数理解析研究所講究録
第183巻 1973年 51-60

Elkik's Theorem

M. Artin (M.I.T.)

A を noetherian ring. $\mathfrak{a}$ をその ideal とする。pair $(A, \mathfrak{a})$ は henselian と仮定する。i.e. B を étale A-algebra とするとき、$A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{a}B$ ならば A-section : $B \to A$ が存在する。

$A[X] = A[X_1, \cdots, X_N]$ を多項式環とし、$f = (f_1, \cdots, f_g)$ を $A[X]$ の元のベクトルとする。$f_1, \cdots, f_g$ で生成される $A[X]$ の ideal を F と表わし、$B = A[X]/F$ とおく。更に、$X = \mathrm{Spec}\, B$ $\mathcal{S} = \mathrm{Spec}\, A$ とおき、$V \subset X$ で $X/\mathcal{S}$ の smooth locus を、$\bar{A}$ で A の $\mathfrak{a}$-adic completion を表わすことにする。今後ずっとこれらの notations を用いる。

方程式 $f(X) = 0$ の解は、morphism : $X \to \mathcal{S}$ の section に対応する。

次の Theorem を証明するのが我々の目的である。

Theorem. (Elkik) $\bar{a} \in \bar{A}^N$ を $f(X) = 0$ の解とする。$\bar{a}$ の

引き起こす morphism $\bar{a}: \bar{S} = \operatorname{Spec} \bar{A} \to X$ が条件

$$\bar{a}(\bar{S} - V(\mathfrak{a}\bar{A})) \subset V$$

をみたすならば、任意の整数nに対して、Aにおける$f(X) = 0$の解 $a \in A^N$が存在して、$a \equiv \bar{a} \pmod{\mathfrak{a}^n}$とできる。

証明にとりかかる前に、いくつかの準備をしよう。

morphism : $X = \operatorname{Spec} B \longrightarrow S = \operatorname{Spec} A$ が、"smooth at $p \in X$, of relative dimension d" であるとは、次のときをいう。i.e. f_i $(1 \leq i \leq g)$のある$(N-d)$個がpでlocalにideal Fを生成し、Jacobian matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)$のある$(N-d)$次の小行列式が$p$で0にならない。

$P = A[X]$とおき、BのP-moduleとしてのresolution

$$P^p \xrightarrow{R} P^g \xrightarrow{f} P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

を考える。但し、$e_1, \cdots, e_g$をP^gのcanonical basisとするとき、$f: P^g \to P$は、$f(e_i) = f_i$ $(1 \leq i \leq g)$で与えられる。

Jacobian matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)$をJと表わす。$fR = 0$の両辺を微分して、

$$JR + fR' = 0.$$

したがって、$JR \equiv 0 \pmod{F}$。故に$P^p \xrightarrow{R} P^g \xrightarrow{J} P^N$は、complex : $B^p \xrightarrow{R} B^g \xrightarrow{J} B^N$を与える。

morphism : $X \longrightarrow S$が、$p \in X$で smooth, of relative dimension d ならば、$\mathrm{rank}(R) \geqq q-N+d$, $\mathrm{rank}(J) = N-d$ at p だから、点 $p \in X$ でこの complex は exact になる。

一般に complex : $B^p \xrightarrow{L} B^q \xrightarrow{M} B^N$ に対して、次の様な B の ideal H_r を導入する。

i.e. L、M を行列によって表現する。任意の r-tuple $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ $1 \leqq \alpha_1 < \cdots < \alpha_r \leqq q$ に対して、L の α_1-列、…α_r-列をとり出して得られる (p, r)-行列と、M の complementary rows をとり出して得られる $(q-r, N)$-行列を考え、前者の任意の r 次の小行列式と、後者の任意の $(q-r)$ 次の小行列式の積をつくる。r-tuple $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ を動かしたとき、これらの積で生成される B の ideal を H_r と表わし、$H = \sum_r H_r$ とおく。これは次の性質をもつ。

(i) $H_r = (1) \rightleftarrows B^p \xrightarrow{L} B^q \xrightarrow{M} B^N$ は Spec B 上の vector bundles の sequence として exact で、$\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Ker}\, M$ は rank r である。

(ii) $\forall h \in H_r$ に対して、homotopy (μ, ν) : $B^p \xleftarrow{\mu} B^q \xleftarrow{\nu} B^N$ が存在して、$L\mu + \nu M = h \cdot id.$ となる。

(iii) $M = 0$ ならば、H_r は $B^q/\mathrm{Im}\, B^p$ の $(q-r)$ 次の Fitting ideal である。

(iv) complex : $B^p \xrightarrow{R} B^q \xrightarrow{J} B^N$ に対して作った ideal H の

support は $X/\mathfrak{o}$ の non-smooth locus である。

Theorem 1. A は (t)-adic topology に関して complete とする。t^r は A のすべての t-torsion elements を零化するとせよ。I は A の任意の ideal で、$a \in A^N$ は $f(a) \equiv 0 \pmod{t^n I}$ をみたすとする。$t^r \in H(a)$ ($H(a)$ は sequence : $P^p \xrightarrow{R} P^q \xrightarrow{J} P^N$ に対して complex における同様に定義される ideal H から、$X \to a$ として得られる A の ideal を表わす) ならば、$n > 2r$ なる任意の整数 n に対して、$a' \in A^N$ で、$f(a') = 0$ 、$a' \equiv a \pmod{t^{n-r} I}$ となるものが存在する。

proof. ${}^t f(a-y)$ の Taylor 展開を書くと、

${}^t f(a-y) = {}^t f(a) - {}^t J(a)\, {}^t y + (\geqq \text{quadratic in } y)$.

ここに、$J(a)$ は Jacobian matrix $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)$ の $X = a$ における値を表わす。行列の左肩につけた t は転置行列を表わす。次の条件をみたす $y \in A^N$ の存在が証明できればよい。

i.e. $y \equiv 0 \pmod{t^{n-r} I}$、${}^t J(a)\, {}^t y \equiv {}^t f(a) \pmod{t^{2n-2r} I}$.

この様な y の存在が分れば、$2n - 2r > n$ だから、求めるべき A^N の元に収束する sequence を得る。$P^p \xrightarrow{R} P^q \xrightarrow{J} P^N$ において、$JR \equiv 0 \pmod{F}$ だから、$J(a) R(a) \equiv 0 \pmod{t^n I}$ である。一方 $t^r \in H(a)$ だから、ideal $H(a)$ のみたす性質

(ii)から、homomorphisms $\mu: A^q \longrightarrow A^N$、$\nu: A^p \longrightarrow A^q$ が存在して、

$${}^tJ(a)\mu \quad + \quad \nu\, {}^tR(a) \equiv t^r \cdot id \ (\mathrm{mod}.\ t^n I)$$

となる。ここに、$A^N \xrightarrow{{}^tJ(a)} A^q \xrightarrow{{}^tR(a)} A^p$。

したがって、

$${}^tJ(a)\mu\, {}^tf(a) \quad + \quad \nu\, {}^tR(a)\, {}^tf(a) \equiv t^r\, {}^tf(a) \quad (\mathrm{mod}.\ t^{2n} I)。$$

ところが ${}^tR(a)\,{}^tf(a) = 0$ だから、

$${}^tJ(a)\mu\, {}^tf(a) \equiv t^r\, {}^tf(a) \quad (\mathrm{mod}.\ t^{2n} I)。$$

$n - r > r$ だから、t^rに関する仮定によって、$y \in A^N$が存在して、

$${}^tf(a) \equiv {}^tJ(a)\, {}^ty \quad (\mathrm{mod}.\ t^{2n-r} I)$$

となる。ここに、$y \equiv 0$ $(\mathrm{mod}.\ t^{n-r} I)$ である。q.e.d.

Theorem 2. Aは$\mathfrak{a}$-adic topologyに関してcompleteと仮定する。このときには、次の性質をみたす整数の組(n_0, r)が存在する。i.e. $n \geqq n_0$なる任意の自然数nに対して、$f(a) \equiv 0$ $(\mathrm{mod}.\ \mathfrak{a}^n)$、$\mathfrak{a}^r \subset H(a)$ならば $f(a') = 0$、$a' \equiv a$ $(\mathrm{mod}.\ \mathfrak{a}^{n-r})$なる$a' \in A^N$が存在する。

Sketch of proof. Aの$\mathfrak{a}$-adic topologyのideal of definitionの生成元の最小個数に関する帰納法による。結局

$\mathfrak{a}$ が principal の場合に帰着し、Theorem 1 を適用して証明される。

Lemma 1. A、F、B、$\mathcal{V}$ は今までと同じものを表わすとする。$C = S_B(F/F^2)$ とおき、$\mathcal{V}'$ によって、$g: \mathrm{Spec}\, C \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B$ による $\mathcal{V}$ の reciprocal image を表わす。このときには、embedding $Z = \mathrm{Spec}\, C \hookrightarrow \mathbb{A}_S^{2N+g}$ (N, g は今までと同じ数を表わす) で、次の性質をみたすものが存在する。

i.e. Z の defining ideal を I と表わすと、任意の affine open set $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}'$ 上で conormal sheaf I/I^2 は free である。

proof. $C = B[y_1, \cdots, y_n]/E = A[x, y]/I$ とおく。

$\mathcal{V}$ 上では、

(i) $\quad 0 \longrightarrow F/F^2 \longrightarrow \Omega_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$: exact.

$\mathcal{V}'$ 上では、

(ii) $\quad 0 \longrightarrow g^*(\Omega_{B/A}) \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{C/B} \longrightarrow 0$: exact

& $\quad \Omega_{C/B} = g^*(F/F^2)$。

affine open set $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}'$ 上では、(i) から、

$$0 \longrightarrow g^*(F/F^2) \longrightarrow \text{free} \longrightarrow g^*\Omega_{B/A} \longrightarrow 0 \text{ : exact.}$$

この sequence と、(ii) の sequence は共に split するので $\mathcal{U}$ 上

では、$\Omega_{C/A}$ は free になる。さらに、V'上では

$$0 \to I/I^2 \to \Omega_{A[x,y]} \otimes C \to \Omega_{C/A} \to 0 \quad : \text{exact}.$$

U上では右の2つの項は free だから

$$I/I^2 \oplus C^N \cong C^{N+g}$$

となる。

今Z上で$z_i = 0$となる N variables z_i をつけ加える。すると、$Z \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x, y, z]$、$C = A[x, y, z]/I'$ で、

$$I'/I'^2 = I/I^2 \oplus C^N \cong C^{N+g},$$

となる。したがって、I'/I'^2はU上で free である。q.e.d.

Theorem 3. $(A, \mathfrak{a})$ を henselian pair とし、$\bar{A}$ をAの $\mathfrak{a}$-adic completion とする。$\bar{a} \in \bar{A}^N$が、$f(\bar{a}) = 0$, $(\mathfrak{a}\bar{A})^r \subset H(\bar{a})$ for some r をみたすならば、任意の自然数nに対して、$a \in A^N$ で、$f(a) = 0$、$a \equiv \bar{a} \pmod{\mathfrak{a}^n}$ となるものが存在する。

Sketch of proof. $\mathfrak{a}$-adic topology の ideal of definition の生成元の個数に関する帰納法によって証明する。$l = 0$ のときは自明である。$l-1$のとき証明できたとして、$(t_1, \dots, t_l)$ を ideal of definition の生成元の系とする。$t_i \in \mathfrak{a}$ としてよい。A_1をAの(t_1)-adic completion とする。henselian pair $(A/(t_1^c) = A_1/(t_1^c),\ \mathfrak{a}/(t_1^c) = \mathfrak{a}\bar{A}/(t_1^c))$ に帰納法の仮定を適用すると、$a_1 \in A_1^N$ で $f(a_1) \equiv 0 \pmod{t_1^c}$, $a_1 \equiv \bar{a} \pmod{\mathfrak{a}^c}$ となるものが存在する。cを十分大きくとって Theorem 1 を適用すると、任意の自然数nに対して上のa_1を使って、次の条件をみたす $a_1' \in A_1^N$の存在が証明できる。i.e. $f(a_1')=0$, $a_1' \equiv \bar{a} \pmod{\mathfrak{a}^n}$。かくして、$\mathfrak{a}$が principal の場合にこの Theorem を証明すればよい。$\mathfrak{a}=(t)$とする。$C = S_B(F/F^2)$、$Z = \mathrm{Spec}\, C$ とおく。0-section $: X = \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow Z = \mathrm{Spec}\, C$ を使って、$\bar{a}$は$C\otimes_A \bar{A}$ の $\bar{A}$-section を与え、一方、Cの A-section から structure morphism $: Z \longrightarrow X$ を使って、B の A-section を得る。よって、XをZでおきかえることができる。Lemma 1 によって存在を保証された embedding $: Z \hookrightarrow A_S^{2N+8}$ を考える。Zの defining ideal をIと表わす。ところで affine open set $U \subset V$で$\bar{V}$における reciprocal image が $\bar{a}(\mathrm{Spec}\,\bar{A} - V(\mathfrak{a}\bar{A}))$ を含むものが存在する。

⊙ 仮定によって、$t^r \in H(\bar{a})$である。したがって、$t^r = \bar{h}(\bar{a})$, $\bar{h} \in H\cdot\bar{A}$ とかける。$h \in H$ で $h \equiv \bar{h} \pmod{t^{r+1}}$ なるものをとる。このときには、$h(\bar{a}) = t^r(1+ty)$, $y \in \bar{A}$ とかける。t^r, $1+ty$ は共に $\mathrm{Spec}\,\bar{A} - V(\mathfrak{a}\bar{A})$ で unit になるので $U = X - V(h)$ が求めるものであること

は明らかである。

$\mathcal{U}$上では、I/I^2 は free of rank $N+g$ である。$(g_1, \cdots, g_{N+g}) = (g)$ が $\mathrm{Spec}\, A[x, y, z]_h$（但し $\mathbb{A}_S^{2N+g} = \mathrm{Spec}\, A[x, y, z]$）で ideal I を生成するとする。hをその中でおきかえて、

$$hI \subset (g)$$

と仮定してよい。一方 hのとり方から、

$$h(\bar{a})\bar{A} \supset t^\delta \bar{A}$$

なる整数δが存在する。Δによって、ideal (g)に associate される Jacobian matrix の $N+g$ 次の小行列式によって生成される $A[x, y, z]$ の ideal を表わすと、

$$\Delta(\bar{a}) \supset t^\gamma \bar{A}$$

なる整数γが存在する。したがって、次の Lemma 2から、この A-section a で任意の整数nに対して、次の条件をみたすものが存在する。

i.e. $a \equiv \bar{a} \pmod{t^n}$, $g_1(a) = 0, \cdots, g_{N+g}(a) = 0$.

$n > \delta$ならば $h(a)A \ni t^\delta$ である。したがって、$t^\delta I(a) = 0$ となる。一方 $a \equiv \bar{a} \pmod{t^n}$ だから、$I(a) \subset (t^n)$ である。nを十分大きくとると、Aの t-torsion elements で ideal (t^n)に属するものは 0 だけとなる。(Artin - Rees).

よって、$I(a) = 0$。かくして、$a \in A^N$が求めるものである。

q.e.d.

Lemma 2. $(A, \mathfrak{a})$ を henselian pair とし. $B = A[X]/F$. $F = (f_1, \cdots, f_q)$ とする. Δ によって. Jacobian matrix $(\partial f_i/\partial X_j)$ の q 次の小行列式によって生成される ideal を表わす. 整数 n, h 及び $a \in A^N$ が次の条件をみたすとする.
i.e. $n > 2h$, $F(a) \subset \mathfrak{a}^n$, $\Delta(a) \supset \mathfrak{a}^h$.
このときには. $(a') \in A^N$ で $a' \equiv a \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{a}^{n-h})$. $f(a') = 0$ となるものが存在する.

証明は参考文献を参照されたい。

参考文献

Elkik : Solutions d'Equations au-dessus d'anneaux henséliens. (manuscript).

(石橋康徳記)