がえられることを示そう。

$\mathcal{L}^0(H, H^a)$ を H から、H の algebraic dual H^a への one to one linear operator の全体とする。

我々は、この空間において、H の c.o.n.s. $e = \langle e_1, \dots e_n \dots \rangle$ に depend する同値関係 $\sim_{(e)}$ を次のように設定する。

<u>Def 4.1</u>

$X \sim_{(e)} Y$ in $L^0(H\ H^a)$ とは

$\exists \{d_{ij}\}_{\substack{i=1,2\dots\\ j=1,2\dots}}$; $d_{nn} > 0$ (for all n)

が存在して

$$X(e_1) = d_{11} Y(e_1)$$
$$X(e_2) = d_{21} Y(e_1) + d_{22} Y(e_2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$X(e_n) = d_{n1} Y(e_1) + \dots + d_{nn} Y(e_n)$$
$$\cdots\cdots$$

となることをいう。

上の $\sim_{(e)}$ から導いた商空間を $\mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim_{(e)}$ とする。

もしHが、有限次元ならば H と H^a とを同一視すること

とによって $\mathcal{L}^0(H, H^a)$ は，単に，正則な行列の全体となり，$\mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e)$ は≡角行列によってidentifyこれもの，すなわち，直交行列群となる。

$\tilde{X} \in \mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e)$ として $\tilde{X}$ の中から，1つ勝手な，代表元 $X \in \mathcal{L}^0(H, H^a)$ をとる。$M \in \mathcal{L}^f$ とすれば，$X(e_1), \cdots, X(e_n) \in H^a$ を，M へrestrictされたものは，M が有限次元であることより，連続，したがって $\exists 1, m_i \in$ $(i=1,2,\cdots,n)$ があって

$$\langle X(e_j)\ m\rangle = \langle m, m_j\rangle_H \quad \text{for all } m \in M \quad j=1,2,\cdots,n$$

となる。

$m_1, m_2, \cdots, m_n$ が1次独立ならば，その Shmidt の直交化 $G(m_1), \cdots, G(m_1, \cdots, m_n)$ が，考えられるが，同値関係の定義より，上の n 個のベクトルの1次独立性，及び直交化されたベクトルは代表元のとりかたによらない。よって次のように，定義することが，可能である。

<u>Def 4.2</u>　$\dim(M) \geq n$　$M \in \mathcal{L}f$ とするとき map $\tilde{\pi}_{K_n, M}$ を $\mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e)$ から $\theta(K_n, M)$ への次のものとする

$$\tilde{\pi}_{K_n, M}(\tilde{X})\left(\sum_{j=1}^n c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n c_j G(m_1, \cdots m_j).$$

Lemma 4.1

$N \supset M$　$N, M \in \mathcal{L}^f$　$\dim(M) \geq n$ のとき
$\widetilde{\pi}_{k_n,M} = \pi_{k_n,N,M}\,\widetilde{\pi}_{k_n,N}$ である。（但し適当な
$\mathcal{L}^0(H\ H^a)/\sim(e)$ の subset において）

Theorem 4.1

$\{\pi_{k_n,N,M}\ \ \theta(k_n, M)\}$ の projective limit は
Def 4.2 の各 $\widetilde{\pi}_{k_n,M}$ を projection と考えることにより $\mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e)$ と本質的に同一視できる。

Lemma 4.1 と Theorem 4.1 の証明は長くなるので省略する。

$O(H)$ は $\mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e)$ に natural に imbedd できることに注意しよう。更に、各 $\widetilde{\pi}_{k_n,M}$ を measurable にする，最小の σ-field を $\mathcal{B}_e$ とすれば，

Theorem 4.2

σ-field $\mathcal{B}_e$ の上に unique な σ-additive measure μ_e が存在して，次の条件をみたす。

i) $\mu_e(\mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e)) = 1$;

ii) $\widetilde{\pi}_{k_n,M}\,\mu_e = \mu_{k_n,M}$;

iii) μ_e は $O(H)$ left invariant.

<u>Theorem 4.3</u>

Hの異なるc.o.n.s $e=\langle e_1, e_2, \dots \rangle$ に対し
$e'=\langle e_1', e_2', \dots \rangle$

と measure space $\langle \mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e), \mathfrak{B}_e, \mu_e \rangle$ と $\langle \mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e'), \mathfrak{B}_{e'}, \mu_{e'} \rangle$ とは互いにσ-isomorphicである。

以上より $O(H)$ を $\mathcal{L}^0(H, H^a)/\sim(e)$ まで、ひろげれば、σ-additive measure の存在は、保証されることと、Hのc.o.n.sを変えても、σ-isomorphicになることがわかった。

§5.

§4で作った、空間は、代数的なものである。そこで、この節では、これをヒルベルト空間のわく内の拡張でおさめることを、考えたい。

EをHの核型拡大，$H \hookrightarrow E$ すなわち，うめこみ map T_0 が Hilbert-Shmidt Type の operator であるとする。そのとき

<u>Theorem 5.1</u> (Minlos)

HのEの連続は，すべての cylindrical measure μ に対し

こで $T_0\mu$ は σ-additive extention をもつ。

T_0 を適当に spectre 分解することによって，$h_1, h_2 \cdots, h_n \cdots\cdots$ が H の c.o.n.s. であって，同時に E において直交するようにできる。$\|h_i\|_E = \lambda_i$ とおくと $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty$. $h_i/\lambda_i =: e_i$ とおくと $e_1, \cdots, e_n \cdots$ は E の c.o.n.s である。この節では，二つのヒルベルト空間，H, E を考えるので，混乱をふせぐため，これまでの記号に index H, E を，つけてあらわすことにする。

まず，$T \in o(H)$ に対して，$S(T)$ を

$S(T)(\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j G_E(Te_1, \cdots, Te_j)$ なる

E の上の isometric operator（その全体を $\mathcal{O}(E, E)$）とする。S は $o(H)$ から $\mathcal{O}(E, E)$ への map であると考えられる。g を H の上の canonical Gauss cylindrical measure とすれば，Th 5.1 より，$T_0 g = G$ は E の上の σ-additive measure である。G の n 個の直積を G_n

$G_n = G \otimes \cdots \otimes G$ とする。

さて §2, §3 で行った measure space の構成は，$\mathcal{O}(E, E)$ 上ついても，同様に行うことができる。但し，その際 e.c g_k の所を e.c. G_k に変えるものとする。

以後 H, E の c.o.n.s をこの節の，始めのものとして

$\langle h\rangle$, $\langle e\rangle$ で表わし E の可算個の直積を $E^{(\infty)}$ とする

Lemma 5.1

S は field $\mathfrak{A}_{H,h}$, $\mathfrak{A}_{E,e}$ に関して measurable map である。

更に X の上.

Theorem 5.2

$S\mu_{H,h}$ は σ-additive extention をもつ。

証明は $\mathfrak{A}_{E,e}$ の上で $S\mu_{H,h}$ が、次の σ-additive measure ν と一致することに注意すればよい。

G_∞ を $E^{(\infty)}$ の上の G の可算個の直積 measure とする。

$\xi_{e,E}$ を $E^{(\infty)} \longrightarrow \Phi(E,E)$ への onto map で

$$\xi_{e,E}((x_1, x_2, \dots))\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j\right) = \sum_{j=1} c_j G_E(x_1, \dots, x_j)$$

なるものとし、

$$\beta = \{A : A \subset \Phi(E,E) \quad {}^\exists F_1 \subset \xi_{e,E}^{-1}(A) \subset {}^\exists F_2 \quad F_1, F_2 \text{ Borel set in } E^\infty \quad G_\infty(F_2 \setminus F_1) = 0\}$$

なる σ-field β の上で、$\nu(A) = G_\infty(F_2)$ とおいて σ-additive measure ν を作ると、β は $\mathfrak{A}_{E,e}$ を含んでいて $\mathfrak{A}_{E,e}$ の上で ν と $S\mu_{H,h}$ は一致する。

Bibliography

1 D.Shale, Invariant Integration over the infinite dimensional orthogonal group and related spaces, Trans. Amer. Math. Xoc. 124 (1966) 148-157.

2 Y.Yamasaki, Invariant measures of the infinite dimensional rotation Groups, Publ. of the research Institute for Math. Soc. Vol.8 No.1 (1972)

3 Y.Yamasaki, Projective limit of Haar measures on O(n), Publ. of the research Institute for Math. Soc. Vol.8 No.1 (1972)