数理解析研究所講究録
第184巻 1973年 100-114

非線型楕円型固有値問題における
正の解のBifurcationについて

東大 理　　長崎 憲一

§0 序

本稿では、楕円型境界値問題に関する非線型固有値問題におけるBifurcationの一例を示す。

Dを滑らかな境界∂DをもつR^Nの有界領域とする。この時取扱う問題は

$$(P_\lambda)\begin{cases} Lu(x) = \lambda f(x, u(x)) & x \in D \\ Bu(x) = g(x, u(x)) & x \in \partial D \end{cases}$$

の形で表わされる。ここでLは2階一様楕円型作用素，Bは第3種境界作用素であり、特に $\varphi(x) \in C^\alpha(\bar{D})$に対して

$$\begin{cases} Lu(x) = \varphi(x) & x \in D \\ Bu(x) = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

の解作用素が positive operator となっている。

この時、非線型項が$f(x, 0) \equiv 0 \quad x \in \bar{D}$，$g(x, 0) \equiv 0 \quad x \in \partial D$を満すならば、$(P_\lambda)$は任意の$\lambda$に対して、常に0を解にもつ

ことは明らかであるが、$f(x,u)$，$g(x,u)$ が§1で述べる仮定を満足する時、(P_λ) の正の解の Bifurcation に関する次の定理が導ける。境界条件に非線型項を含まない問題に関しては、H.B. Keller [4]，P.H. Rabinowitz [8] らによって類似の結果が示されている。

定理　次の固有値問題 (E_0) の最小固有値を μ_0 とする。

$$(E_0)\begin{cases} L\varphi(x) = \lambda f_u(x,0)\,\varphi(x) & x\in D \\ B\varphi(x) = 0 & x\in\partial D \end{cases}$$

この時、$0<\lambda\leq\mu_0$ に対する (P_λ) の非負解は 0 だけである。$\mu_0<\lambda$ に対する (P_λ) の非負解は 0 と正の解 $v_\lambda(x)$ の2つだけである。更に、$v_\lambda(x)$ は λ に関して $[\mu_0,\infty)$ において $C_2(\bar{D})$ ノルムで連続である。但し $v_{\mu_0}(x)\equiv 0$ とする。

§1　仮定

作用素 L，B

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)u(x) \qquad x\in D$$

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^{1+\alpha}(\bar{D})$，$a_0(x)\in C^{\alpha}(\bar{D})$　かつ

任意の R^N の単位ベクトル $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$ に対して

$\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a > 0 \qquad x\in\bar{D}$　である。

$$Bu(x) \equiv \beta(x)u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \equiv \beta(x)u(x) + \sum_{i,j=1}^{N} n_i(x)a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \qquad x \in \partial D$$

$\beta(x) \in C^{1+\alpha}(\partial D)$ であり、$n(x) = (n_1(x), \cdots, n_N(x))$ は $x \in \partial D$ における単位外法線ベクトルである。

更に次の(I)又は(II)が満されている。

(I) $a_0(x) \geqq 0 \quad x \in D$ かつ $\beta(x) > 0 \quad x \in \partial D$

(II) $a_0(x) > 0 \quad x \in D$ かつ $\beta(x) \geqq 0 \quad x \in \partial D$

非線型項 $f(x.u)$, $g(x.u)$

(f-1) $f(x.u)$, $f_u(x.u) \in C^{\alpha}(\overline{D} \times \overline{R^+})$ 　但し $R^+ = (0, \infty)$

(f-2) $f(x.0) \equiv 0 \quad x \in \overline{D}$

(f-3) $f_u(x.0) > 0 \quad x \in \overline{D}$ であり、$x \in \overline{D}$ を固定した時、$f_u(x.u)$ は u に関して狭義単調減少である。

(f-4) 正数 M が存在して、$u \geqq M$ である時 $f(x.u) < 0 \quad x \in \overline{D}$ である。

(g-1) $g(x.u) \in C^{1+\alpha}(\partial D \times \overline{R^+})$

(g-2) $g(x, 0) \equiv 0 \quad x \in \partial D$

(g-3) $g_u(x.0) \equiv 0 \quad x \in \partial D$ であり、$x \in \partial D$ を固定した時、$\dfrac{g(x.u)}{u}$ は u に関して単調非増加である。

後の計算の便宜上、次の関数を導入しておく。

$$q(x;u,v)=\int_0^1 f_u(x;su+(1-s)v)\,ds \qquad (x,u,v)\in\overline{D}\times\overline{R^+}\times\overline{R^+}$$

(f-1～4)により、$q(x;u,v)$ は次の性質をもつ。

(q-1) $q(x;u,v)\in C^{\alpha}(\overline{D}\times\overline{R^+}\times\overline{R^+})$

(q-2) $f(x,u)-f(x,v)=q(x;u,v)(u-v)$

$q(x;u,v)=q(x;v,u)$

(q-3) $u_1\geqq u_2\geqq 0$, $v_1\geqq v_2\geqq 0$ の時

$q(x;u_1,v_1)\leqq q(x;u_2,v_2)$ であり、等号が成立するのは $u_1=u_2$, $v_1=v_2$ の時に限る。

§2 主な補題

§3の結論を証明する為に必要な3つの補題を示す。特に補題2.2は、最も基本的なものであり、その証明法は H. Amann [2] が "monotone method" と呼ぶものである。

定義 2.1

$\hat{u}(x)$, $\overline{u}(x)\in C^2(\overline{D})$ が

$$\begin{cases} L\hat{u}(x)\geqq\lambda f(x,\hat{u}(x)) & x\in D \\ B\hat{u}(x)\geqq g(x,\hat{u}(x)) & x\in\partial D\end{cases} \qquad \begin{cases} L\overline{u}(x)\leqq\lambda f(x,\overline{u}(x)) & x\in D \\ B\overline{u}(x)\leqq g(x,\overline{u}(x)) & x\in\partial D\end{cases}$$

を満す時，$\hat{u}(x)$, $\bar{u}(x)$ をそれぞれ (P_λ) の upper solution, lower solution と呼ぶ。

$u(x) \in C^2(\bar{D})$ が (P_λ) の解であり、$u(x) \geqq 0 \quad x \in \bar{D}$ 又は $u(x) > 0 \quad x \in \bar{D}$ を満す時，$u(x)$ を (P_λ) の非負解，正の解と呼ぶ。

補題 2.2

$\hat{u}(x)$, $\bar{u}(x) \in C^2(\bar{D})$ がそれぞれ (P_λ) の upper, lower solution であり、更に $\hat{u}(x) \geqq \bar{u}(x) \quad x \in \bar{D}$ である時、

$$\Omega + \lambda f_u(x, u) > 0 \qquad x \in \bar{D},\ u \in [\min_{\bar{D}} \bar{u}, \max_{\bar{D}} \hat{u}]$$

$$\omega + g_u(x, u) > 0 \qquad x \in \partial D,\ u \in [\min_{\partial D} \bar{u}, \max_{\partial D} \hat{u}]$$

をみたす $\Omega, \omega \geqq 0$ を選び，次の Iteration を考える。

$$\begin{cases} L v_{n+1}(x) + \Omega v_{n+1}(x) = \lambda f(x, v_n(x)) + \Omega v_n(x) & x \in D \quad (2.1) \\ B v_{n+1}(x) + \omega v_{n+1}(x) = g(x, v_n(x)) + \omega v_n(x) & x \in \partial D \quad (2.2) \end{cases}$$

$v_0(x) = \hat{u}(x)$, $v_0(x) = \bar{u}(x)$ とおいて得られる関数列をそれぞれ $\{\hat{v}_n(x)\}$, $\{\bar{v}_n(x)\}$ とする。この時 $\{\hat{v}_n(x)\}_{n \geqq 1}$, $\{\bar{v}_n(x)\}_{n \geqq 1}$ は $C^{2+\alpha}(\bar{D})$ に含まれ、$\{\hat{v}_n(x)\}$ は単調減少列であり、(P_λ) の解 $\hat{v}(x)$ に上から、又 $\{\bar{v}_n(x)\}$ は単調増加列であり、(P_λ) の解 $\bar{v}(x)$ に下から収束する。これは $C^2(\bar{D})$ における収束でもある。

更に (P_λ) の解 $v(x) \in C^2(\bar{D})$ が $\bar{u}(x) \leqq v(x) \leqq \hat{u}(x) \quad x \in \bar{D}$ を満たすならば、

$\bar{v}(x) \leqq v(x) \leqq \hat{v}(x) \quad x \in \bar{D}$ が成り立つ。

(証明) $\{\hat{v}_n(x)\}$ について証明する。$\{\bar{v}_n(x)\}$ に関しても同様。

(i) $\hat{u}(x) \geqq \hat{v}_n(x) \geqq \bar{u}(x) \quad x \in \bar{D}$

(ii) $\hat{v}_n(x) \geqq \hat{v}_{n+1}(x) \quad x \in \bar{D}$

(i), (ii) は最大値原理を用いて、帰納法で証明出来る。

$\{\hat{v}_n(x)\}$ は下に有界な単調減少列であるから、ある関数 $\hat{v}(x)$ に各点収束する。

$$\lim_{n\to\infty} \hat{v}_n(x) = \hat{v}(x) \qquad x \in \bar{D} \tag{2.3}$$

(iii) $\hat{v}(x)$ は (P_λ) の解であり、$\lim_{n\to\infty}\|\hat{v}_n - \hat{v}\|_{C^2(\bar{D})} = 0$ である。

(g-1) より、$\tilde{g}(x,u) \in C^{1+d}(\bar{D}\times\bar{R}^+)$ かつ $\tilde{g}(x,u) = g(x,u)\ (x,u)\in\partial D\times\bar{R}^+$ である $\tilde{g}(x,u)$ を選べる。

(2.1) (2.2) に [1] の L_p 評価を適用すると

$$\|\hat{v}_{n+1}\|_{W_p^2(D)} \leqq C\left(\|\lambda f(\cdot,\hat{v}_n)+\Omega\hat{v}_n\|_{L_p(D)}+\|g(\cdot,\hat{v}_n)+\omega\hat{v}_n\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial D)}+\|\hat{v}_{n+1}\|_{L_p(D)}\right)$$

$$\leqq C'\left(\|\lambda f(\cdot,\hat{v}_n)+\Omega\hat{v}_n\|_{L_p(D)}+\|\tilde{g}(\cdot,\hat{v}_n)+\omega\hat{v}_n\|_{W_p^1(D)}+\|\hat{v}_{n+1}\|_{L_p(D)}\right)$$

$\frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{g}(x,\hat{v}_n(x)) = \tilde{g}_{x_j}(x,\hat{v}_n(x)) + \tilde{g}_u(x,\hat{v}_n(x))\frac{\partial\hat{v}_n(x)}{\partial x_j}$ より、(i) の結果を考え合わせると

$$\|\hat{v}_{n+1}\|_{W_p^2(D)} \leqq C'' + C'''\|\hat{v}_n\|_{W_p^1(D)} \tag{2.4}$$

[1] によれば、任意の $\varepsilon' > 0$ に対して、正数 $C(\varepsilon')$ が存在して $\|u\|_{W_p^1(D)} \leqq C(\varepsilon')\|u\|_{L_p(D)} + \varepsilon'\|u\|_{W_p^2(D)} \quad u \in W_p^2(D)$ が成り立つ。$\varepsilon' C''' = \varepsilon < 1$ として、これを (2.4) に適用すれば

$$\|\hat{v}_{n+1}\|_{W_p^2(D)} \leqq C_0 + \varepsilon \|\hat{v}_n\|_{W_p^2(D)} \tag{2.5}$$

(2.5) より n によらない正数 M_0 をとり

$\|\hat{v}_n\|_{W_p^2(D)} \leqq M_0$ と出来る。ここで $p > \frac{N}{1-\alpha}$ をみたす p をとっておけば，Sobolev の埋め込み定理より、次の様な n によらない正数 M_1 が存在する。

$$\|\hat{v}_n\|_{C^{1+\alpha}(\overline{D})} \leqq M_1 \tag{2.6}$$

(2.1) (2.2) に [6] の Schauder 評価を行ない、(2.6) の結果を考え合わせると、次の様な n によらない正数 M_2 をとれる。 $\|\hat{v}_{n+1}\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})} \leqq M_2$ (2.7)

(2.7) と Ascoli - Arzela の定理から，$\{\hat{v}_{n+1}\}$ の任意の部分列は $C^2(\overline{D})$ で収束する部分列をもつが、この事実に (2.3) の結果を合わせると $\{\hat{v}_n(x)\}$ 自身が $C^2(\overline{D})$ で $\hat{v}(x)$ に収束する。$\hat{v}(x) \in C^2(\overline{D})$ であり、(P_λ) の解であることも明らかである。

補題の最後の部分は，$\overline{v}_n(x) \leqq v(x) \leqq \hat{v}_n(x) \quad x \in \overline{D}$ を帰納的に示し、$n \to \infty$ とすれば，

$\overline{v}(x) \leqq v(x) \leqq \hat{v}(x) \quad x \in \overline{D}$ は示される。 （証了）

注意 2.3

[1] の Theorem 12.1 (Compactness theorem) によれば、上で求めた解 $\hat{v}(x)$，$\overline{v}(x)$ は $C^{2+\alpha}(\overline{D})$ に属する。

補題 2.4

$\delta \geqq 0$ の時，次の固有値問題

$$(E_\delta)\begin{cases} L\varphi(x) = \lambda f_u(x,0)\varphi(x) & x \in D \\ (B+\delta)\varphi(x) = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

の最小固有値 μ_δ は単純固有値であり、対応する固有関数として $\varphi_\delta(x) > 0 \quad x \in \overline{D}$，$\|\varphi_\delta\|_{C^\alpha(\overline{D})} = 1$ なる $\varphi(x)$ をとれる。

更に $\lim_{\delta \downarrow 0} \mu_\delta = \mu_0$ である。

（証明）$\varphi \in C^\alpha(\overline{D})$ に対する $\begin{cases} Lu(x) = f_u(x,0)\varphi(x) & x \in D \\ (B+\delta)u(x) = 0 & x \in \partial D \end{cases}$

の解作用素を K_δ とすれば、$C^\alpha(\overline{D})$ 上の compact operator で、かつ [5] の意味での u_0- positive operator である。よって [5] §2 の結果を適用すれば、補題の前半は容易に示される。更に K_δ が K_0 に一様収束することを利用して $\lim_{\delta \downarrow 0} \mu_\delta = \mu_0$ は証明される。（証了）

補題 2.5（一般最大値原理 [7] Chapter 2 Theorem 10）

$h(x) \in C(\overline{D})$，$w(x)$，$u(x) \in C^2(\overline{D})$ が

$(L+h)[w(x)] \geqq 0 \quad x \in D$ かつ $w(x) > 0 \quad x \in \overline{D}$，

$(L+h)[u(x)] \leqq 0 \quad x \in D$ を満たしている時、$\frac{u(x)}{w(x)}$ は D で定数でない限り、D において非負最大値をとり得ない。

又、$\frac{u(x)}{w(x)}$ が境界 ∂D 上の点 P において非負最大値をとれば、

$\frac{u(x)}{w(x)}$ が定数でない限り、点Pにおける $\frac{u(x)}{w(x)}$ の外方向微分の値は正である。

§3　正の解の存在と非存在

補題 3.1

$\lambda > 0$ の時、$v(x) \in C^2(\overline{D})$ が (P_λ) の非負解ならば、

$0 \leqq v(x) \leqq M \quad x \in \overline{D}$ が成り立つ。

但し M は §1 $(f\text{-}4)$ に現われるものである。

定理 3.2

$0 < \lambda \leqq \mu_0$ の時、(P_λ) の非負解は 0 だけである。

(証明)　0 以外の非負解が存在したと仮定すれば、

$$L v(x) - \lambda f(x, v(x)) = L v(x) - \lambda g(x; v(x), 0)\, v(x) = 0 \quad x \in D \qquad (3.1)$$

ここで (E_0) の固有函数 $\varphi_0(x)$ を考えると、

$$L \varphi_0(x) - \lambda g(x; v(x), 0)\varphi_0(x) = \mu_0 g(x; 0, 0)\varphi_0(x) - \lambda g(x; v(x), 0)\varphi_0(x)$$

$$= \{(\mu_0 - \lambda) g(x, 0, 0) + \lambda(g(x; 0, 0) - g(x; v(x), 0))\}\varphi_0(x) \geqq 0 \quad x \in D \qquad (3.2)$$

$g(x; 0, 0) = f_u(x, 0)$ に注意し、$(g\text{-}3)$ $(f\text{-}3)$ 補題 2.4 を用いれば (3.2) が得られる。

$-\lambda g(x, v(x), 0)$ を補題 2.5 の $h(x)$ と考えれば、(3.1) (3.2) より $\frac{v(x)}{\varphi_0(x)}$ は D で定数か、又は ∂D 上でしか最大値をとり

得ない。まず $v(x)=\alpha\varphi_0(x)$ （α は正の定数）とすれば、$x\in\{x\in D \mid v(x)>0\}\neq\phi$ に対しては，(3.2) を α 倍することにより $Lv(x)-\lambda g(x,v(x),0)v(x)>0$ が導かれるが、これは (3.4) と矛盾する。よって，$\frac{v(x)}{\varphi_0(x)}$ は境界上の点 $x=x_0$ で正の最大値をとると仮定出来る。補題 2.5 によれば、$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{v(x)}{\varphi_0(x)}\right)\Big|_{x=x_0}>0$ となるはずであるが、これに $B\varphi_0(x_0)=0$ ，$Bv(x_0)=g(x_0,v(x_0))$ を入れ，計算すれば、$g(x,v(x_0))>0$ を得るが、これは (g-3) に矛盾する。

結局、$0<\lambda\leq\mu_0$ の時 0 以外の非負解は存在しない。

（証了）

定理 3.3

$\mu_0<\lambda$ の時，(P_λ) の正の解 $v_\lambda(x)$ が存在し、(P_λ) の非負解は 0 と $v_\lambda(x)$ 以外には存在しない。

(証明) (P_λ) の正の解の存在を示す為には、補題 2.2 を用いれば、(P_λ) の lower solution $\bar{u}_\lambda(x)$, upper solution $\hat{u}_\lambda(x)$ の中で $0<\bar{u}_\lambda(x)\leq\hat{u}_\lambda(x)$ $x\in\bar{D}$ をみたす pair を見つければ十分である。$\hat{u}_\lambda(x)\equiv M$ととれることは (f-4), (g-3) によってわかる。(E_δ) の固有関数を用いて，$\bar{u}_\lambda(x)\equiv\varepsilon\varphi_\delta(x)$ の形で求めることを考える。

$\mu_0<\lambda$ の時には，補題 2.4 によって、適当な正数 δ をとり $\mu_\delta<\lambda$ と出来る。この時、

$$L\bar{u}_\lambda(x) - \lambda f(x, \bar{u}_\lambda(x)) = \mu_\delta f_u(x,0)\,\varepsilon\varphi_\delta(x) - \lambda f(x, \varepsilon\varphi_\delta(x))$$

$$= \{(\mu_\delta - \lambda)\, q(x;\varepsilon\varphi_\delta(x),0) + \mu_\delta(q(x;0,0) - q(x;\varepsilon\varphi_\delta(x),0))\}\,\varepsilon\varphi_\delta(x) \qquad x\in D$$

上の式の｛　｝の内部は $\varepsilon\downarrow 0$ の時 $(\mu_\delta-\lambda) f_u(x,0)$ に一様収束するので、正数 ε_1 を次の様に選べる。$0<\varepsilon\leqq\varepsilon_1$ である任意の ε に対し、$\bar{u}_\lambda(x)\equiv\varepsilon\varphi_\delta(x)$ は

$$L\bar{u}_\lambda(x) - \lambda f(x, \bar{u}_\lambda(x)) \leqq 0 \qquad x\in D \tag{3.3}$$

をみたす；

$$B\bar{u}_\lambda(x) - g(x, \bar{u}_\lambda(x)) = -\delta\bar{u}_\lambda(x) - g(x,\bar{u}_\lambda(x)) = \left(-\delta - \frac{g(x,\varepsilon\varphi_\delta(x))}{\varepsilon\varphi_\delta(x)}\right)\varepsilon\varphi_\delta(x) \qquad x\in\partial D$$

(g-3) より，正数 ε_2 が存在して $0<\varepsilon\leq\varepsilon_2$ ならば

$-\delta - \dfrac{g(x,\varepsilon\varphi_\delta(x))}{\varepsilon\varphi_\delta(x)} \leq 0 \qquad x\in\partial D$ である。故に $0<\varepsilon\leq\varepsilon_2$ の時

$$B\bar{u}_\lambda(x) - g(x, \bar{u}_\lambda(x)) \leqq 0 \qquad x\in\partial D \tag{3.4}$$

次に正数 ε_3 を、$0<\varepsilon\leq\varepsilon_3$ ならば次の式が成り立つ様にとれる。

$$0 < \varepsilon\varphi_\delta(x) \leq M \qquad x\in\bar{D} \tag{3.5}$$

$\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ とおけば、$0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ の時 $\bar{u}_\lambda(x)\equiv\varepsilon\varphi_\delta(x)$, $\hat{u}_\lambda(x)\equiv M$ が求めていた pair となるので、補題 2.2 より得られる解を $\bar{v}_\lambda(x)$, $\hat{v}_\lambda(x)$ は

$0 < \bar{u}_\lambda(x) \leq \bar{v}_\lambda(x) \leq \hat{v}_\lambda(x) \leq \hat{u}_\lambda(x) \equiv M \qquad x\in\bar{D}$ をみたす。

次に $\bar{v}_\lambda(x)\equiv\hat{v}_\lambda(x) \quad x\in\bar{D}$ であることを示す。

$$L\hat{v}_\lambda(x) - \lambda f(x, \hat{v}_\lambda(x)) = 0 \qquad x\in D$$

$$L\bar{v}_\lambda(x) - \lambda f(x, \bar{v}_\lambda(x)) = 0 \qquad x\in D$$

上の2式の差をとり、$w_\lambda(x) = \hat{v}_\lambda(x) - \bar{v}_\lambda(x)$ とおけば、

$$L w_\lambda(x) - \lambda q(x; \hat{v}_\lambda(x), \bar{v}_\lambda(x))\, w_\lambda(x) = 0 \quad x \in D \tag{3.6}$$

一方，$\hat{v}_\lambda(x) > 0 \quad x \in \bar{D}$ であり、かつ

$$L \hat{v}_\lambda(x) - \lambda q(x; \hat{v}_\lambda(x), \bar{v}_\lambda(x))\, \hat{v}_\lambda(x)$$

$$= \lambda\left(q(x; \hat{v}_\lambda(x), 0) - q(x; \hat{v}_\lambda(x), \bar{v}_\lambda(x))\right) \hat{v}_\lambda(x) > 0 \quad x \in D \tag{3.7}$$

(3.6) (3.7) により、$\frac{w_\lambda(x)}{\hat{v}_\lambda(x)}$ に補題 2.5 が適用出来て、定理 3.2 の証明と同じ手順で $\frac{w_\lambda(x)}{\hat{v}_\lambda(x)} \equiv 0$ つまり $\bar{v}_\lambda(x) \equiv \hat{v}_\lambda(x)$ が示せる。この解を $v_\lambda(x)$ と表わす。

最後に (P_λ) の非負解は 0 と $v_\lambda(x)$ だけであることを示す。$v(x) \in C^2(\bar{D})$ を (P_λ) の非負解とする。$v(x) > 0 \quad x \in \bar{D}$ であるならば、存在を示す証明の lower solution $\varepsilon\varphi_\delta(x)$ の ε を十分小さく定め、$\varepsilon\varphi_\delta(x) \leq v(x) \quad x \in \bar{D}$ と出来る。一方補題 3.1 より $v(x) \leqq M \quad x \in \bar{D}$ であるから、結局 $\bar{v}_\lambda(x) \leqq v(x) \leqq \hat{u}_\lambda(x) \quad x \in D$ となり、補題 2.2 の後半より $v(x) \equiv v_\lambda(x)$ が導かれる。ある $x_0 \in \bar{D}$ に対して $v(x_0) = 0$ となるならば、$0 \leq v(x) \leq M \quad x \in \bar{D}$ より $0 \leq v(x) \leq v_\lambda(x) \quad x \in \bar{D}$ に注意して，次の式を得る。

$$L v(x) - \lambda q(x; v_\lambda(x), 0)\, v(x)$$

$$= \lambda\left(q(x, v(x), 0) - q(x, v_\lambda(x), 0)\right) v(x) \geqq 0 \quad x \in D \tag{3.8}$$

一方 $v_\lambda(x) > 0 \quad x \in \bar{D}$ かつ

$$L v_\lambda(x) - \lambda q(x; v_\lambda(x), 0)\, v_\lambda(x) = 0 \quad x \in D \tag{3.9}$$

であるので、$-\frac{v(x)}{v_\lambda(x)}$ に補題 2.5 が適用出来る。$-\frac{v(x)}{v_\lambda(x)}$ が

$\overline{D}$で最大値0をとることと合わせると、$v(x) \equiv 0$は容易に導ける。 (証3)

定理3.4

定理3.3で得た(P_λ)の正の解$v_\lambda(x)$は$[\mu_0, \infty)$において、λに関して$C^2(\overline{D})$ノルムで連続である。但し$v_{\mu_0}(x) \equiv 0$と定める。

(証明) もし$\lambda = \lambda_0 > \mu_0$において連続でないと仮定すれば、次の様な正数$\eta$と$\{\lambda_k\}$をとれる。

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_0 , \qquad \| v_{\lambda_k} - v_{\lambda_0} \|_{C^2(\overline{D})} > \eta \tag{3.10}$$

λ_kはλ_0に十分近いと考えて良いから、定理3.3の存在証明における lower solution としてkに対し一様に$\varepsilon_0 \varphi_{\delta_0}(x)$をとり得る。つまり $0 < \varepsilon_0 \varphi_{\delta_0}(x) \leqq v_{\lambda_k}(x) \quad x \in \overline{D}$ (3.11)

と仮定出来る。

補題2.2証明(iii)と全く同様に$\{\| v_{\lambda_k} \|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}\}$が一様有界であることが導かれ、Ascoli-Arzela の定理により$\{v_{\lambda_k}(x)\}$の部分列$\{v_{\lambda_{k'}}(x)\}$で$C^2(\overline{D})$で収束するものがとれる。その極限を$\hat{v}(x) \in C^2(\overline{D})$とおけば、$\lim_{k'\to\infty} \| v_{\lambda_{k'}} - \hat{v} \|_{C^2(\overline{D})} = 0$ (3.12)

である。よって
$$(P_{\lambda_{k'}}) \begin{cases} L v_{\lambda_{k'}}(x) = \lambda_{k'} f(x, v_{\lambda_{k'}}(x)) & x \in D \\ B v_{\lambda_{k'}}(x) = g(x, v_{\lambda_{k'}}(x)) & x \in \partial D \end{cases}$$

において、$k' \to \infty$とすることにより、$\hat{v}(x)$は(P_{λ_0})の解で

あること、更に(3.11)(3.12)より(P_{λ_0})の正の解であることが示される。正の解の一意性より$\hat{v}(x) \equiv v_{\lambda_0}(x)$である。故に(3.10)と(3.12)は矛盾する。結局$v_\lambda(x)$は$\lambda > \mu_0$で連続である。又、$\lambda = \mu_0$での非負解が0だけであることを考慮すれば$\lim_{\lambda \downarrow \mu_0} \| v_\lambda \|_{C^2(\bar{D})} = 0$も同様に示せる。　(証了)

注意 3.5

(P_λ)の代りに非線型固有値問題

$$(P_\lambda)' \begin{cases} Lu(x) = \lambda f(x, u(x)) & x \in D \\ Bu(x) = \lambda g(x, u(x)) & x \in \partial D \end{cases}$$

を考えても、今まで得たすべての結果が成り立つことは容易に確かめられる。

参考文献

[1] S. Agmon, A. Douglis, & L. Nirenberg : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial diferential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure. Appl. Math. 12 (1959) 623-727

[2] H. Amann : On the existence of positive solutions of non-linear elliptic boundary value problems Indiana Univ. Math. J. 21 (1971) 125-146

[3] H.B. Keller & D.S. Cohen : Some positone problems suggested by nonlinear heat generation J. Math. Mech. 16 (1967) 1361 - 1376

[4] H.B. Keller : Positive solutions of some nonlinear eigenvalue problems J. Math. Mech. 19 (1969) 279 - 295

[5] M. A. Krasnosel'skii : Positive solutions of operator equations Groningen : Noordhoff 1964

[6] O. A. Ladyzhenskaya & N. N. Ural'tseva : Linear and quasilinear elliptic equations, Academic Press, New York 1968

[7] M.H. Protter & H. F. Weinberger : Maximum principles in partial differential equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N.J. 1967

[8] P. H. Rabinowitz : A note on a nonlinear eigenvalue problem for a class of differential equations J. Differential Equations 9 (1971) 536 - 548