数理解析研究所講究録
第184巻 1973年 42-53

増大度αの半群の生成作用素について

早大 理工　岡沢　登

本稿では有界線形作用素の作る非有界半群の一種である増大度αの半群の生成作用素の閉包を特徴付ける問題を取扱う.

Banach空間X上の有界線形作用素の全体からなる集合を$\mathcal{B}(X)$で表わす. $\mathcal{B}(X)$内の族$\{T(t); t>0\}$がX上の半群であるとは, $T(t+s)=T(t)T(s)$, $t, s>0$が成り立ち, また$T(t)$が$t>0$で強連続であるときをいう. X上の半群$\{T(t)\}$の生成作用素A_0は, $A_0 u = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}[T(h)u-u]$によって定義される.

1. 増大度αの半群とその生成定理

X上の半群$\{T(t)\}$に対して

$$N_0 = \bigcap_{t>0}\{u \in X ; T(t)u = 0\}, \qquad X_0 = \bigcup_{t>0} T(t)[X]$$

とおこう. そのとき$\{T(t)\}$が増大度α($\alpha \geq 0$)であるとは, 次の三条件を満足することをいう.

(i) $N_0 = \{0\}$.

(ii) $\|t^{\alpha}T(t)\| = O(1) \qquad (t \to 0+)$.

(iii) $\bar{X}_0 = X$, 即ち X_0はXで稠密である.

増大度αの半群の生成作用素は可閉であり，その閉苞が存在する．但し，増大度0の半群は(C_0)級半群に他ならず，その生成作用素はそれ自身閉作用素である．増大度αの半群はDa Prato [1] によってαが非負整数の場合が導入され，その後Sobolevskii [3]，Zafievskii [6] 等によって一般のαの場合まで含めて論じられるようになったのであるが，[1, 3, 6] には生成定理の叙述は見当らない．

本稿の目的は増大度αの半群に対する一つの生成定理を紹介することにある．

nを$\alpha > 0$の整数部分とすれば，増大度αの半群の生成定理は次のように述べられる．

定理 1.1　Banach空間X内の閉線形作用素Aが増大度αの半群の生成作用素の閉苞であるためには，次の四条件を満足することが必要十分である．

(I) 実数ωがあって，ωより大きいすべてのξに対して，$R(\xi - A) \supset D(A^{n+1})$が成立し，かつ$(\xi - A)^{-1}$が存在する．

(II) すべての$v \in D(A^{n+1})$に対して

$$\|(\xi - A)^{-m} v\| \leqq \frac{M}{(m-1)!} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{(\xi-\omega)^{m-\alpha}} \|v\|, \quad \xi > \omega, \quad m = k(n+1)$$

となるような正の定数Mが存在する．但し，$k = 1, 2, \cdots$．

(Ⅲ) $\overline{A | D(A^{n+2})} = A$，即ち $D(A^{n+2})$ は A の芯であり，また $\overline{D(A)} = X$．

(Ⅳ) ω より大きいある b に対して $(b-A)^{n+1}$ は可閉である．

次の系はZabreiko-Zafievskii [5] によって報じられているが，定理 1.1 から容易に導くことが出来る．

系 1.2　　X内の閉作用素Aが増大度 α $(0 < \alpha < 1)$ の半群の生成作用素の閉苞であるためには，次の三条件を満足することが必要十分である．

(Ⅰ) 実数 ω があって，ω より大きいすべての ξ に対して $(\xi - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ が存在する．

(Ⅱ) ω より大きい ξ と正整数 m に対して

$$\|(\xi - A)^{-m}\| \leqq \frac{M}{(m-1)!} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{(\xi-\omega)^{m-\alpha}}$$

となるような正の定数Mが存在する．

(Ⅲ) $\overline{D(A)} = X$．

注意 1.3　　Aを増大度 α の半群 $\{T(t)\}$ の生成作用素の閉苞とすれば，各 $u \in D(A^{n+1})$ に対して

$$T(t)u = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{t}{m}A\right)^{-m}u, \qquad t>0,$$
$$\lim_{h\downarrow 0}\|T(h)u-u\|=0$$

が成立する．但し，$n=[\alpha]$．

2．準備

X上の半群$\{T(t)\}$に対して

$$\omega_0=\lim_{t\to\infty}\frac{\log\|T(t)\|}{t}, \qquad \Sigma=\{u\in X;\ \lim_{h\downarrow 0}\|T(h)u-u\|=0\}$$

とおく．また$\{T(t)\}$の生成作用素A_0の

$$D(\Omega)=\{u\in D(A_0);\ A_0u\in\Sigma\}$$

上への制限をFellerに従ってΩで表わすことにする．

補題2.1　　$\mathrm{Re}\,\lambda>\omega_0$なる各$\lambda$に対して，$R(\lambda-\Omega)=\Sigma$であり，かつ$(\lambda-\Omega)^{-1}$が存在する．更に

(2.1)　　$$(\lambda-\Omega)^{-1}v=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)v\,dt, \qquad v\in\Sigma.$$

次の補題はZafievskii [6]によって報じられている．

補題2.2　　$N_0\cap\bar{X}_0=\{0\}$ならば，A_0は可閉である．このとき$A=\bar{A}_0$とおけば，各$u\in D(A)$に対して次式が成立する：

(2.2)　　$$\frac{d}{dt}T(t)u=A_0T(t)u=T(t)Au, \qquad t>0.$$

証明　　各$u\in D(A_0)$に対して

(2.3) $\qquad T(t)u - T(r)u = \int_r^t T(s)A_0 u\, ds, \quad t \geqq r > 0$

と書ける．$\{u_n\}$ を $D(A_0)$ 内の列で $u_n \to 0$ かつ $A_0 u_n \to v$ となるものとし，$v = 0$ をいおう．$R(A_0)$ は $\bar{X}_0$ に含まれるので $v \in \bar{X}_0$ である．(2.3) で $u = u_n$ とおいて，$n \to \infty$ とすれば，$\int_r^t T(s)v\, ds = 0$ 従って t で微分して $T(t)v = 0$ となる．t は任意故，結局 $v \in N_0 \cap \bar{X}_0$ が示された．

補題 2.3 $\qquad N_0 \cap \bar{X}_0 = \{0\}$ とし，$A = \bar{A}_0$ とおけば，$\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$ なる各 λ に対して，$(\lambda - A)^{-1}$ が存在する．このとき

(2.4) $\qquad (\lambda - A)^{-(m+1)} v = \frac{1}{m!}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^m T(t) v\, dt, \qquad v \in \Sigma.$

証明 $\qquad (\lambda - A)^{-1}$ の存在だけを示す．(2.2) により各 $u \in D(A)$ と $t > 0$ に対して次式の成立することがわかる．

(2.5) $\qquad T(t)u = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(t+s)(\lambda - A)u\, ds, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0.$

$\bar{X}_0 = \overline{D(A_0)}$ であるから，$u \in \bar{X}_0$ となっている．$(\lambda - A)u = 0$ ならば，(2.5) から $T(t)u = 0$ が得られる．従って，$v \in N_0 \cap \bar{X}_0$.

A_0 が可閉ならば，Ω もそうなるが，次の補題が成立する．

補題 2.4 $\qquad N_0 \cap \bar{X}_0 = \{0\}$ ならば，$\bar{\Omega} = \bar{A}_0$.

上の補題と例えば牛島 [4] の命題 2.4 を組合わせると

$\overline{\Omega|D(\Omega^\infty)} = \bar{\Omega} = \bar{A}_0$が得られる（尚［え］の Cor. 2.3 も参照されたい）．但し，$D(\Omega^\infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D(\Omega^m)$.

3．増大度αの半群の生成作用素

本節では定理 1.1 の必要性の方の証明の概略を述べる．

A_0を増大度αの半群の生成作用素とすれば，条件(i)により$A = \bar{A}_0$が存在する（補題 2.2）．このときまた$\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$なる各$\lambda$に対して$(\lambda - A)^{-1}$が存在する（補題 2.3）．

補題 3.1　$\{T(t)\}$は増大度α，$A = \bar{A}_0$とする．mを正整数λを$\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$なる複素数とすれば，各$u \in D(A^m)$に対して

(3.1)　$$T(t)u = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty s^{m-1}e^{-\lambda s}T(t+s)(\lambda - A)^m u\,ds\ ,\quad t > 0\ .$$

更に，$(\lambda - A)^m$は可閉である．

証明　(2.5)があるから，$\frac{d}{ds}[s^m e^{-\lambda s}T(t+s)u] = m s^{m-1}e^{-\lambda s} \times T(t+s)u - s^m e^{-\lambda s}T(t+s)(\lambda - A)u$に注意すれば，(3.1)が示せる．$(\lambda - A)^m$が可閉なことを見るには，(3.1)を用いて補題 2.2 の証明に類する議論を行えばよい．

補題 3.2　$\{T(t)\}$は増大度α，$A = \bar{A}_0$とする．そのとき

$$D(A^{n+1}) \subset \Sigma,\qquad n = [\alpha].$$

証明　(3.1)から各$u \in D(A^{n+1})$に対して

$$u = \frac{1}{n!}\int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s)(\lambda - A)^{n+1} u\, ds \quad , \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$$

が得られる．あとは適当な $\omega > \omega_0$ に対して

(3.2) $$\| t^\alpha T(t) \| \leqq M e^{\omega t}, \quad t > 0$$

となるような定数 $M > 0$ がとれることに注意して収束定理を適用すればよい．

補題 3.3　$\{T(t)\}$ と A は補題 3.2 に同じとする．そのとき A は定理 1.1 の四条件を満足する．

証明　補題 3.2 と 2.1 から，$D(A^{n+1}) \subset R(\lambda - A)$ が得られる．$(\lambda - A)^{-1}$ が存在するから (I) はよい．但し，ω は (3.2) のそれとする．(II) は (2.4) と (3.2) から確かめられる．補題 3.2 により，$D(A^\infty) = D(\Omega^\infty)$ であるから，$D(A^{n+2})$ も A の芯になっている（補題 2.4 の後の注意参照）．$\overline{D(A_0)} = \bar{X}_0$ 故，$\overline{D(A)} = X$ もよい．従って (III) が満たされている．(IV) は補題 3.1 で証明済．

4．増大度 α の半群の生成

定理 1.1 で $\omega = 0$ の場合だけ考えておけばよい．

補題 4.1　A は X 内の閉作用素で条件 (I) − (III) ($\omega = 0$) を満たすものとする．そのとき各 $\xi > 0$ に対して次に掲げる性質をもった $S(\xi, A) \in \mathcal{B}(X)$ が存在する．

(a) $AS(\xi,A)u = S(\xi,A)Au$, $\quad u \in D(A)$.

(b) $S(\xi,A)(\xi-A)^{n+1}v = v$, $\quad v \in D(A^{n+1})$.

(c) $S(\xi,A)$ の可逆性と $(\xi-A)^{n+1}$ の可閉性とは同値である.

証明 $S(\xi,A) = \overline{(\xi-A)^{-(n+1)}|D(A^{n+1})}$ とおけばよい.

注意4.2 $(\xi-A)^{n+1}$ が閉包 $\overline{(\xi-A)^{n+1}}$ をもてば, $S(\xi,A) = [\overline{(\xi-A)^{n+1}}]^{-1}$ と書ける. また条件(II)から

$$\|S^k(\xi,A)\| \leqq \frac{M}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\xi^{m-\alpha}}, \quad \xi>0, \quad m=k(n+1) \tag{4.1}$$

となる. 但し, $k \geqq 1$. 尚

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(m-1)!\,m^{-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} = \lim_{m\to\infty}\frac{m!\,m^{-\alpha}}{\Gamma(m+1-\alpha)} = 1$$

が成立するから, (4.1)を次のように書き直すことが出来る.

$$\xi^{k(n+1)}\|S^k(\xi,A)\| \leqq M'\left[\frac{\xi}{k(n+1)}\right]^{\alpha}, \quad \xi>0, \quad k \geqq 1.$$

補題4.3 Aは補題4.1と同じものとする. そのとき各整数 $m \geqq 2$ に対して, $D(A^m)$ は A の芯である.

証明 $D(A^{2n+3})$ が A の芯になることだけ示しておこう. $D(A^{n+2})$ が A の芯と仮定しているから, 各 $u \in D(A^{n+2})$ に対して $D(A^{2n+3})$ 内の列 $\{u_p\}$ で $u_p \to u$ かつ $Au_p \to Au$ となるものを作ればよい.

$b>0$ とする. そのとき各 $u \in D(A^{n+2})$ に対して $u = S(b,A)v$ となるような $v \in D(A)$ が存在する. 実際, $v=(b-A)^{n+1}u$ とお

けば，補題4.1(b)から$S(b,A)v = S(b,A)(b-A)^{n+1}u = u$．さて仮定から各$v \in D(A)$に対して$D(A^{n+2})$内の列$\{v_p\}$で$v_p \to v$かつ$Av_p \to Av$となるものがとれる．$u_p = (b-A)^{-(n+1)}v_p \in D(A^{2n+3})$とおけば，$u_p = S(b,A)v_p \to S(b,A)v = u \in D(A^{n+2})$かつ

$$Au_p = S(b,A)Av_p \to S(b,A)Av = Au .$$

但し，最後の式で補題4.1(a)を用いた．

さて

$$A_i = \frac{1}{n+1}[i^{n+2}S(i,A) - i] \in \mathcal{B}(X)$$

$$T_i(t) = e^{tA_i}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

とおこう．このときまず各$u \in D(A^{2(n+1)})$に対して

$$\lim_{i\to\infty} A_i u = Au \tag{4.2}$$

を示すことが出来る．従って$\{A_i\}$が(C_0)級半群の生成における吉田近似の役割を演ずることが予想される．

補題4.4　　Aは補題4.1と同じものとする．そのとき

$$T(t) = s\text{-}\lim_{i\to\infty} T_i(t), \quad t > 0 \tag{4.3}$$

が存在する．収束は区間$[\varepsilon, 1/\varepsilon]$上で一様である．尚

$$\|T(t)\| \leqq 1 + Nt^{-\alpha}, \quad t > 0, \tag{4.4}$$

$$S(\xi, A) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\xi t} t^n T(t)\,dt, \quad \xi > 0, \tag{4.5}$$

$$AT(t)u = T(t)Au, \quad u \in D(A), \quad t > 0. \tag{4.6}$$

補題4.5　　AはX内の閉作用素で条件(I)−(IV)　($\omega = 0$)を満たすものとする．そのとき(4.3)で与えられる$\mathcal{B}(X)$内の族$\{T(t)\,;\,t>0\}$は増大度αの半群を形成する．

証明　　(4.3)の収束が$[\varepsilon, 1/\varepsilon]$上で一様であり，かつ$T_i(t)$が$t$に関して連続であるから，$T(t)$は$t>0$で強連続になる．$\{T(t)\}$が半群の性質をもつことは，$\{T_i(t)\}$がそうであることからわかる．かくて$\{T(t)\}$は$X$上の半群である．

次に$\{T(t)\}$が増大度αであることを示そう．(4.5)から各$u \in X$に対して，$S(\xi, A)u \in \Sigma$である（証明は補題3.2と同様）．$T(t)u = 0$とし，またbを条件(IV)における実数とする．そのとき

$$T(t)\,S(b,A)u = S(b,A)T(t)u = 0, \quad t > 0$$

となるが，$S(b,A)u \in \Sigma$であるから結局$S(b,A)u = 0$が得られる．条件(IV)によって$S(b,A)$の可逆性が保証されているから（補題4.1(c)），$u = 0$が出る．従って(4.4)と合わせれば(i)と(ii)はよい．さて$\bar{X}_0 = \bar{\Sigma}$であるから，$\bar{X}_0 = X$を見るには，$\bar{\Sigma} = X$を示せばよい．しかるに$S(b,A) = [\overline{(b-A)^{n+1}}]^{-1}$と書けたから（注意4.2），

$$D(A^{n+1}) \subset \Sigma. \tag{4.7}$$

従って，$D(A^{n+1}) = X$から$\bar{\Sigma} = X$が得られる．

補題4.6　A と $\{T(t)\}$ は補題4.5と同じものとし，また $\Omega(\subset A_0)$ は2節と同じものとする．そのとき各 $\xi>0$ に対し

(4.8)　$$(\xi-A)^{-1}v=(\xi-\Omega)^{-1}v,\quad v\in\Sigma.$$

証明　$\frac{d}{dt}T_i(t)=T_i(t)A_i$ であるから，(4.2)と(4.3)により各 $u\in D(A^{2(n+1)})$ に対して

(4.9)　$$T(t)u-T(\varepsilon)u=\int_\varepsilon^t T(s)Au\,ds,\quad t\geqq\varepsilon>0.$$

しかるに $D(A^{2(n+1)})$ は A の芯であるから，(4.9)はすべての $u\in D(A)$ に対して成立する．従って

$$\frac{d}{dt}T(t)u=T(t)Au,\quad u\in D(A),\quad t>0.$$

これからまず(4.6)と(4.7)を用い，次に(4.4)と $\overline{D(A^{n+1})}=X$ に注意すれば

$$(\xi-A)^{-1}T(s)w=\int_0^\infty e^{-\xi t}T(t+s)w\,dt,\quad w\in X$$

が示せる．ここで $v\in\Sigma$ とすれば，

$$(\xi-A)^{-1}T(s)v=T(s)\int_0^\infty e^{-\xi t}T(t)v\,dt=T(s)(\xi-\Omega)^{-1}v$$

と書ける((2.1)を見よ)．従って $(\xi-A)^{-1}T(s)v\to(\xi-\Omega)^{-1}v$ ($s\downarrow 0$)．一方，$T(s)v\to v$ ($s\downarrow 0$) であるから，$(\xi-A)^{-1}$ が閉作用素であることにより，(4.8)が得られる．

定理1.1の十分性の証明は次の補題によって完結せられる．

補題4.7　A と $\{T(t)\}$ は補題4.5と同じものとする．そ

のとき $A=\bar{A}_0$ である．

証明　(4.7)と(4.9)から

$$T(t)u-u=\int_0^t T(s)Au\,ds,\quad u\in D(A^{n+2}),\quad t>0.$$

これから $A|D(A^{n+2})\subset A_0$ が得られる．

さて $R(\xi-\Omega)=\Sigma$ であるから（補題2.1），(4.8)は $\Omega\subset A$ を意味する．しかるに $\bar{\Omega}=\bar{A}_0$ であるから（補題2.4），$A_0\subset A$ が知られる．かくて

$$A|D(A^{n+2})\subset A_0\subset A.$$

$D(A^{n+2})$ は A の芯と仮定しているから，$\bar{A}_0=A$ となる．

文献

1. G. Da Prato, C.R. Acad. Sci. Paris 262 (1966), 996 - 998; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20 (1966), 753 - 782.
2. Miyadera-Oharu-Okazawa, Generation theorems of semi-groups of linear operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. 8 (1972/73), to appear.
3. P. E. Sobolevskii, Soviet Math. Dokl. 12 (1971), 202-205.
4. 牛島照夫，数理解析研究所講究録 134 (1972), 104-120.
5. Zabreiko-Zafievskii, Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 1523 -1526.
6. A.V. Zafievskii, Soviet Math. Dokl. 11 (1970), 1408 - 1411.