数理解析研究所講究録
第183巻 1973年 31-50

$\mathbb{A}^2$ の rational ruled surfaces への埋め込みについて

京大 理数　森 重文

§1. 序

Morrow [1] において、$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の minimal normal compactification (の boundary の configuration) が決定されているが、これから得られる標数 p の場合の結果 (c.f. Lemma 4) を参考にして次の問題を考える。

問題: k を代数的閉体 (標数 ≥ 0) とし、non-sing. algebraic surface S、non-sing. proj. surface F (S と F は birational) を与え、すべての embedding $S \to F$ を決定もしくは分類せよ。

しかし、これでは一般的すぎるので、$S = \mathbb{A}^2$, F としては rational ruled surfaces ($F_0, F_1, \cdots$ c.f. Nagata [1]) をとる。

Morrow [1] では boundary の状態に制限がついており、この問題では boundary の状態は全く制限が (見かけ上は) 付いていないから、Morrow [1] から直ちに結論が得られるわけではない。ここでは embedding を分類し、すべての embedding を得る

方法を与えることを目標にしている。

話の進みぐあいで、一般的なcommentを§3に持っていってしまったので話がちぐはぐになっている所は§3を見て下さい。（何も書いてないかも知れないけれど。）

§2. 例とbirat. correspondences J, R, L. の定義、そして結論.

<u>Example 1.</u> $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{i} \mathbb{P}^2$ を任意のembeddingとする。$l = \mathbb{P}^2 - i(\mathbb{A})$ はlineになっている（c.f. <u>Th. 0</u>）。$l \ni p$ をとる。

$\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\alpha_{-1}} dil_p \mathbb{P}^2 = F_1 \underset{\mathrm{df.}}{=} H_1$ $dil_p(p) = S_{-1}$, $dil_p[l] = g_{-1}$ とおく。

$g_{-1} - S_1 \ni {}^{\forall} g$ について elm_g を行なえば $elm_g[S_{-1}] = S_0$, $elm_g(g_{-1}) = g_0$

embedding $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\alpha_0} H_0$ $H_0 - \alpha_0(\mathbb{A}^2) = S_0 \cup g_0$, $(S_0^2) = 0$, $(g_0^2) = 0$

更に $g_0 - S_0 \ni g'$ をとり同様な事をくりかえして、$n \geq 0$ について

embedding $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\alpha_n} H_n$ $H_n - \alpha_n(\mathbb{A}^2) = S_n \cup g_n$, $(S_n^2) = n$, $(g_0^2) = 0$

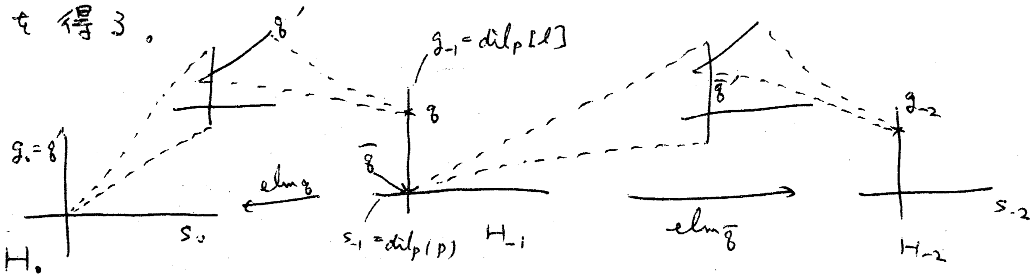
又 $g_{-1} \cap S_{-1} \ni g$ について elm_g を行なえば

embedding $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\alpha_{-2}} H_{-2}$ $H_{-2} - \alpha_{-2}(\mathbb{A}^2) = S_{-2} \cup g_{-2}$, $(S_{-2}^2) = -2$, $(g_{-2}^2) = 0$

これをくりかえして $n \leq -1$ についても

embedding $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\alpha_n} H_n$ $H_n - \alpha_n(\mathbb{A}^2) = S_n \cup g_n$, $(S_n^2) = n$, $(g_n^2) = 0$

を得る。



Example 2 rational ruled surface から、2本の section を除いた残りが $\mathbb{A}^2$ になっている例.

example 1 の α_n ($n \geq 1$) をとる。

$s_n - g_n \ni {}^\forall p_1$ をとる

右図を参照(シロマルの中は int. number)

step(1) 〜 step(n+1)

s_n 上の point での blow up.

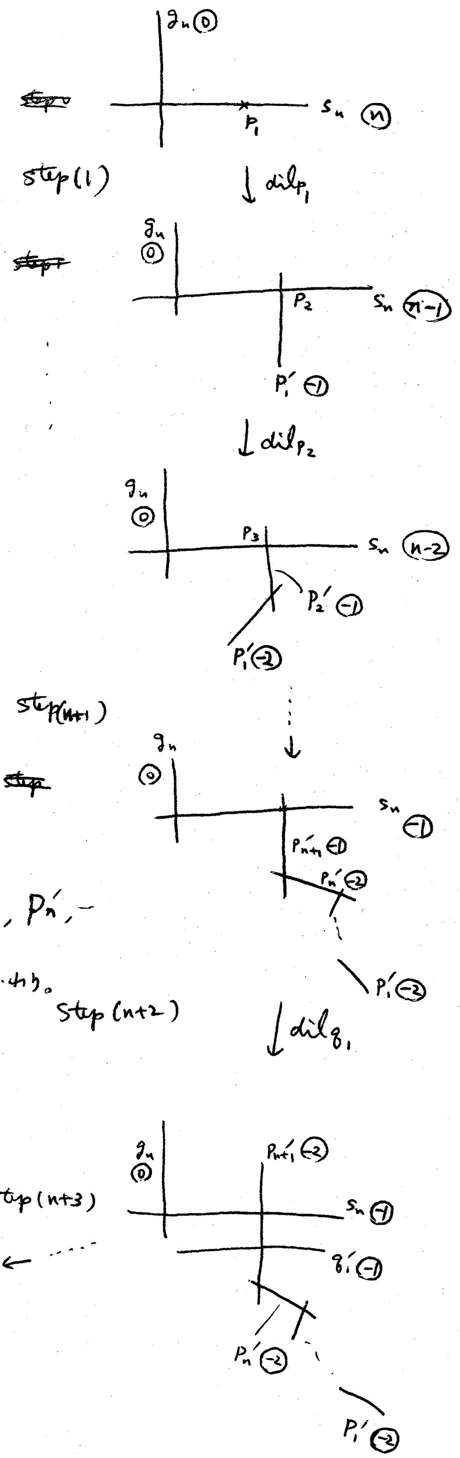
step(n+2): $P'_{n+1} - (s_n \cup P'_n) \ni {}^\forall q_1$ をとる

dil_{q_1}

step(n+3): g_n を忘れて残りの curve を見る.

s_n と q'_1 は対称的(self int., 他の curve との intersection etc. について)

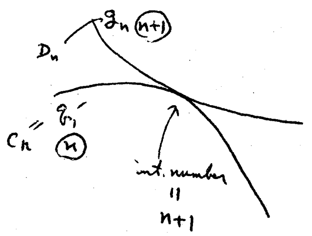
だから、今までの逆操作で s_n、P'_{n+1}, P'_n, ---, P'_1 と順に contract して step(n+3) おわり。



従って下図の embedding を得る。

$\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\beta_n} G_n$ $\qquad G_n - \beta_n(\mathbb{A}^2) = C_n \cup D_n$

$$\begin{cases} C_n^2 = n \\ D_n^2 = n+1 \\ C_n \cdot D_n = n+1 \end{cases}$$



[注] G_n が ruled surface になることは§3参照.

G_n がどの type ($F_?$ になるか) はむつかしい (point P_1, q_1 のとり方で異なる type になり得る。)

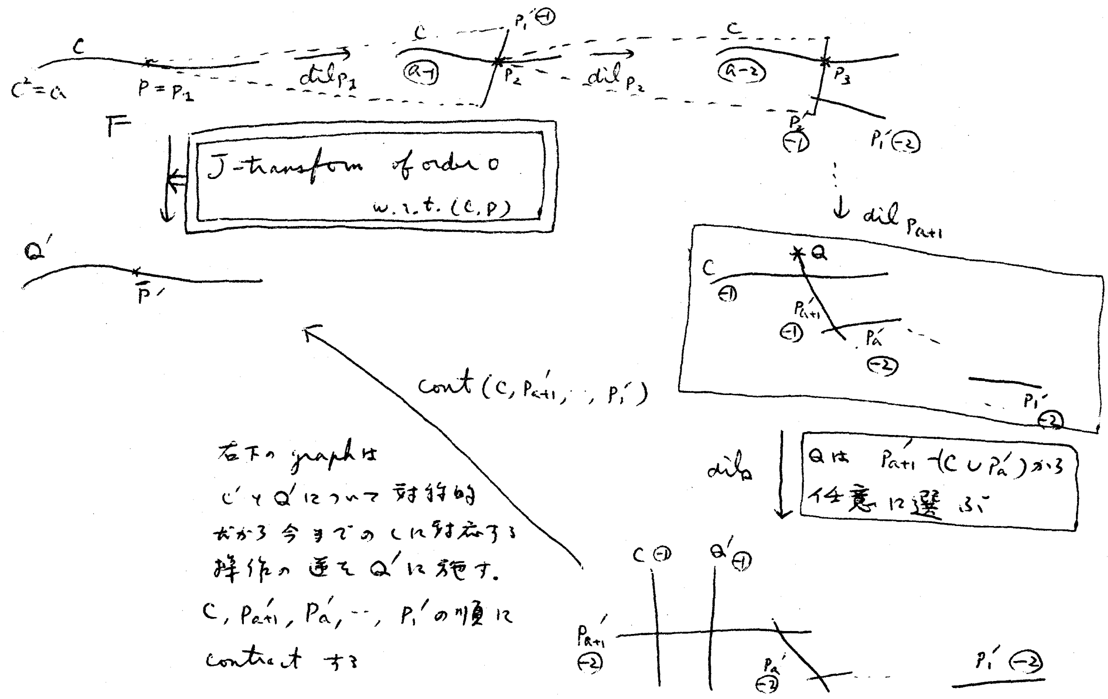
example 1 の α_n から β_n を作る bir. cor. $F_n \xrightarrow{\beta_n \circ \alpha_n^{-1}} G_n$ は J-transform ((S_n, P_1) に関する。) である. (c.f. 定義 1)

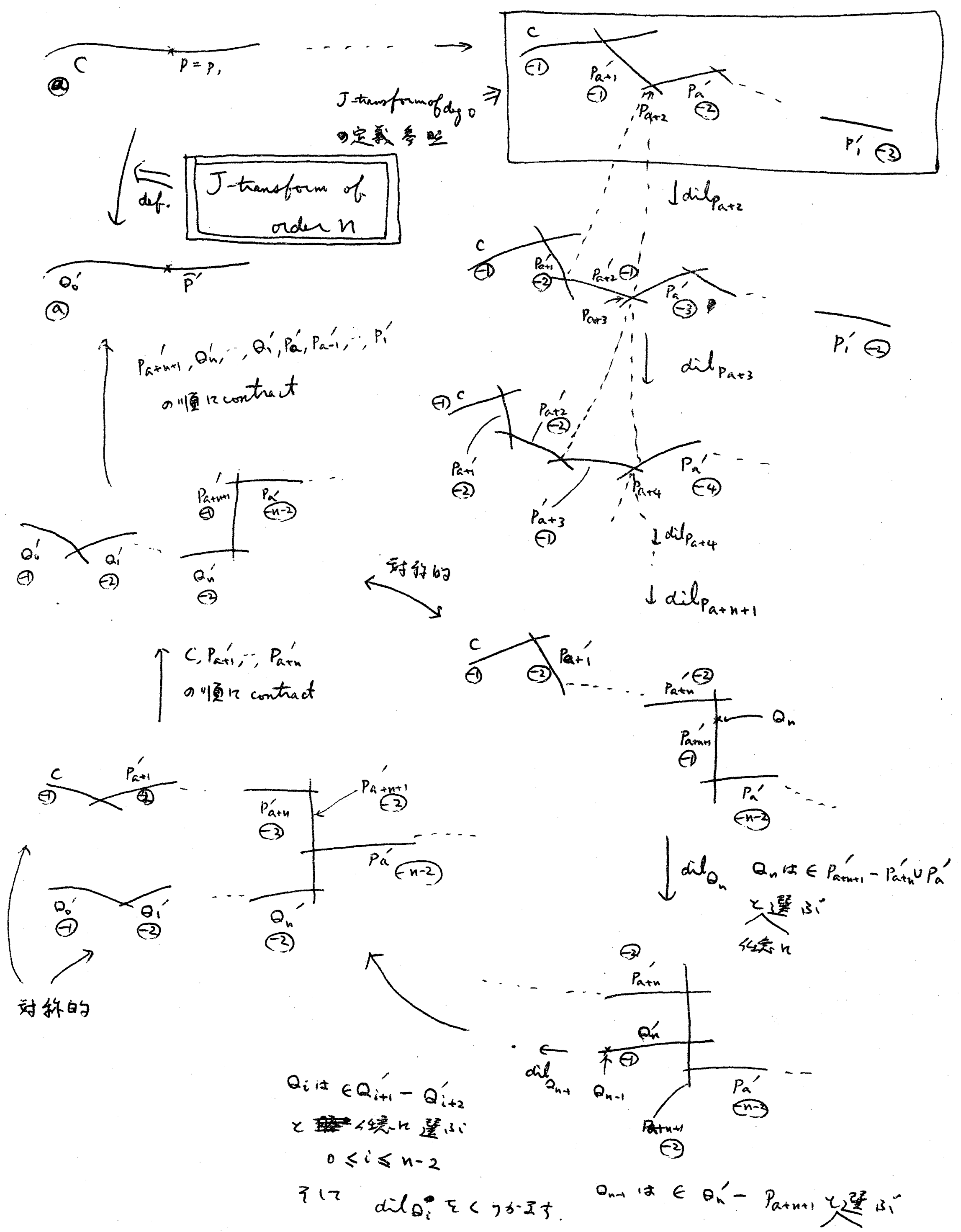
定義 1. complete non-singular surface F 上の curve C が $(*)_1$

$(*)_1$: $C \cong \mathbb{P}^1$ (isom.) $C^2 \geqq 0$

を満たす時, C 上の point P について (C, P) に関する order n の J-transform なる birat. cor. を次のように定義する。 $n \geqq 0$

(order n を明記しなかったり, P を略したりして, J-transform w.r.t. C, 又は単に J-transform と呼ぶこともある。)





[注] 定義から明らかなように、J-transform は n, c, p のみによってきまるのではなく、かなりの任意性がある。

定義1. から 直ちに次の事がわかる。

Lemma 1　complete non-singular surface F 上の curve C が $(*)_1$ をみたすとする。$F \xrightarrow{\chi} F'$ なる birat. corr. が J-transform of order n w.r.t. (C, P) とする時. $C' = \chi(C)$ (← total transform) とおくと.

(1) $\chi|_{F-C} : F - C \xrightarrow{\sim} F' - C'$ は isom. で $(C' \cdot C') = (C \cdot C)$

(2) χ^{-1} の fundamental pt. は 1 点 P' $(\in C')$ だけであり

C' は $(*)_1$ をみたし、χ^{-1} は J-transform of order n w.r.t. (C', P')

(3) $\psi : F' \longrightarrow F''$ なる bir. corr. が J-transform w.r.t. (C', P') なら

$\psi \circ \chi : F \longrightarrow F''$ は J-transform w.r.t. (C, P)

例　$F = \mathbb{P}^2$ $(x_0 : x_1 : x_2)$　$C = \text{line} = \{x_0 = 0\} \ni P = (0\,0\,1)$ とおくと

J-transform of order n w.r.t. (C, P) は

degree $(n+2)$ の Jonquier transformation に対応する。

(c.f. Nagata [3])

bir. corr. 1 (S)　$S \xrightarrow{j} F$ を non-sing. alg. surfaces, F complete とし

$F - j(S) = C \cup D$　C, D は既約な curve

C は $(*)_1$ をみたすとする。$P \in C - D$ を任意にとり

$\varphi : F \longrightarrow F'$ を J-transform w.r.t. (C, P) とし

$C' = \varphi(C)$, $D' = \varphi[D]$ (← proper transform)　$P' =$ (fun. pt. of φ^{-1}) とおくと

$S \xrightarrow{\varphi \circ j} F'$ も embedding であり $F' - S = C' \cup D'$, $P' = C' \cap D'$

Lemma 2　C' は $(*)_1$ をみたし　$(C' \cdot D') \geq (C \cdot D)$

もし $(C\cdot D) \geqq 2$ ならば

D' は $(*)_1$, $(*)_2$ もみたさない (c.f. 定義4)

Th. 0 $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ を任意の embedding とすると $\mathbb{P}^2-\mathbb{A}^2$ は line であり、~~任意の2つのような~~ $\forall$このような2つの embedding は J-tranform w.r.t. $\mathbb{P}^2-\mathbb{A}^2$ を有限回施すことによって互いにうつり得る。(c.f. Nagata [3])

Th. 1 $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{j} F$ を rat. ruled surface への任意の embedding とする。
もし $F-\mathbb{A}^2$ の component のある一方が non-singular ならば、
~~この時~~、$\mathbb{A}^2$ の $\mathbb{P}^2$ への適当な embedding i で $\mathbb{P}^2 - i(\mathbb{A}^2) = \infty$-line となるようなものがとれて、次の diagram が可換になる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{A}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha_n"] & \mathbb{A}^2 \arrow[rrr, equal] \arrow[d, "\beta_n"'] & \arrow[d, dashed] & & \mathbb{A}^2 \arrow[d, "j"'] \\
\mathbb{P}^2 \arrow[r, "f"] & H_n \arrow[r, "g"] & G_n \arrow[r, "h_1"] & \cdot \arrow[r, "h_2"] & \cdots \arrow[r, "h_r"] & F
\end{tikzcd}$$

Ex.1 で与えられた bir.con. $\boxed{n \geq 0}$

Ex.2 で与えられた bir.con.

bir.con. 1(S) $\boxed{r \geq 0}$

この列はすべて bir.con. (morphism でない)

又は

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{A}^2 \arrow[d, "\alpha_n"'] \arrow[dr, "j"] & \\
\mathbb{P}^2 \arrow[r, "f"] & H_n \arrow[r, equal] & F
\end{tikzcd}$$

$\boxed{n \geqq 0}$

このような分解 $j = h_r\circ\cdots\circ h_1\circ g\circ f\circ i$ を standard な分解と呼ぶ。

(下の場合は $g = id$、$r = 0$ と思う。)

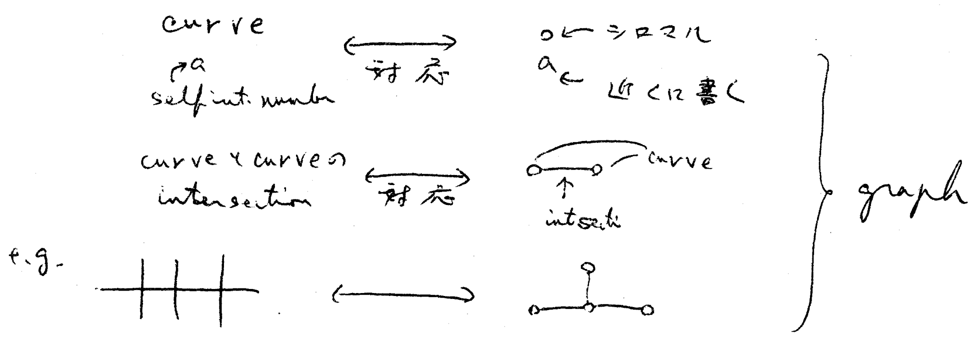
Th. 2 Th. 1 において j が与えられた時、~~この2つ~~

$\forall$2つの standard な分解 $j = h'_{r'}\circ\cdots\circ h'_1\circ g'\circ f'\circ i' = h_r\circ\cdots\circ h_1\circ g\circ f\circ i$

について、$r=r'$, $n=n'$ (n は $f\circ i$ に対応する α_{ne} の数)
そして、もし $n\geq 0$ なら $i=i'$, $f=f'$, $h_i=h_i'$ $1\leq {}^{\forall}i\leq r$
である。

—————— 。 —————— 。 ——————

以上で $F-\mathbb{A}^2$ の２つの component のうち、一方が non-sing. の時には片付いた事になるが、実際に $F-\mathbb{A}^2$ の component が２つとも sing. pt. をもつことがある。その前に normal crossing な reducible curve の "graph" を定義する。(c.f. Morrow [1])



<u>Lemma 3</u> S, S' を non-sing. alg. surfaces. $S' \xrightarrow{\pi} S$ を proper birat. morphism とし、$S \ni {}^{\exists}p$, $S'-\pi^{-1}(p) \xrightarrow{\sim} S-p$ とする。その時、$\pi^{-1}(p)$ は normal crossing でどの component も $\cong \mathbb{P}^1$ であるが、更に $\pi^{-1}(p)$ の graph が linear (i.e. o—o ⋯ o—o の形) ならば、

(1) その graph は次のようになる。

<u>Case 1.</u>

$$\underbrace{-2 \cdots -2}_{(m_s-1)\text{個}} \;\; -k_s-2 \;\cdots\; \underbrace{-2 \;\; -2 \;\; -2}_{(m_1-1)\text{個}} \;\; -k_1-2 \;\; -1 \;\; \underbrace{-2 \;\; -2}_{k_1\text{個}} \;\; -m_1-2 \;\; \underbrace{-2 \;\; -2}_{(k_2-1)\text{個}} \;\cdots\; -m_s-2 \;\; \underbrace{-2 \;\; -2}_{(k_{s+1}-1)\text{個}}$$

ただし $\left\{\begin{array}{l} s \geqq 0 \\ k_i, m_j \geqq 1 \end{array}\right.$ とする $m_1, \cdots, m_s \;;\; k_1, \cdots, k_{s+1}$

<u>Case 2.</u>

$$\underbrace{-2 \cdots -2}_{(m_s-1)\text{個}} \;\; -k_s-2 \;\cdots\; \underbrace{-2 \;\; -2}_{(m_1-1)\text{個}} \;\; -k_1-2 \;\; -1 \;\; \underbrace{-2 \;\; -2}_{k_1\text{個}} \;\; -m_1-2 \;\; \underbrace{-2 \;\; -2}_{(k_2-1)\text{個}} \;\cdots\; -m_{s-1}-2 \;\; \underbrace{-2 \;\; -2}_{(k_s-1)\text{個}}$$

ただし $\left\{\begin{array}{l} s \geqq 1 \\ k_i, m_j \geqq 1 \end{array}\right.$ $m_1, \cdots, m_{s-1} \;;\; k_1, \cdots, k_s$

(<u>Case 1</u> で $s=0$ なる $-1 \;\; \underbrace{-2 \cdots -2}_{k_1\text{個}}$ を表わす case 1_0 と書く

<u>Case 2</u> で $s=1$ なる $\underbrace{-2 \cdots -2}_{(m_1-1)\text{個}} \;\; -k_1-2 \;\; -1 \;\; \underbrace{-2 \cdots -2}_{k_1\text{個}}$)

逆に <u>Case 1</u> 又は <u>Case 2</u> のような graph をもつ normal crossing な curve でどの component も $\cong \mathbb{P}^1$ なる、その curve は第一種の例外曲線で non-singular pt. に contract できる。

(2) $S \supset l$ が p を通る non-sing. curve とすると $(l \cdot \pi^{-1}(p)) = 1$ であり

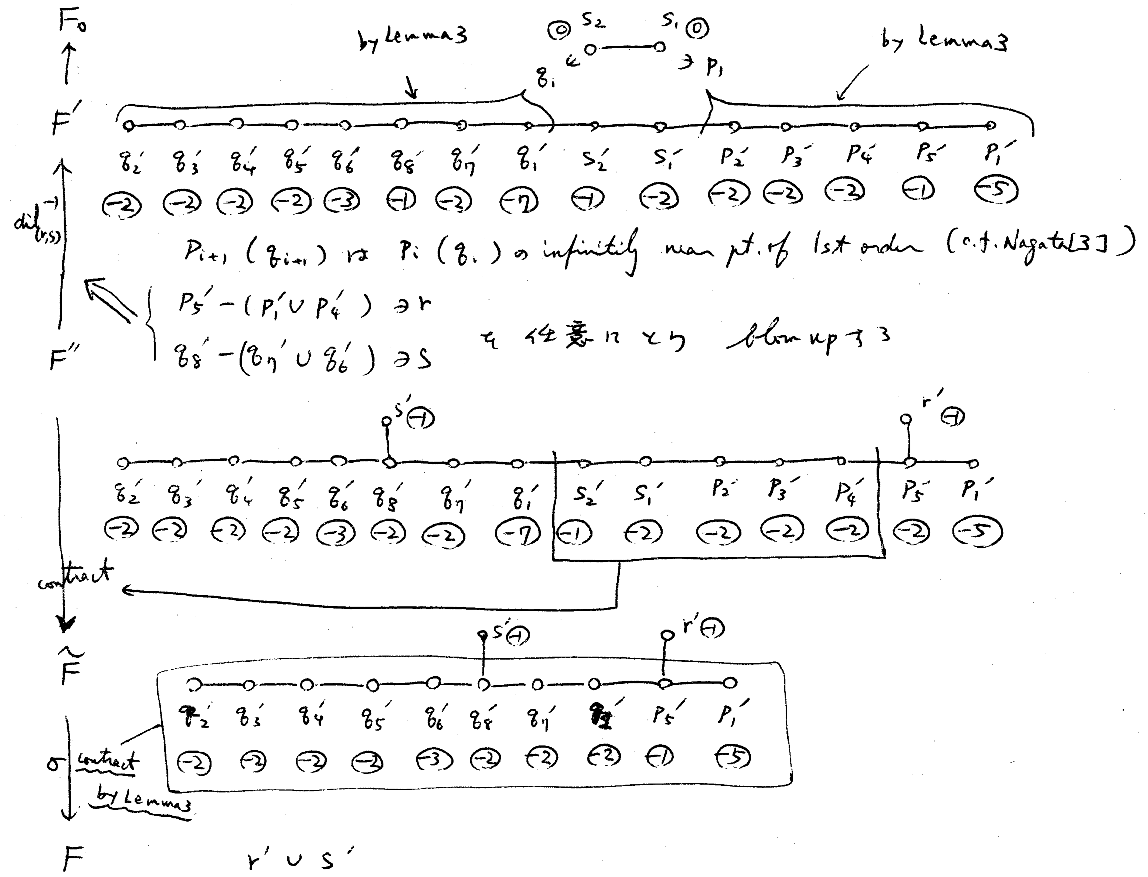
$l \cap \pi^{-1}(p)$ は <u>Case 1</u> (で case 1_0 でない) ならば一番左の curve 上か右側の k_{s+1} 個の curve 上にある。

<u>Case 2</u> ならば一番右か左側の m_s 個の curve 上にある。

<u>Example 4</u> $F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の座標を $(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1)$ とし

$S_1 = (0:1) \times \mathbb{P}^1$, $S_2 = \mathbb{P}^1 \times (0:1)$ とし

$p_1 \in S_1 - S_2$, $q_1 \in S_2 - S_1$ を任意にとる。



$\mathbb{A}^2 \to F$ は embedding で $F-\mathbb{A}^2$ のどの component も sing. pt. をもつ.

(∵ map σ に Lemma 3.(2) を適用)

[注] この example は Th. 3 の case(α_2) $s=b=1$ の場合である。

$\tilde{F}$ は $r' \cup s'$, r' 両方の minimal normal resolution である。(c.f. 定義2)

定義2 : non-sing. proj. surface $F \supset D$ curve (may be reducible)

$F' \xrightarrow{\sigma} F$ なる non-sing. proj. surface F' からの bir. mor. φ が D の normal resol.

とは $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $F' - \varphi^{-1}(D) \xrightarrow[\varphi]{\sim} F - D$

(2) $\varphi^{-1}(D)$ は normal crossing となることとする.

又, F, D を与えた時, D の normal resolution のうちには.

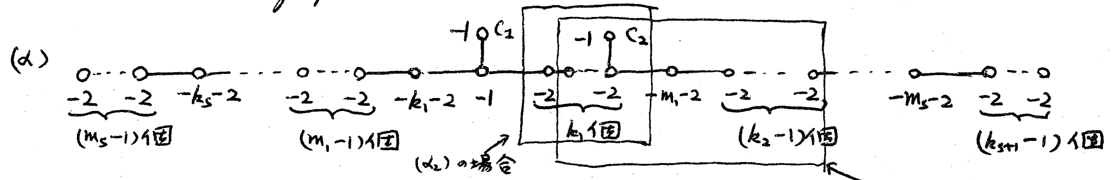
domination の意味で最小のもの、即ち $\tilde{F} \xrightarrow{\sigma} F$ なる D の normal resol. が存在して $^{\forall}F' \xrightarrow{\varphi} F$ なる D の normal resol. に対して $F' \xrightarrow{\exists \psi} \tilde{F}$ morphism s.t. $\varphi = \sigma \circ \psi$ がある。これは同型を除いて uniqueに定まるので D の minimal normal resol. と呼ぶ。

[注] $\sigma^{-1}(D)$ の graph を D の minimal normal resol. の graph と呼ぶ。

<u>定義3</u>：$\mathbb{A}^2 \hookrightarrow F$ (Fは rational ruled surface) なる embedding が normalized embedding であるとは、$F-\mathbb{A}^2$ の component が2つとも singular pt. をもち、$F-\mathbb{A}^2$ の minimal normal resol. $F' \xrightarrow{\varphi} F$ をとると $F' \supset E(\varphi) = \{\varphi$ の excep. locus$\}$ の graph が linear (i.e. o—o—⋯—o—o) なものを言う。

<u>Th.3</u> $\mathbb{A}^2$ の $^{\forall}$normalized embedding $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow F$ について、$F-\mathbb{A}^2$ の minimal normal resol. の graph は、次のような図により与えられる。

(α)



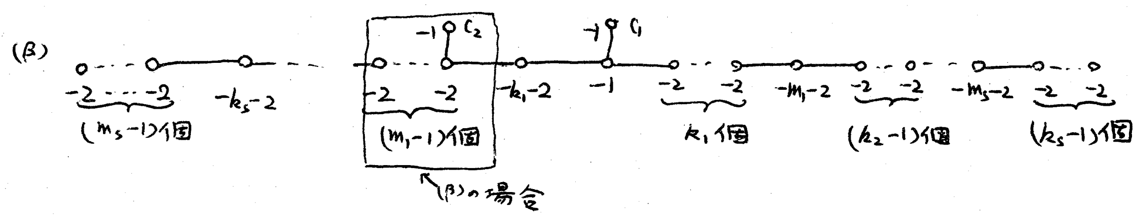
ただし $\begin{pmatrix} s \geqq 1 \\ b \geqq 1 \end{pmatrix}$ で

$(\alpha_1) \begin{cases} m_1 = b+1, \ m_2 = \cdots = m_s = b \\ k_1 = b+3, \ k_2 = \cdots = k_{s+1} = b+6 \end{cases}$

又は

$(\alpha_2) \begin{cases} m_1 = \cdots = m_s = b \\ k_1 = b+2, \ k_2 = \cdots = k_{s+1} = b+4 \end{cases}$

(β)



ただし $\begin{pmatrix} s\geqslant 2 \\ b\geqslant 1\end{pmatrix}$ で $(\beta)\left\{\begin{array}{l} m_1=\cdots=m_s=b+1 \\ k_1=b+1,\ k_2=\cdots=k_s=b\end{array}\right.$

逆に、complete non-sing. surface F が relatively minimal 又は F_1 (c.f. Nagata [1]) とし、$F\supset E=\bar{C}_1\cup\bar{C}_2$ C_i は irr. rat. curve. で E の minimal normal resol. の graph が (α) 又は (β) のような graph であれば、$\mathbb{A}^2\cong F-E$ であり、これは normalized embedding である。

[注] (α) 又は (β) の場合に、C_1 及び $\square$ の部分を contract すると、Morrow [1] にある graph が得られる。従って、次の lemma より、Th. 3 の "逆に…" は示される。

或いは example 4 のように直接確めることもできる。

Lemma 4. Morrow [1] の結果は char $p>0$ でも正しい。

即ち、non-sing. rat. proj. surface F' 上に、次の性質 (1), (2) をもつ curve E があるとする。(1) E は normal crossing. E のどの component も $\cong\mathbb{P}^1$.

(2) E が第一種の例外曲線を含むなら、その curve C を contract すると $\mathrm{cont}_C E$ は normal crossing でない。

この時、$F-E\cong\mathbb{A}^2 \Rightarrow E$ の graph は Morrow [1] の graph のいずれか。

$\because$ $F\underset{bir}{\sim}\mathbb{P}^2_k$ だから、$\mathbb{P}^2_k$ から $\mathbb{A}^2_k$ の外側で blow up blow down をくりかえして、F が得られる。それに対応する操作を $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ に行なって、$F/\mathbb{C}$ なる rat. surface で、$F_{\mathbb{C}}-\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の graph が E の graph と同じ形をもつものが得られる。この $F_{\mathbb{C}}$ に Morrow [1] を適用。

"逆に…"について: Eのminimal normal resol. $F' \xrightarrow{\sigma} F$において$\sigma^{-1}(E)$はどのcomponentも$\cong \mathbb{P}^2$で、対応する(α), (β)のdiagramのc, ∪ □をcontractして、cont $\sigma^{-1}(E)$のgraphはMorrow [1]にあるgraphと同一のものを与える。よって、(Morrow [1]のembedding) → $\mathbb{P}^2$なるmapをblow up, blow downに分解してそれをcont F'に適用すると non-sing. proj. surface $G \supset l$で、$G - l \cong F - E$, $l \cong \mathbb{P}^1$, $l^2 = 1$ なるものが得られる。このようなlを含むからGはruled (c.f. Zariski [1])。しかも、もしGがnon-rat.ならG上にはself int. > 0なるrat. curveはない。よってG、従ってFはrational。よって

$\mathrm{Pic}\, F = \mathbb{Z}^{\nu}$ ($\nu = 1$ or 2 $\nu=1 \Rightarrow F = \mathbb{P}^2$, $\nu=2 \Rightarrow F$ rat. ruled c.f. Nagata [1])

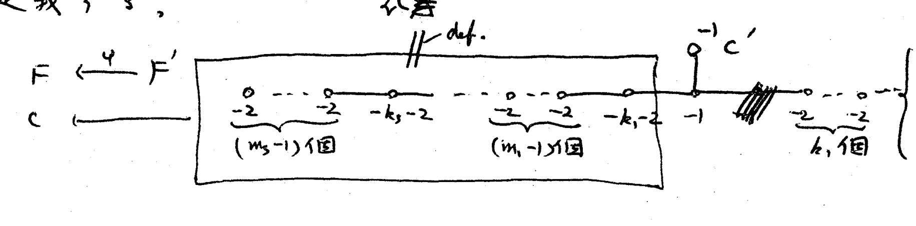
とおくと、$\mathrm{Pic}\, G = \mathbb{Z}^{\nu-1}$ ∴ $\nu - 1 \geq 1$ ∴ $\nu = 2$ ∴ F rat. ruled,

$G \cong \mathbb{P}^2$ ∴ $G - l = \mathbb{A}^2 \cong F - E$ Q.E.D.

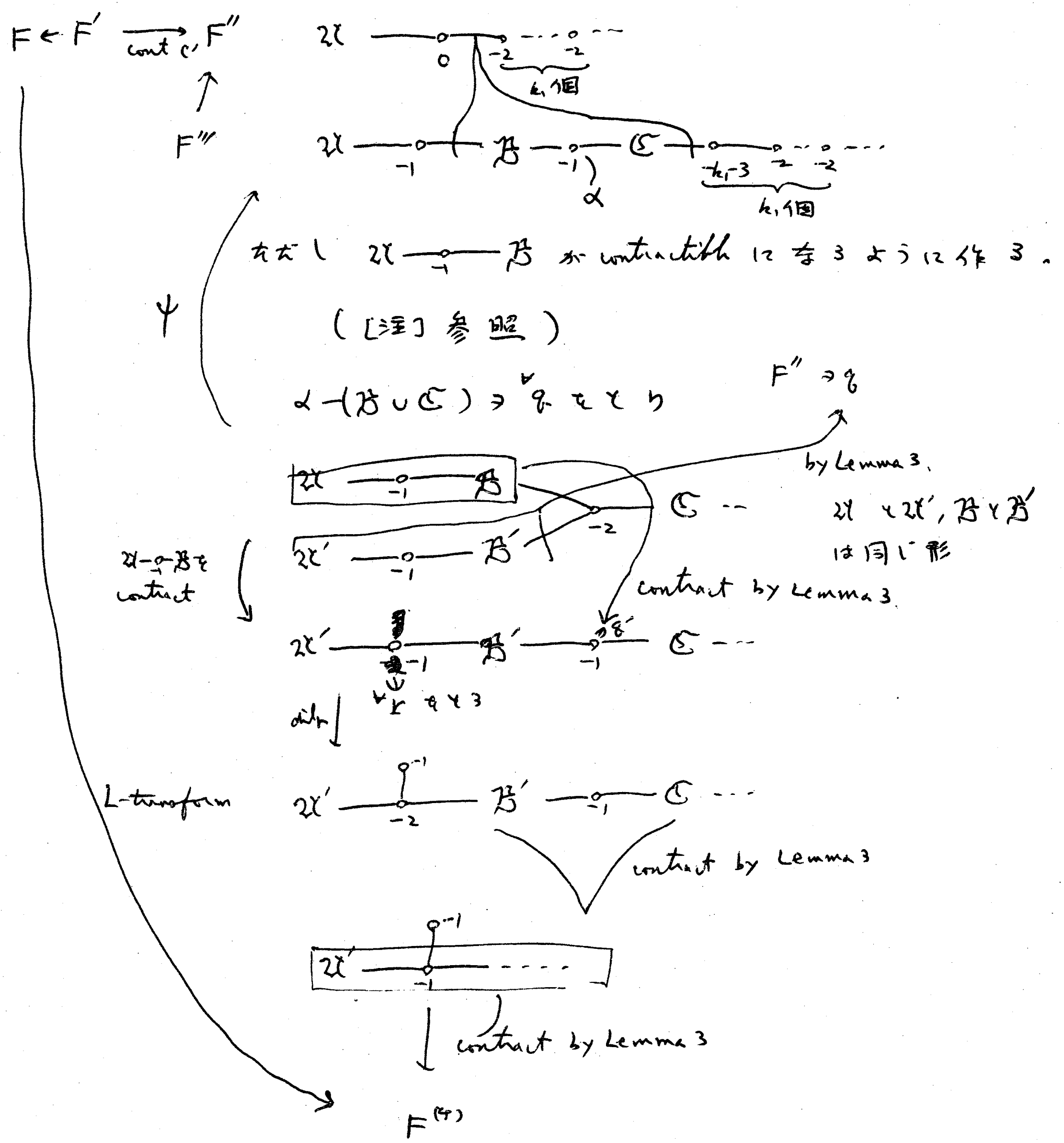
<u>定義4</u>: Fをproj. non-sing. surfaceとし、$F \supset C$ (irr. curve)が$(*)_2$をみたすとする。

$(*)_2$
(1) Cはrat. curveで、唯1つのsing. pt. Pをもち Pはone-place pt.
(2) Cのmin. normal resol. $F' \xrightarrow{\varphi} F$をとると、$\varphi^{-1}(P)$のgraphはlinear, $\varphi^{-1}[C]$のself int. $= -1$

この時 R-(L-)transform w.r.t. C なるbir. corr.を次のように定義する。

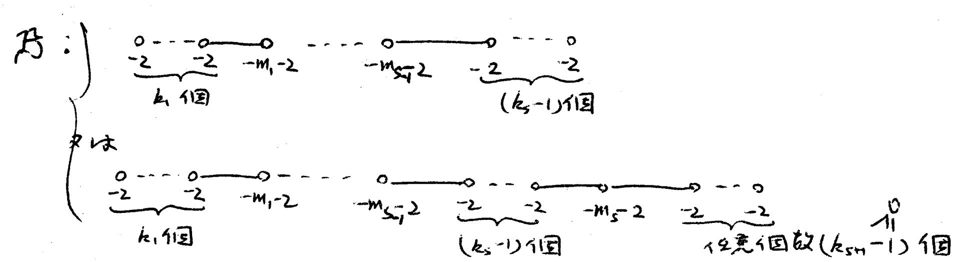


$s \geq 1$ ⟺ Pはsing. pt.
$m_i, k_j \geq 1$
case 1 or case 2 in Lemma 3.



R-transform は、右半分に ~~対応する~~ 同様な操作をしたものである。

[注]



乃 $\underset{-1}{-\!\!\circ\!\!-}$ $\mathbb{C}$ を作る step では k_{n+1} の choice (高々 countable) しかなく、ψ と dil_r の所で uncountable の任意性がある。

定義から直ちに次の事が得られる。

<u>Lemma 5</u>. F : projective non-sing. surface $\supset C$ irr. curve が $(*)_2$ をみたし、birat. corr. $F \xrightarrow{\varphi} F'$ が $L-(R-)$ transformation w.r.t. C とし $C' = \varphi(C)$ とおくと

(1) $\varphi|_{F-C} : F - C \xrightarrow{\sim} F' - C'$ $\quad (C, C) = (C', C')$

(2) C' も $(*)_2$ をみたし、φ^{-1} は $L-(R-)$ transform w.r.t. C'

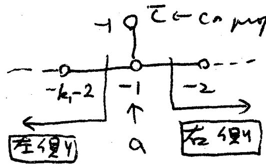
(3) $F' \xrightarrow{\psi} F''$ なる birat. corr. が $L-(R-)$ transform w.r.t. C' とすると $\psi \circ \varphi : F \to F''$ も $L-(R-)$ transform w.r.t. C

<u>bir. corr. 6 (S)</u> $S \xrightarrow{i} F$ を non-sing. surface S の proj. non-sing. surface F への embedding とし、$F - S = C \cup D$, C, D は irr. curve

C は $(*)_2$ を満たすとする。

C の min. normal ~~transform~~ resol. の graph (c.f. 定義 2 [注]) を

$\bar{C} \leftarrow C$ の proper transf. とし、



D の proper transf.

<u>Case R</u> : $\bar{D} \cap \boxed{左側} = \phi$

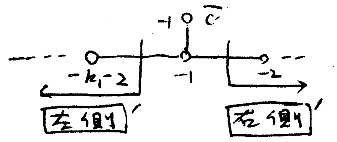
$\bar{D}$ は ($\boxed{右側} \cup \bar{C} \cup a$ のある component) と ~~mult~~ intersection mult. $\geqq 2$ で交わる。

<u>case L</u> : $\bar{D} \cap \boxed{右側} = \phi$, $\bar{D}$ は ($\boxed{左側} \cup \bar{C} \cup a$ のある component) と mult. $\geqq 2$ で交わる、 という 2 つの場合を考える。

$\varphi: F \to F'$ を $\underline{\text{case}R}$ ($\underline{\text{case}L}$) なる $R-$ ($L-$) transform w.r.t. C とする.

$C' = \varphi(C)$, $D' = \varphi[D]$

この時、C' の min. normal resol. の graph は、いずれの場合にも


($\overline{D}'$ は D の proper transform)

とする。

<u>Lemma 7</u> (1) <u>case R</u> には $\overline{D}' \cap \boxed{右側}' = \phi$、$\overline{D}'$ は ($\boxed{左側}' \cup \alpha'$ のある component) と mult. ≥ 2 で交わる。D' は $(*)_1$, $(*)_2$ 共に満たさない。

<u>case L</u> 〃 左側 右側 〃

〃 〃 〃

(2) <u>Th.</u> 3 の Case(α) の ~~R~~ L-transform w.r.t. (C_1 又は C_2) を行なっても、得られる embedding $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow F'$ はやはり normalized embedding で $F-\mathbb{A}^2$, $F'-\mathbb{A}^2$ の minimal normal resol. の graph は全く同じ形をしている。

case(β) なら R-transf. について同様の事が言える。

<u>Th. 4</u> $\mathbb{A}^2 \overset{g}{\hookrightarrow} F$ (F は rat. ruled surface) を embedding とし、$F-\mathbb{A}^2$ の comp. は2つとも sing. pt. をもつとする。この時、次のような embeddings $\mathbb{A}^2 \overset{g_i}{\hookrightarrow} F^{(i)}$ ($F^{(i)}$ は rat. ruled) $i=0,\cdots,r$ が存在する.

(1) g_0 は normalized embedding (c.f. <u>Th.3</u>), $g_r = g$

(2)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \xrightarrow{g_i} & F^{(i)} \\ & \underset{g_{i+1}}{\searrow} \circlearrowright & \downarrow h_{i+1} \\ & & F^{(i+1)} \end{array}$$
$r-1 \geq i \geq 0$, $F^{(i)} - g(\mathbb{A}^2) = C^{(i)} \cup D^{(i)}$ とおくと、$C^{(i)}$ は $(*)_2$ を満足し、h_{i+1} は ($R-$ 又は $L-$ [(3)できめる]) transf. w.r.t. $C^{(i)}$、$h_{i+1}(C^{(i)}) = C^{(i+1)}$, $h_{i+1}[D^{(i)}] = D^{(i+1)}$

(3) g_0 が <u>Th.3</u> の case(α) なら $h_1, h_2, h_3, \cdots$ は $R, L, R, L, \cdots$

Case (β) なら　L, R, L, R, ----　となる。

この性質をもつ分解 $g = h_r \circ \cdots \circ h_1 \circ g_0$ を standard な分解と呼ぶ。

<u>Th. 5</u>　Th. 4 の下で g の2つの standard な分解 $h_r \circ \cdots \circ h_1 \circ g_0$,
(もう1つは ′ をつけて表わす。) が与えられたとすると、$r = r'$。

そして
$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2 \arrow[r, "g_i"] \arrow[dr, "g'_i"'] & F^{(i)} \arrow[d, "\gamma_i"] \arrow[dl, phantom, "\wr"] \\ & F'^{(i)} \end{tikzcd}$$
bir. con.　を考える。

$\widetilde{F^{(i)}}$ ($\widehat{F'^{(i)}}$) を $F^{(i)} - \mathbb{A}^2$ ($F'^{(i)} - \mathbb{A}^2$) の min. normal resolution と ~~する と~~ して、$\widetilde{C^{(i)}}$ ($\widehat{C'^{(i)}}$) をそれぞれによる proper transform とする。
すると、$\widetilde{C^{(i)}}$, $\widehat{C'^{(i)}}$ は共に contractible で $\mathrm{cont}_{\widetilde{C^{(i)}}} \widetilde{F^{(i)}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{cont}_{\widehat{C'^{(i)}}} \widehat{F'^{(i)}}$ は isomorphism. 特に、g_0 の type (どの case に属するか、s, b の値) は分解のしかたによらない。

[注] γ_i が isom. であるとは限らない。

§3. 一般的な注意

<u>定義5</u>. curve C が loop をなすとは

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$　$C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ を irr. component への分解とすると

$n = 1$ なら　C_1 は one-place pt. でない sing. pt. をもつ

$n \geq 2$ なら　C_i の番号を適当につけかえて、

$$C_i \cap C_{i+1} \ni {}^{\exists}P_i \quad \text{for} \quad 0 \leq i \leq n-1$$

$$C_n \cap C_1 \ni {}^{\exists}P_n$$

$P_1, \cdots, P_n$ は互に相異なる。

<u>Prop. 1</u> $S_0 \overset{i_0}{\hookrightarrow} F_0$ を alg. surface S_0 の non-sing. proj. surface F_0 への embedding とし $F_0 - S_0 = l_0$ を第一種の例外曲線でない irr. curve とする。この時 " l_0 rational かつ $(l, l) \geq 0$ " でなければ、

$\forall$embedding $S_0 \overset{i}{\hookrightarrow} F$ (non-sing. proj. surface) に対して

$F \xrightarrow{i_0 \circ i^{-1}} F_0$ は morphism。i.e. F は F_0 から S_0 の外側を blow-up することにより得られる。

☺
$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[rr, "i \circ i_0^{-1}"] & & F \\ & S_0 \arrow[ul, "i_0"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$
birat. corr. $F_0 \to F$ の excep. locus はもしあるとすれば l_0 でなければならない。l_0 は第一種でないから、第2種、従って rational かつ self-intersection $\geqslant 0$ でなければならない。これは不合理。

よって excep. locus $= \phi$ (c.f. Zariski [1])

$\Rightarrow$ $F \longrightarrow F_0$ は morphism Q.E.D.

<u>Prop. 2</u> Prop. 1 の下で $l_0 \cong \mathbb{P}^1$ かつ $(l, l) \geq 0$ とする。

$S_0 \hookrightarrow F$ を non-sing. proj. surface への任意の embedding とすると

$\Rightarrow$ (1) $F - S_0$ は loop を含まない

(2) $F - S_0$ が normal crossing でない点はたかだか一点。

(3) $\forall$component of $F - S$ は rational で高々1個の sing. pt. をもつのみ。しかもそれは one-place pt.

☺ もし $F - S_0$ が loop を含めば、$F - S_0$ の pt. で blow up するか $F - S_0$ の第一種の例外曲線をつぶして F' を得たとしても

$F'-S_0$ はやはり loop を含む。

ところで今 F と F_0 は birat. だから、F_0 から S_0 の外側で blowup blowdown をくり返して F_0 を得る。よってもし $F-S_0$ が loop を含めば F_0-S_0 も loop を含むことになり矛盾。(1) おわり

(2) $F \xrightarrow{\varphi} F_0$ なる bir. corr. の fun. pt. は $F_0-S_0=l_0$ で dominate される。よって fundamental pt. は高々一点。そこで F から始めて、F_0 への対応の fundamental pt. を blow-up していって F'' が F_0 を dom. するようにできる。

$$\begin{array}{ccc} & F'' & \\ \psi \swarrow & & \searrow \pi \ \text{mor.} \\ F & \hookrightarrow & F_0 \end{array}$$

よって $\exists p \in F$ $\quad F''-\psi^{-1}(p) \xrightarrow[\sim]{\psi} F-p$

よって $\quad F-S_0-p \hookrightarrow \pi^{-1}(l_0) \hookrightarrow F''$

l_0 は non-singular だから $\pi^{-1}(l_0)$ は normal crossing (c.f. Zariski[1]).

∴ $F-S_0$ は p 以外で normal crossing.

(3) $F-S_0$ の component は $\pi^{-1}(l_0) \hookrightarrow F''$ の component と思ってよいから rational. 残りは (1), (2) から明らか。 Q.E.D.

<u>Prop.3</u> $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow F$ を non-sing rat. proj. surface への埋め込みとし

$F-\mathbb{A}^2=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ をキヤクな curve への分解とする。

この時 $\mathrm{Pic}\,F \cong \mathbb{Z}^{\oplus n}$ (C_i が generator)

よって特に、F が ruled surface $\Longleftrightarrow$ $n=2$.

∵ F の $\forall$divisor D をとると $D|_{\mathbb{A}^2}=(d)|_{\mathbb{A}^2}$

($\exists d \in K(F)$ ∵ $\mathbb{A}^2$ の coord. ring は u.f.d)

$\therefore\ D - (\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i C_i$

逆に $(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i C_i$ $f \in K(F)$ とすると

$(f)|_{A^2} = 0$ $\therefore$ f は A^2 上で unit $\therefore$ $f =$ constant

$\therefore (f) = 0$ $\therefore$ $m_i = 0$ for $1 \leq i \leq n$

後半については (c.f. Nagata [1])

文献表

J. A. Morrow : Compactifications of $\mathbb{C}^2$
Bull. of Amer. Math. Soc. Vol. 78 No5 1972 P813~816

M. Nagata [1] : On rational surfaces I.
Mem. of Coll. Science. Univ. of Kyoto No.3 1960

[2] : On rational surfaces II.
Mem. of Coll. Science. Univ. of Kyoto No.2 1960

[3] : On Automorphism group of $k[x, y]$
~~Pub~~ Dept. of Math. Kyoto Univ.

O. Zariski : Introduction to the problem of minimal models.
Publ. Math. Soc. Japan 4 (1958)