数理解析研究所講究録
第183巻 1973年 1-7

Inseparable coverings of surfaces

M. I. T. M. Artin

この一連の講演で，次の四つの話題について述べる。

1) Inseparable coverings of surfaces
2) Supersingular K3 surfaces
3) Elkik's theorem
4) Déformations of cones

ここでは，第一の話題をとりあげる。

k を標数 $p>0$ の代数的閉体とし，K を k 上の2変数代数函数体とする。このとき，明らかに $[K:K^p]=p^2=[K^{\frac{1}{p}}:K]$ がなりたつ。よって $K \supsetneqq L \supsetneqq K^p$ なる中間体 L を考えれば，$[L:K^p]=p$, $K=L(\alpha^{1/p})$ $(\alpha \in L)$ となっている。以後このような L をとりあつかう。

例. K を k 上の2変数有理函数体 $k(x,y)$ とする。このとき，$K^p=k(x^p,y^p)=k(x',y')$ $(x'=x^p,\ y'=y^p)$ となる。k の標数が 0 の場合，よく知られているように Castelnuovo の

定理から，$k(x,y)$ の部分体Lで k 上の超越次数が2のものはやはり有理函数体 $k(u,v)$ になる。更にZariskiによって示されたように，k の標数が $p>0$ のときでもKがL上分離代数的なら，$L=k(u,v)$ となる。一般には，$L=k(x',y')(f^{1/p})$ となっている。

Kが一般の場合に戻ろう。$K\supset L\supset K^p$ とする。Jacobsonの exponent 1 の純非分離拡大に関するガロア理論により，この中間体Lには K/k の微分全体のなす algebra Der (K) の restricted p-Lie subalgebra $\mathfrak{a}$ が束双対同型で対応する。すなわち $\mathfrak{a}\ni\theta$ に対し，$\theta^p\in\mathfrak{a}$，又，$\theta_1,\theta_2\in\mathfrak{a}$ に対し，$[\theta_1,\theta_2]\in\mathfrak{a}$．このLと $\mathfrak{a}$ の対応は次のように与えられる。$K\supset L\supset K^p$ に対し，$\mathfrak{a}=\{\theta\in \mathrm{Der}(K)\mid\theta(L)=0\}$，又 $\mathfrak{a}\subset \mathrm{Der}(K)$ に対し，$L=\{a\in K\mid \theta(a)=0 \text{ for any } \theta \text{ in } \mathfrak{a}\}$．今の場合，$[K:K^p]=p^2$ であるから，$\dim_K \mathrm{Der}(K)=2$．よって，$K\supsetneqq L\supsetneqq K^p$ なら，Lに対応する Lie subalgebra $\mathfrak{a}$ の rank は1．よって，K^* の元 a による積を除いて，Der (K) の一つの元 θ によって，$\mathfrak{a}$ は与えられる。このとき，$\theta^p=f\theta$, $f\in K^*$ となっている。そして $L=K^\theta=\{a\in K\mid\theta(a)=0\}$ となっている。

今 K/k の non-singular model X を考える。このとき，K^p/k の non-singular model として，X^p がとれ，しかも Frobenius map $f: X\longrightarrow X^p$ は degree p^2 の finite かつ flat な

morphism になっている。このとき，与えられた中間体Lに対し，L/k の model Yを適当にとり，$f: X \to X^p$ が，$X \to Y \to X^p$ と分解するように出来る。何故なら，$L^{1/p} \supset K \supset L \supset K^p$ であるから，Xの$L^{1/p}$ における正規化モデルを Zとするとき，$Y = Z^p$ とおけばよい。したがって，Yは通常 non-singularではない。さて，θを $K\theta = \mathfrak{a}$ が中間体Lに対応する Der(K) の元とする。このとき，θはX上の接ベクトル場と考えられる。今，$\pi: X \to Y$ とすると，このπによってθから得られるY上のベクトル場は0である。一般に $f: X \to X^p$ (f: Frobenius map) によって，X上のすべてのベクトル場はX^p上で0にうつされる。

ここで morphism $\pi: X \to Y$ の fibres は

$$(\text{trancated exp})\,\theta = 1 + t\theta + \frac{t^2}{2!}\theta^2 + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\theta^{p-1}$$

と考えられる。$x \in X$に対し，$X \to Y$ の xにおける fibre は rank p の finite algebra で $k[t]/(t^p)$ に同型になる。

次に，X，Yの invariants について考える。$f: X \to X^p$ の invariants はすべて等しい。C'をX^p上の curve とするとき，$f^{-1}(C') = pC$ となることから，fによって与えられる対応 $\mathrm{Pic}\, X^p \to \mathrm{Pic}\, X$ は，$\mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{\times p} \mathrm{Pic}\, X$ によって与えられる。今，$\mathrm{Pic}\, Y$を $\mathrm{Pic}(Y - \mathcal{S})$ によって定義する。

(ここで，S は Y の特異点からなる有限集合)。すなわち，Y の Weil 因子 の全体とする。 $\mathrm{Pic}\, X^p \to \mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, X$ において，$\mathrm{Pic}\, Y \longrightarrow \mathrm{Pic}\, X$ は finite kernel, finite coker をもつ。特に，$\dim \mathrm{Pic}\, Y = \dim \mathrm{Pic}\, X$ を得る。$\bar{Y}$ を Y の resolution of singularities とすると，$\mathrm{Pic}^\circ \bar{Y} \subset \mathrm{Pic}\, Y$, $\dim \mathrm{Pic}\, \bar{Y} = \dim \mathrm{Pic}\, X$ となる。もし $h^2(\bar{Y}, \theta_{\bar{Y}}) \neq h^2(X, \theta_X)$ なら，この違いは，Pic における nilpotents から生ずる。

Problem 1. (Abhyankar) If we allow blowing up X, what normal form can one get for local structure of Y ?

Problem 2. Given Y non-singular surface, does there exist $X \xrightarrow{\text{finite}} Y$ such that Pic X is reduced ?

次に，degree p の morphism $\pi : X \longrightarrow Y$ において，X, Y が共に non-singular のときを考える。Y は $K = k(X)$ の微分 θ に対応しているとし，$Y = X/\theta$ とかくことにする。このとき，X の canonical divisor K_X を K_Y によって計算することを考える。その答は次の通りである。

$$K_X = \pi^{-1}(K_Y) + (p-1)(\mathrm{div.\ of}\ \theta).$$

（ここで，θ はこの場合，isolated 0 をもちえないことを注意しておく。）

（証明）　$W_X = \wedge^2 \Omega^1_X$，　$W_Y = \wedge^2 \Omega^1_Y$　とおくとき，Grothendieck によれば，$W_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, W_Y)$（as $\mathcal{O}_Y$-module）．$W_X \otimes \pi^* W_Y^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$ となるから，右辺を計算すればよい。今，$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ が split するから，$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = \mathfrak{a} = \mathcal{O}_X \otimes M$ なる分解を考える。ここで，$M^p = \mathcal{O}_X$，M は局所的に 1 つの元で与えられ，fibres は $k[z]/z^p = 0$．

このとき，　$\mathfrak{a}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{a}, \mathcal{O}_X) = \pi^*(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y))$

$$\mathfrak{a}^*/M\mathcal{O}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$$

がなりたち，これから，$M^{p-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)^{-1}$ が得られる。一方，$L \subset T$ を θ で生成される line subbundle とするとき，　$T \simeq L \oplus T/L$（locally）。そして，$T \otimes \Omega^1 \to \mathcal{O}_X$ なる natural morphism を考えることにより，$L \simeq (M/M^2)^{-1}$ が分る。　よって

$$L^{\otimes p-1} \simeq M^{p-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)^{-1} \qquad \text{（証了）}$$

Problem 3.　What surfaces X admit holomorphic tangent fields $\theta \in H^0(X, T)$?

この問題については，二つの場合が考えられる。

(a) $\theta_1 \wedge \theta_2 \neq 0$ となるような二つの tangent fields θ_1, θ_2 が存在する。

(b) すべての gloval tangent fields は，T の一つの line subbundle L に含まれる。このとき，$\theta^p // \theta$ (pararell). よって，$Y = X/\theta$ が存在する.

定理。case (a) は classical situation のときのみおこる。すなわち，X がアーベル多様体か，有理曲面か，elliptic ruled のときのみ。

(b) の場合，tangent field をもつ K3 曲面 (i.e., $P_g = P_a = 1, K = 0$) が存在するかどうか知られていない。

定理。X が K3 曲面か Enriques 曲面 (i.e., $P_g = P_a = 0,\ 2K = 0$) のとき，もし holomorphic tangent field θ をもてば，$Y = X/\theta$ は有理曲面である。

系. k の標数が 2 でないなら，Enriques 曲面は，holomorphic tangent field をもたない。

k の標数が 2 のときには，unirational K3 曲面が存在す

る。この曲面については，tangent field が存在しないように思われる。

Problem 4. Classify unirational surfaces.

すなわち，X が unirational のとき，

(a) Pic は dim 0, (b) $b_2 = \rho =$ rank of Nerin-Severi group $N(X)$, (c) ?

Problem 4'. Working locally with k[[x, y]] or k{x, y}, what local rings are purely inseparable over these rings ?

Problem 5. Given a surface Y, does there exist $X \longrightarrow Y$ generically finite such that X lifts to characteristic 0 ?

（柳原 弘志 記）