数理解析研究所講究録
第183巻 1973年 8-17

8

Supersingular K3 surfaces

M.I.T. M. Artin
(東大理 塩田徹治記)

標数 $p>0$ の曲面を研究する際の二つのテクニックと、その（楕円的な）K3曲面への応用について述べる。

§1. 形式的 Brauer 群

これについては数年前 Mazur と私が研究したが未発表である。X/k を proper scheme とするとき

<u>問題</u> コホモロジー群 $H^q(X, G_m)$ を調べよ。

（ここに G_m は乗法群）

$q=0,1$ のとき $H^q(X, G_m)$ は k 上の group scheme の構造をもつが、$q \geq 2$ のとき一般には $H^q(X, G_m)$ は代数的な構造をもたないことが知られている。

<u>例</u> $q=2$, かつ解析的な場合 ($k=\mathbb{C}$). 完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{hol} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_{hol}^{\times} \longrightarrow 0$$

から 次のコホモロジーの完全列を得る：（$\mathcal{O}=\mathcal{O}_{hol}$ とかいて）

$$\underset{\text{有限生成}}{H^2(X,\mathbb{Z})} \longrightarrow \underset{\text{vector space}/\mathbb{C}}{H^2(X,\mathcal{O})} \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}^\times) \longrightarrow \underset{\text{有限生成}}{H^3(X,\mathbb{Z})}.$$

従って $H^2(X,\mathcal{O}^\times)$ の"連結成分"は $H^2(X,\mathcal{O})/H^2(X,\mathbb{Z})$ で与えられるが、一般に $H^2(X,\mathbb{Z})$ の像は $H^2(X,\mathcal{O})$ において discrete とならないから 商空間 $H^2(X,\mathcal{O})/H^2(X,\mathbb{Z})$ は よい構造をもたない。なお、代数的構造層 $\mathcal{O}$ については

$$H^2(X,\mathcal{O}^\times) = \text{the torsion part of } H^2(X,\mathcal{O}^\times_{hol})$$

となっている。

さて $H^q(X,G_m)$ の 0-class の変形を考える。即ち、A を k 上有限次元の代数，$S'=\mathrm{Spec}(A)$，$X'=X\times_k S'$，ε を augmentation $A\to k$ のひきおこす morphism $X\to X'$ とするとき

$$A \rightsquigarrow \mathrm{Ker}\{H^q(X',G_m) \xrightarrow{\varepsilon^*} H^q(X,G_m)\}$$

を考える。Schlessinger理論により、次のことが分る。

<u>Cor.</u> (1) a versal formal deformation (hull) が存在する。

(2) $H^{q-1}(X,G_m)$ が smooth hull をもてば、（H^qに関する）universal deformation が存在。

(3) $H^{q+1}(X,\mathcal{O})=0$ ならば hull は smooth.

(4) もし (2), (3) が成立すれば hull は k 上の smooth formal group で その次元 $= \dim H^q(X, \mathcal{O})$.

今 X を Pic X が smooth であるような曲面とし $q = 2$ に対し上記のことを適用する。仮定より (2), (3) が満たされるから formal group が得られる。

__Def.__ この formal group を formal Brauer group とよび、$\widehat{Br}\,X$ とかく。

$$\dim \widehat{Br}\,X = h^{0,2} = \dim H^2(X, \mathcal{O}).$$

(注意. 標数 0 のとき 上の formal group は vector group $H^q(X, \mathcal{O})$ $\left(\xrightarrow{\exp} H^q(X, \mathcal{O}^\times)\right)$ の完備化 で与えられる。)

以下 X を (標数 $p > 0$ の) K3 曲面とする。定義により X の不変量は

$$p_g = p_a = 1, \quad K = 0 \quad . \quad (\Rightarrow b_2 = 22).$$

で与えられる。従って $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ だから Pic X は smooth, かつ $h^{0,2} (= p_g) = 1$ だから $\widehat{Br}(X)$ は 1-parameter formal group となる。その height を h とする; i.e. $p^h = \mathrm{rank}\left(\ker(\widehat{Br} \xrightarrow{p} \widehat{Br})\right)$, $1 \le h \le \infty$。
$h = 1, 2$ or ∞ なる 1-par. formal group は夫々

G_m (乗法群), supersingular elliptic curve,

or G_a (加法群)

に対応する formal group (i.e. その完備化) である。

一般に 曲面 X の 2次元 Betti 数を b_2, Picard 数を ρ ($\rho = \mathrm{rank}\, NS(X)$) とすると $b_2 \geq \rho$ であるが、標数 0 のとき より強い古典的公式が成立する：

$$b_2 - \rho \geq 2h^{0,2}$$

(この公式は 標数 $p>0$ のとき一般に成立たない) $p>0$, X が K3 のとき $\widehat{Br}X$ の height h は 次のように Picard 数 ρ に関係している：

<u>Theorem</u>. X は 標数 0 に lift できると仮定する。もし $\widehat{Br}X$ の height $h < \infty$ ならば

$$b_2 - \rho \geq 2h$$

<u>Cor</u>. 同じ仮定の下に ($b_2 = 22$ に注意)

$$h < \infty \Longrightarrow \begin{cases} h \leq 10 \\ \rho \leq 22 - 2h \leq 20 \end{cases}$$

$$b_2 = \rho \Longrightarrow h = \infty \qquad (\text{逆は?}$$ 下記参照 $)$

<u>Def</u>. $b_2 = \rho$ なる K3 曲面を <u>supersingular K3 surface</u> とよぶ。

任意の標数 $p>0$ において supersing. K3 が存在することが知られている (cf. Shioda [2]).

12

Conjecture (for any surface) もし $\hat{Br}$ が p^ν でき'える'ならば

$b_2 = \rho$?

Theorem X を elliptic K3 surface とすると.

$h = \infty \iff \rho = 22 \ (= b_2)$.

i.e supersingular

さて height h の formal group における "p 回の和" (群における p 倍に相当) は.

$$k[[x]] \longrightarrow k[[x]]$$

$$x \longrightarrow \underset{\neq 0}{a_{p^h}} x^{p^h} + \cdots$$

で表わされる。

そこで K3 surfaces の族が与えられたとすると.

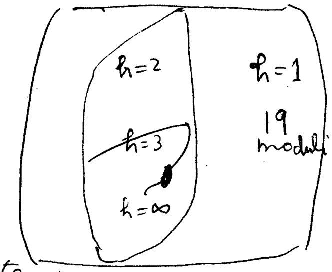
formal group law, 従って a_{p^h}, の係数は代数的に変るから. 次のことが分る:

Cor "height が 1 増える" ということは.

Codim ≤ 1 の条件である。

K3 surfaces の moduli 数は(少くとも) 19 だから.

$$\begin{cases} h = r \text{ なる K3 の moduli 数} \geq 20 - r \\ h = \infty \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \geq 9 \ (=?) \end{cases}$$



かように. supersing. K3 は非常に特殊ながら. 多くの parameters に依存している。

§2. Flat duality

C を体 k 上の smooth curve とする。標数 0 のときは H^q と H^{2-q} $(q=0,1)$ の間に Poincaré duality がある。標数 p のとき、C 上の group scheme を考えることが重要である。A を finite flat, comm. group scheme on C とすると、flat cohomology 群

$$H^q_{fl}(C, A)$$

が定義される。これを functorial に考えると、その上に代数的構造が入る。すなわち、$\pi : C \longrightarrow S = \mathrm{Spec}(k)$ の任意の base change $S' \to S$ により、functor

$$\underline{H}^q(A) = R^q\pi_* A \quad : \quad (\mathrm{Schemes}/S)^\circ \longrightarrow (\mathrm{Sets})$$

が得られるが、

<u>Theorem</u>.
$$\begin{cases} \underline{H}^q(A) \text{ は任意の } q \text{ について group scheme} \\ \underline{H}^q(A) = 0 \qquad q > 2 \\ \underline{H}^0 : \text{finite group scheme} \\ \underline{H}^1, \underline{H}^2 : \text{extensions of finite gr. sch. by unipotent groups.} \end{cases}$$

更に Poincaré duality が予想される (Grothendieck)。すなわち、A の Cartier dual を $A^D = \underline{\mathrm{Hom}}(A, G_m)$ とするとき、$\underline{H}^q(A)$ と $\underline{H}^{2-q}(A^D)$ の、$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に値をもつ duality が期待される。しかし $\underline{H}^q(A)$ は infinitesimal

part を一般に含んでいるから それを無視したものを $H^q(A)$ とかく: $H^q(A) = \underline{H}^q(A)$ / infinitesimal part.
この (infi. part) を無視した quasi-alg. gr. scheme の category (それは abelian cat. になる) においては

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \\ \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{G}_a \end{cases}$$

が成立する。

<u>Conjecture</u> $H^{\cdot}(A) \simeq \underline{R\,\mathrm{Hom}}(H^{\cdot}(A^D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

今 $H^q(A)$ の unipotent part, discrete part をそれぞれ $U^q(A)$, $D^q(A)$ と表すとき (i.e.

$$0 \to U^q(A) \longrightarrow H^q(A) \longrightarrow D^q(A) \to 0 .)$$

これらの群の間には次の duality が成立つことになる:

$$\begin{array}{ll} D^0 & U^0 = 0 \\ D^1 & U^1 \\ D^2 & U^2 . \end{array}$$

(即ち unip. parts は ふつうの top manifold の整係数 cohomology $H^q(\ , \mathbb{Z})$ の torsion part のように振舞う.)

以上 C が curve の場合である。高次元の多様体については coeff. module として何が適当か明らかでないが、surfaces については次のことが示されるであろう:

$A = \mu_{p^\nu}$ ととると、これは auto-dual coeff. sheaf.

$$0 \longrightarrow U^q(\mu_{p^\nu}) \longrightarrow H^q(\mu_{p^\nu}) \longrightarrow D^q(\mu_{p^\nu}) \longrightarrow 0$$

について、次の duality が成立つ.

$$\begin{array}{ll} D^0 = 0 & U^0 = 0 \\ D^1 & U^1 = 0 \\ D^2 & U^2 \\ D^3 & U^3 \\ D^4 = 0 & U^4 = 0 \end{array}$$

上記のことを、supersingular K3 X に適用する。仮定より、$\mathrm{Pic}\, X = L \simeq \mathbb{Z}^{22}$ は、交点数$(\ ,\ )$ で与えられる二次形式をもった格子群である。L は even (i.e. $(u,u) \equiv 0 \mod 2$ for all $u \in L$), signature $(+1, -21)$ ($\because$ Hodge index th. による), かつ判別式 $\det(L) = -p^\nu$ をもつ。さて、Kummer exact sequence

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

から exact sequence

$$L \xrightarrow{p} L \longrightarrow H^2(\mu_p) \longrightarrow Br(X) \xrightarrow{p} Br(X)$$

を得る。X が $h = \infty$ であることより $Br(X) \xrightarrow{p} Br(X)$ は 0-map であることが分る。故に

$$\begin{cases} U^2(\mu_p) = \mathbb{G}_a \\ D^2(\mu_p) = \text{some } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\text{-vector space} \\ \qquad\qquad\quad \text{with non-deg. sym. form} \end{cases}$$

$V = \{ v \in L \mid (v, w) \equiv 0 \mod p,\ \forall w \in L \}$ とおくと.
次の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
V \arrow[r, "\text{"period map"}"] \arrow[d] & \mathbb{G}_a (= U^2) \arrow[r] \arrow[d] & Br \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
L \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mu_p) \arrow[r] \arrow[d] & Br \arrow[r] & 0 \\
D^2(\mu_p) \arrow[r, equal] \arrow[d] & D^2(\mu_p) \arrow[d] & & \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

<u>Facts</u>. $L^* = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})\ (\supset L)$ とおくと

(1) L^*/L は elementary p-group

(2) $|V/pL| = -\det L = p^{2\sigma_0}$, $(\sigma_0 \overset{\geq 1}{\in} \mathbb{Z})$ if $p \neq 2$.

(3) $|D^2(\mu_p)| = p^{2\sigma}$, $\sigma + \sigma_0 = 11$

(4) $1 \leq \sigma_0 \leq 11$ (多分 $\sigma_0 \leq 10$?)

<u>Theorem</u>. X が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された supersing. (elliptic) K3 surface とすると $|Br(X)|$ を ζ-函数で表わす Tate の公式 ([3] の予想(C)) が成立つ。

注意. elliptic K3 surface / $\mathbb{F}_q$ に関する Tate 予想 ("Picard 数 = ζ の pole q^{-1} の位数") は最近 Artin, Swinnerton-

Dyer によって証明された [1]. 従って(cf.[3])上にいう Tate の公式の non-p part に関する主張は、任意の elliptic K3 /$\mathbb{F}_q$ について証明された訳である。上の Th. は supersing. なものについて、さらに p-part についても正しいことを主張している。

参考文献

[1] M. Artin, H.P.F. Swinnerton-Dyer, The Shafarevich-Tate Conjecture for pencils of elliptic curves on K3 surfaces, to appear in Invent. Math.

[2]. T. Shioda, Algebraic cycles on certain K3 surfaces in characteristic p, Abstract for Manifold Conference, 1973.

[3] J. Tate, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Sem. Bourbaki 1965/66. n°305

付記. 最後の Th. は目下の所 Flat duality を仮定した上で証明できているのである。