数理解析研究所講究録
第 184 巻 1973 年 29-35

ステファン問題とその周辺

東大　工　河原田秀夫

§1. 序

水の運動を考慮した一次元ステファン問題について述べる。

§2. 氷上の水の運動

2.1. 問題の設定

溶解した水が氷面に平行に流れると仮定したときのステファン問題を考える。このとき水の熱方程式に新たに加わる項は層間の摩擦力によって生じる熱の項である。

$T(x,t)$：水の温度；$u(x,t)$：水の速度；$s(t)$：自由境界としたとき，我々の問題は次の方程式系で記述される。

(1.1) $T_t = kT_{xx} + \alpha (u_x)^2, \quad 0<x<s(t), \quad t>0$

(1.2) $T(0,t) = f(t), \quad t>0$

(1.3) $T(s(t),t) = 0, \quad t>0$

$$(1.4)\qquad T(x,0)=\varphi(x),\qquad 0<x<b$$

$$(1.5a)\qquad \dot{s}=-l\,T_x(S(t),t),\qquad t>0$$

$$(1.5b)\qquad s(0)=b,\qquad b>0$$

$$(1.6)\qquad u_t=\nu u_{xx},\qquad 0<x<S(t),\quad t>0$$

$$(1.7)\qquad u(0,t)=g(t),\qquad t>0$$

$$(1.8)\qquad u(x,0)=\psi(x),\qquad 0<x<b.$$

(1.1)は水の熱方程式，(1.2)，(1.3)はその境界条件，(1.4)は初期条件である。(1.5)は熱平衡の方程式である。(1.6)は水の運動方程式で、(1.7)，(1.8)はその境界及び初期条件を表わす。ただしk：熱拡散係数；l：熱伝導係数；ν：力学的粘性係数；α：粘性係数に比例した正の係数でbは$t=0$における水の深さを表わす。以後簡単のため$k=l=\nu=\alpha=1$とおき，(1.1)～(1.8)を(FBP)と略記する。

2.2. 仮定と結論

f, g, ψ, φ，について次のように仮定する。

仮定(A)：(i) f, gは十分滑らか；(ii) f, gは非減少関数；(iii) $\varphi(x)=\frac{f(0)}{b}\cdot(b-x)$ $(0\leqq x\leqq b)$；(iv) $\psi(x)=\frac{g(0)}{b}(b-x)$ $(0\leqq x\leqq b)$：

このとき我々は次の定理を得る。

<u>定理</u> 仮定(A)のもとで，(FBP)は解を持つ。

注意　f, g が仮定(A)の(i), (ii)とさらに(iii)′ $g(0)=0$; (iv)′ $\dot{g}(0)>0$ をみたせば(FBP)は $b=0$ のときにも解を持つ。

§3.　準備など

解の構成に必要ないくつかの補題を準備する。σ を任意の正定数とするとき，次のステファン問題

$$T_t = T_{xx} + h(x,t),\quad 0<x<s(t),\quad 0<t<\sigma$$

$$T(0,t) = f(t),\quad 0<t<\sigma$$

$$T(s(t),t) = 0,\qquad ,$$

$$T(x,0) = \varphi(x),\quad 0<x<b$$

$$\dot{s}(t) = -T_x(s(t),t),\quad 0<t<\sigma$$

$$s(0) = b\ (>0),$$

を(FBP)$_h$と略記する。

<u>定義1</u>　$h=h(x,t)$ が

(i)　$h \geqq 0$ $(0 \leqq x < +\infty,\ 0 \leqq t \leqq \sigma)$;

(ii)　h, h_x が $0 \leqq x < +\infty$, $0 \leqq t \leqq \sigma$ で連続である

をみたすとき，h は条件(B)をみたすという。

<u>補題2</u>　(Friedman[1])　(FBP)$_h$において，h が条件(B)をみたすとき，(FBP)$_h$は一意的解を持ち，自由境界 $x=s(t)$ は時間とともに単調に増加する。

条件(B)をみたす $h_i = h_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$ に対する自由境界を $x = s_i = s_i(t)$ としよう。

<u>補題3</u>　h_i $(i = 1, 2)$ が条件(B)とさらに $h_1 \leqq h_2$ $(0 \leqq x < +\infty,\ 0 \leqq t \leqq \sigma)$ をみたすとき、

(3.1)　$s_1 \leqq s_2$　$(0 \leqq t \leqq \sigma)$

が成り立つ。

$(FBP)_h$ において、h として正定数 H をとるときの自由境界を $x = s_H(t)$ とする。

<u>補題4</u>　$(FBP)_h$ において、h が $0 \leqq h(x, t) \leqq H$ $(0 \leqq x < +\infty,\ 0 \leqq t \leqq \sigma)$ をみたすとき、

(3.2)　$0 \leqq -T_x(s(t), t) \leqq C_1$

が成り立つ。ただし $C_1 = \frac{H}{2} \cdot s_H(\sigma) + \frac{T_0}{b}$ である。

$x = r(t)$ $(0 \leqq t \leqq \sigma)$ は (i) $r \in C^1(0, \sigma)$; (ii) $r(0) = b > 0$; (iii) $\dot{r}(t) > 0$ $(0 < t < \sigma)$ をみたすとしよう。いま、

$h' = h'(x, t)$ は次の条件

(i) 領域 $0 \leqq x \leqq r(t)$, $0 \leqq t \leqq \sigma$ では条件(B)をみたす;

(ii) 領域 $x > r(t)$, $0 \leqq t \leqq \sigma$ では恒等的に 0 である

をみたす関数とする。

<u>補題5</u>　$(FBP)_k$ において，k として上記の k' をとるときもまた，$(FBP)_k$ は一意的解を持つ。

境界 $x=s(t)$ $(0 \leqq t \leqq \sigma)$ が時間とともに単調に増加するような，すなわち，$x=s(t)$ が前記 $x=r(t)$ と同じ条件をみたす初期値・境界値問題

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, && 0<x<s(t),\quad 0<t<\sigma,\\
&u(0,t) = g(t), && 0<t<\sigma,\\
&u(s(t),t) = 0, && \quad〃\\
&u(x,0) = \varphi(x), && 0<x<b,
\end{aligned}
$$

を $(IVP)_s$ と略記する。

<u>補題6</u>　$(IVP)_s$ は一意的解 $u=u(x,t)$ を持ち，u は

(3.3)　$0 \leqq -u_x(x,t) \leqq c_2 \quad (0 \leqq x \leqq s(t),\ 0 \leqq t \leqq \sigma)$

をみたす。ただし，$c_2 = \dfrac{v_0}{b}$ である。

§4.　定理の証明

4.1.　解の構成には逐次近似法を用いる。$(FBP)_{k=0}$ の解を $\{T^{(0)}, S^{(0)}\}$ とし，$S=S^{(0)}$ のときの $(IVP)_s$ の解を $u^{(0)}=u^{(0)}(x,t)$ としよう。このとき，$\{T^{(0)}, S^{(0)}, u^{(0)}\}$ を出発値とする。$k=\{u_x^{(0)}\}^2$ のときの $(FBP)_k$ の解を $\{T^{(1)}, S^{(1)}\}$ と

し，$s=s^{(1)}$のときの$(\mathrm{IVP})_s$の解を$u^{(1)}$とすれば，$\{T^{(1)}, s^{(1)}, u^{(1)}\}$が第1近似となる。以下同様に近似列$\{T^{(n)}, s^{(n)}, u^{(n)}\}$が構成される。各段階における解の一意・存在は補題5・6により保証される。

4.2. $V^{(n)}=V^{(n)}(t)=T_x(s^{(n)}(t),t)$，$v^{(n)}=v^{(n)}(t)=u_x^{(n)}(s^{(n)}(t),t)$としたとき，近似列$\{T^{(n)}, s^{(n)}, u^{(n)}\}$の代りに$\{V^{(n)}, s^{(n)}, v^{(n)}\}$を考えよう。補題6を用いれば，$n=0,1,2,\cdots\cdots$に対して

(4.1) $\qquad 0 \leqq \{u_x^{(n)}\}^2 \leqq H \quad (0 \leqq x \leqq s^{(n)}(t),\ 0 \leqq t \leqq \sigma)$

が成りたつ。ただし，$H=(C_2)^2$である。さらに，(4.1)と補題4を用いれば，$n=0,1,2,\cdots\cdots$に対して

(4.2) $\qquad 0 \leqq -V^{(n)} = \dot{s}^{(n)} \leqq C_1 \quad (0 \leqq t \leqq \sigma)$

が成り立ち，Ascoli-Arzelaの定理を用いれば，適当な部分列に対して$s^{(n')} \to s$を得る。

また(4.2)より$\{V^{(n')}\}$は$L^\infty(0,\sigma)$の有界集合であるから，$L^\infty(0,\sigma)=L_1^*(0,\sigma)$で*弱収束し，その極限を$V^\infty$としよう。(3.3)を用いれば，同様な議論により$\{v^{(n)}\}$もまた*弱極限$v^\infty \in L^\infty(0,\sigma)$を持つ。

(4.3) $\{V^\infty, s, v^\infty\}$が(FBP)と同値な積分方程式系の解になることは[2]におけるとほぼ同様な議論を繰りかえすことにより示される。

文献

[1] A. Friedman, Remarks on Stefan-Type Free Boundary Problems for Parabolic Equations, J. Math. and Mech., 9 (1960) pp. 885-903.

[2] 河原田秀夫, ステファンの問題について, 京都大学数理研講究録 164 (1972年10月)。