数理解析研究所講究録
第185巻 1973年 18-30



# 平行流および境界層流における有限攪乱

航技研　伊藤信毅

## 第一部　平行流に対する計算

### 1. 序論

層流から乱流への遷移に先立って発生する2次元波の成長について、Stuart-Watson[1,2]の理論を修正した方法を与え、2次元Poiseuille流れに対する計算を行う。攪乱は空間的に成長する波で表わされるものとし、平均流ゆがみ方程式の固有函数を考慮に入れている。

### 2. 理論

2次元の渦度の方程式

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{R}\Delta\right\}\Delta\Psi=0 \qquad \left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

において、流れ函数$\Psi$を基本流と攪乱成分に分ける。基本流が平行流の場合は、流れ函数は$y$のみの函数となるから、これを$\Psi_0(y)$と書き、攪乱成分は角速度$\beta$の基本波を持つFourier級数の形で表わす。

$$\Psi(x,y,t)=\Phi_0(y)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k(x,y)e^{-ik\beta t} \quad (\psi_{-k}=\tilde{\psi}_k) \tag{2}$$

これを方程式に代入し、Stuat-Watson の方法にしたがって、3次以上の Fourier成分を省略すると、主攪乱$\psi_1$, 平均流ゆがみ$\psi_0$, 倍振動攪乱$\psi_2$に関する方程式が得られる。

$$L_1[\psi_1]=(M[\psi_1,\psi_0]+M[\psi_2,\tilde{\psi}_1]),\ L_0[\psi_0]=M[\psi_1,\tilde{\psi}_1],\ L_2[\psi_2]=\frac{1}{2}M[\psi_1,\psi_1] \tag{3}$$

ただし、$L_k$, $M$ はつぎのように定義された作用素である。

$$\left.\begin{aligned} L_k[\psi]&=\left[\Delta^2-R\left\{\left(-ik\beta+\frac{d\Phi_0}{dy}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta-\frac{d^3\Phi_0}{dy^3}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\right]\psi \\ M[\psi,\phi]&=R\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta\phi+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta\psi\right]\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(3)式を解くには、主攪乱の近似解$\psi_1$を適当に与え、これを平均流ゆがみと倍振動攪乱に関する方程式の右辺に代入してこれらの方程式を解く。得られた$\psi_0$, $\psi_2$と近似解$\psi_1$を主攪乱方程式の右辺に用いて、さらに精度のよい主攪乱の解を求める。Watson[3]は第1近似解として無限小攪乱の流れ函数$\psi_1(x,y)=A_1\phi_1^{(0)}(y)e^{i\alpha_1^{(0)}x}$（ただし$\alpha_1^{(0)}$は複素数で、実数部$\alpha_{1r}^{(0)}$が波数を表わし、虚数部$\alpha_{1i}^{(0)}$が減衰率を表わす）を用いている。しかし、攪乱の減衰率は小さい値であり、有限性の影響を著しく受け易いので、$\psi_1$の第1近似として無限小攪乱を用いる場合には、減衰率を未知量として扱う方がより精度のよい結果が得られる。

いま、主攪乱の近似解が無限小攪乱の解と同じ形

$$\psi_1(x,y)=A_1\phi_1(y)e^{i\alpha_1 x},\quad (\alpha_1=\alpha_{1r}+i\alpha_{1i}) \tag{5}$$

で与えられているとする。ここで、$A_1$は複素数の振幅，$\phi_1(y)$

は正規化された函数である。(5)式を方程式(3)の右辺に代入し、$\psi_0$および$\psi_2$の解を次のようにおく。

$$\psi_0(x,y)=|A_1|^2\left\{a_0\phi_0^{(0)}(y)e^{-\kappa_0 x}+\frac{\gamma}{\tau_0-\kappa_0}g_0(y)e^{-\tau_0 x}\right\} \tag{6}$$

$$\psi_2(x,y)=A_1^2\,g_2(y)e^{i\tau_2 x} \tag{7}$$

ただし、$\tau_0=2\alpha_i$, $\tau_2=2\alpha_1$。また, $\kappa_0$, $\phi_0^{(0)}(y)$は平均流ゆがみに関する同次方程式の固有値と固有函数, $a_0$は任意定数である。倍振動撹乱に対しては、同次方程式の固有値の虚数部(減衰率)が$\tau_2$の虚数部に比べて十分大きいから、固有函数成分を無視して特解だけを求めればよい。これに反して、平均流ゆがみ方程式の固有値$\kappa_0$は$\tau_0$と同程度の大きさを持つので、(6)式は同次方程式の固有函数成分を含めた形で与えなければならない。これらの解を方程式(3)の第2, 第3式に代入し、数値解法で$\gamma$, $g_0(y)$および$g_2(y)$を求める。

$\psi_0$, $\psi_2$が得られたので、これらと近似解(5)を主撹乱方程式((3)の第1式)の右辺に代入し、解を次の形におく。

$$\begin{aligned}\psi_1(x,y)=A_1\Big[e^{i\alpha_1^{(0)}x}&+|A_1|^2\left\{a_0\lambda_0^*\frac{e^{i\tau_1^* x}-e^{i\alpha_1^{(0)}x}}{\tau_1^*-\alpha_1^{(0)}}+\left(\frac{\gamma}{\tau_0-\kappa_0}\lambda_0+\lambda_2\right)\frac{e^{i\tau_1 x}-e^{i\alpha_1^{(0)}x}}{\tau_1-\alpha_1^{(0)}}\right\}\phi_1^{(0)}(y)\\&+|A_1|^2\left\{a_0 f_0^*(y)e^{i\tau_1^* x}+\left(\frac{\gamma}{\tau_0-\kappa_0}f_0(y)+f_2(y)\right)e^{i\tau_1 x}\right\}\Big]\end{aligned} \tag{8}$$

ただし、$\tau_1=\alpha_1+i2\alpha_i$, $\tau_1^*=\alpha_1+i\kappa_0$。(8)式を方程式に代入し、$\lambda_0^*$, $f_0^*(y)$, $\lambda_0$, $f_0(y)$, および$\lambda_2$, $f_2(y)$ (それぞれ平均流ゆがみの固有函数成分, 特解成分および倍振動撹乱成分に対応する項)を、境界条件と撹乱振幅$A_1$の定義から定まる$\psi_1$の正規化条件によ

って、数値的に求める。

解(8)を変形して(5)式の形に表わすと、有限攪乱の波数，減衰率および$y$方向の分布函数は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \lim_{x,y\to 0}\frac{1}{iA_1}\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x,y) = \alpha_1^{(0)} + |A_1|^2\left\{a_0\lambda_0^* + \frac{\gamma}{\tau_0-\kappa_0}\lambda_0 + \lambda_2\right\} \\ \phi_1(y) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{A_1}\psi_1(x,y) = \phi_1^{(0)}(y) + |A_1|^2\left\{a_0 f_0^*(y) + \frac{\gamma}{\tau_0-\kappa_0}f_0(y) + f_2(y)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

ただし、$\phi_1^{(0)}(y)$，$\alpha_1^{(0)}$は無限小攪乱の固有函数と固有値である。

## 3. 2次元Poiseuille流れにおける攪乱の発達

平均流ゆがみの大きさを表わす量$A_0$をつぎのように定める。

$$A_0 = \lim_{y\to 0}\frac{\partial}{\partial y}\psi_0(x,y) \qquad (10)$$

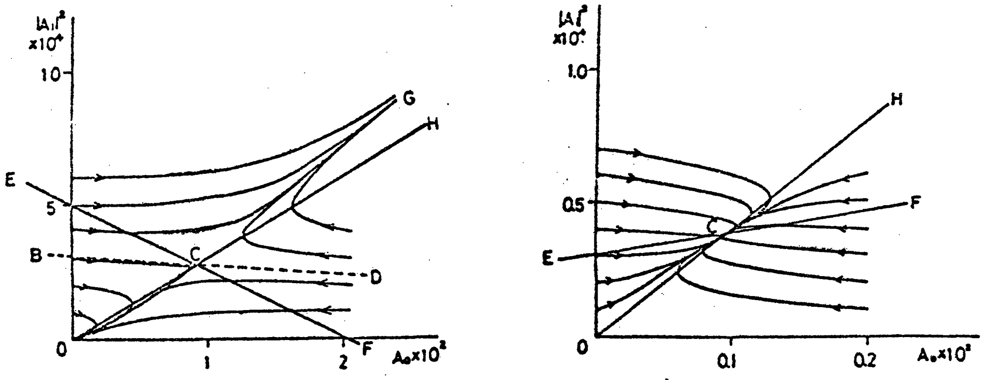
(6)式から、$A_0$は任意定数$a_0$を含む形で与えられるので、これを消去するために$A_0$の$x$に関する微係数を求めると

$$\frac{dA_0(x)}{dx} = -\kappa_0 A_0(x) - \gamma|A_1(x)|^2 \qquad (11)$$

一方、主攪乱の大きさ$|A_1|$（$A_1 = \lim_{y\to 0}\psi_1(x,y)$と定義する）の$x$に関する変化率は次式で表わされる。

$$\frac{1}{|A_1|^2}\frac{d|A_1|^2}{dx} = -2\alpha_{1i} = -2\left[\alpha_{1i}^{(0)} + \lambda_{0i}^* A_0(x) + \left\{\frac{\gamma}{2\alpha_{1i}-\kappa_0}(\lambda_{0i}-\lambda_{0i}^*) + \lambda_{2i}\right\}|A_1(x)|^2\right] \qquad (12)$$

(11)式と(12)式から$A_0$と$|A_1|^2$の関係を図示したものが第1図である。(I)は無限小攪乱が減衰する場合で、曲線ＢＣＤより上方の攪乱は増大する。このときＣ点は不安定平衡点になっている。これに対し、(II)は無限小攪乱が増幅される場合である。Ｃ点は安定平衡点になり，攪乱は下流に進むにつれてこの点に収束する。(I)，(II)の場合とも平衡点の座標はつぎのようになる。




(I) $R=5000$, $\beta=0.25$　　(II) $R=8000$, $\beta=0.20$

第１図　平均流ゆがみと主撹乱振幅の関係

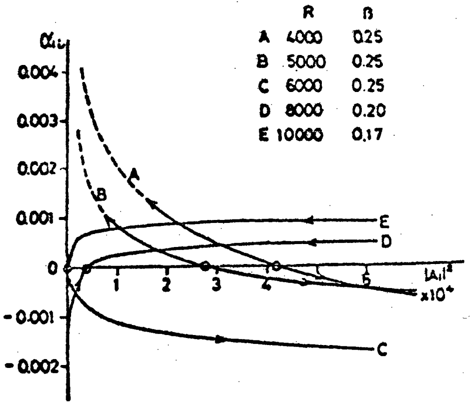
$$|A_1|^2 = -\frac{\alpha_{1i}^{(0)}}{\lambda_i}, \quad A_0 = \frac{\gamma}{\kappa_0}\cdot\frac{\alpha_{1i}^{(0)}}{\lambda_i} \quad \left(\lambda_i = -\frac{\gamma}{\kappa_0}\lambda_{0i} + \lambda_{2i}\right) \tag{13}$$

つぎに、撹乱の漸近的な性質を調べるため、平均流ゆがみ((6)式)の固有函数成分が減衰して $a_0=0$ となった場合を考える。このとき、主撹乱の減衰率 $\alpha_{1i}$ はつぎの２次方程式をみたす。

$$\alpha_{1i} = \alpha_{1i}^{(0)} + \left(\frac{\gamma}{2\alpha_{1i}-\kappa_0}\lambda_{0i} + \lambda_{2i}\right)|A_1|^2 \tag{14}$$

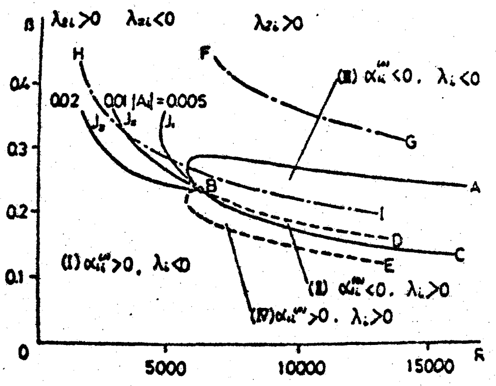
この関係から $\alpha_{1i}$ と $|A_1|^2$ の変化を図示したものが第２図である。曲線A, Bは不安定平衡点を持つ場合で、曲線D, Eは安定平衡点を持つ場合、曲線Cは常に増幅する撹乱を表わす。

第３図には無限小撹乱の中立曲線ABC($\alpha_{1i}^{(0)}=0$)と $\lambda_i=0$ になる曲線DBEが与えられている。この二曲線によって $\beta-R$ 平面は、(I)不安定平衡点が存在する領域



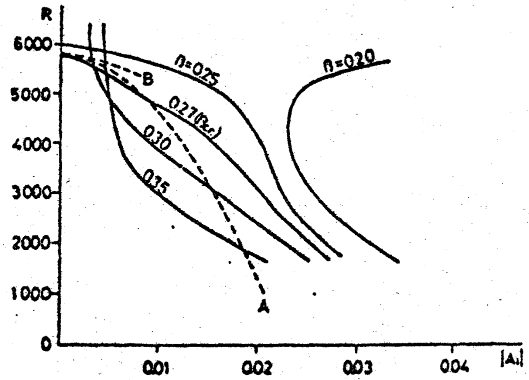

第２図　撹乱振幅と減衰率の関係

(II)安定平衡点が存在する領域、(III)撹乱が常に増幅する領域、(IV)常に減衰する領域の4つに区切られる。曲線 $BJ_1$, $BJ_2$, $BJ_3$ は撹乱の大きさによって中立曲線がずれる様子を示めす。




第3図　有限撹乱の安定線図

第4図には撹乱の限界Reynolds数が振幅の大きさに対してどのように変わるかを示した。曲線A, BはReynolds-Potter[4]およびPekeris-Shkoller[5]の計算結果を示めす。これらと比較されるものは $\beta=0.27$ の曲線である。




第4図　有限限界Reynolds数

## 4. 結　論

本理論では、撹乱を時間的に振動し、$x$ 方向に増幅または減衰する波と考えた。平均流ゆがみ方程式の解に固有函数成分を含めることによって、平均流ゆがみの大きさは任意となり、主撹乱の大きさに対して一意に定まらない。このため、主撹乱の減衰率は主撹乱の大きさとともに平均流ゆがみの大きさに影響される。また、主撹乱の振幅の漸近的振舞を調べると、減衰率は振幅の2乗に対して直線的に変化するのでは

21

なく、もっと複雑な変化をすることが明らかになった。

参考文献

(1) Stuart, J. T., J. Fluid Mech., 9. 353 (1960)

(2) Watson, J., J. Fluid Mech., 9. 371 (1960)

(3) Watson, J., J. Fluid Mech., 14. 211 (1962)

(4) Reynolds, W. C. & Potter, M. C., J. Fluid Mech., 27. 465 (1967)

(5) Pekeris, C. L. & Shkoller, B., J. Fluid Mech., 39. 629 (1969)

## 才二部　境界層流に対する計算

### 1. 序論

平行流についての有限攪乱理論および計算は多くの研究者によって行なわれているが、平板境界層流れに対する応用においてはまだ十分な成果が得られていない。ここでは境界層において2次元 Tollmien-Schlichting 波がどのように発達するかを調べる。境界層流に対して安定計算を行う際に問題となる点は、(1)境界層が主流の方向に厚さを変えること、(2)基本流が平行流でないこと、および(3)境界層の外側における境界条件の決定が簡単でないこと等である。とくに、平均流ゆがみ方程式においては、(1), (2)の影響が無視できないものとなり、平行流の場合と異なる方程式が得られる。なお、攪乱は空間的に成長する波で表わされるものとしている。

## 2. 理論

$$x^*=x/L,\quad y^*=y/\delta,\quad \Psi^*=\Psi/(\delta U_0),\quad t^*=t/(\delta/U_0),\quad R=U_0\delta/\nu \tag{1}$$

によって無次元化を行う。ここで、Lは平板前縁から着目点までの距離, $U_0$は一様流速、$\Psi$は流れ函数, $\delta$は境界層厚さ $\delta=r\sqrt{\nu L/U_0}$ (ただし $r=5$), Rは Reynolds 数である。着目点が前縁から十分遠いときには $\varepsilon=\delta/L\ll 1$。また $\varepsilon R=r^2$ の関係がある。以上の無次元量を用いて2次元の渦度方程式を書くとつぎのようになる。(*印は省略)

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-r^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi=0 \tag{2}$$

流れ函数を基本流$\Psi_0(x,y)$と撹乱成分に分け、さらに撹乱を時間に関するFourier級数に展開し、3次以上の成分を省略する。

$$\Psi=\Psi_0(x,y)+\psi_0(x,y)+\psi_1(x,y)e^{-i\beta t}+\tilde{\psi}_1(x,y)e^{i\beta t}+\psi_2(x,y)e^{-2i\beta t}+\tilde{\psi}_2(x,y)e^{2i\beta t} \tag{3}$$

これを(2)式に代入すれば、主撹乱$\psi_1$, 平均流ゆがみ$\psi_0$, および倍振動撹乱$\psi_2$に関する方程式が求まる。

$$L_1[\psi_1]=M[\psi_0,\psi_1]+M[\tilde{\psi}_1,\psi_2],\quad L_0[\psi_0]=M[\psi_1,\psi_1],\quad L_2[\psi_2]=\frac{1}{2}M[\psi_1,\psi_1] \tag{4}$$

ただし, $L_k$, M はつぎのように定義された作用素である。

$$\left.\begin{aligned}
L_k[\psi]=&\Big[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2-r^2\Big\{\left(-\frac{ik\beta}{\varepsilon}+\frac{\partial\Psi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\Psi_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big\}\Big]\psi\\
M[\psi,\phi]=&\,r^2\Big[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi\Big]
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

基本流の流れ函数はBlasiusの解を用いてつぎのようにおく。

$$\Psi_0(x,y)=\sqrt{x}\,F_0(y/\sqrt{x}) \tag{6}$$

ここで$F_0(\eta)$はつぎの方程式の解である。

$$F_0'''(\eta) + \frac{\nu^2}{2} F_0(\eta) F_0''(\eta) = 0, \quad F_0(0) = F_0'(0) = 0, \quad F_0''(0) = 1.660 \tag{7}$$

方程式(4)を解くには、主攪乱$\psi_1$の第1近似として無限小攪乱の流れ函数を適当に補正したものを与え、これを平均流ゆがみ方程式と倍振動攪乱方程式の右辺に代入する。これらの方程式を解いて得られた解$\psi_0$, $\psi_2$を主攪乱方程式の右辺に代入して$\psi_1$の第2近似解を求める。

(1)式において$x$を無次元化するために用いた基準長さLは攪乱のように変化の激しい運動を調べるには不適当であるから、攪乱の波長と同程度の大きさを持つ量として境界層厚さ$\delta$を基準長さに選ぶ。これによって$x$の代りにつぎのように定義された独立変数$\xi$を用いることになる。

$$x = 1 + \epsilon\xi \tag{8}$$

このとき、主攪乱の第1近似はつぎの形で与えられる。

$$\psi_1 = A_1 \phi_1(y) e^{i\alpha_1\xi} \tag{9}$$

平均流ゆがみの解をつぎのようにおく。

$$\begin{aligned}\psi_0 &= |A_1|^2 \left[\sqrt{1+\epsilon\xi}\cdot\frac{\nu}{\tau_0-\kappa_0} g_0\left(\frac{y}{\sqrt{1+\epsilon\xi}}\right) e^{-\tau_0\xi} + O(\epsilon^2)\right] \\ &\fallingdotseq |A_1|^2 \frac{\nu}{\tau_0-\kappa_0}\left[g_0(y) + \epsilon\frac{\xi}{2}\left(g_0(y) - y g_0'(y)\right)\right] e^{-\tau_0\xi}\end{aligned} \tag{10}$$

ここで、$\kappa_0$は平均流ゆがみ方程式の最小固有値, $\tau_0 = 2\alpha_i$。
(10)式を(4)の第2式に代入し, $\epsilon$の最低次の係数を0とおくと平均流ゆがみ方程式が求まる。ただし$\tau_0$は$\epsilon$のオーダーと仮

定した。

$$\left\{\frac{d^4}{dy^4}+\frac{r^2}{2}F_0(y)\frac{d^3}{dy^3}+\left(\frac{r^2}{2}+\tau_0R\right)F_0'(y)\frac{d^2}{dy^2}+\frac{r^2}{2}F_0''(y)\frac{d}{dy}+\left(\frac{r^2}{2}-\tau_0R\right)F_0'''(y)\right\}\frac{\nu}{\tau_0-r_0}g_0(y)=p_0(y) \qquad (11)$$

境界条件は

$$g_0(0)=g_0'(0)=\theta_1g_0''(1)+g_0'(1)=\theta_2g_0'''(1)+g_0''(1)=0 \qquad (12)$$

ここで、$\theta_1=2\int_{\frac{r}{2}(a+1)}^{\infty}e^{-t^2}dt\Big/\left(re^{-\frac{r^2}{4}(a+1)^2}\right)$, $\theta_2=2\big/\left(r^2(a+1)\right)$, ただし $a=-1.7208/r_0$

つぎに、倍振動撹乱および主撹乱の方程式に対して $\varepsilon$ 展開を行うと、$\varepsilon$ の 0 次の項からは非粘性方程式と同じ形の方程式が得られる。さらに $\varepsilon$ の 1 次の項まで含めると、粘性項と境界層の厚さの変化および基本流の $y$ 方向成分の影響を表わす項が同程度の大きさを持つことが示される。しかし、粘性項は非粘性方程式の特異点の近傍で無視できないものとなるが、他の項は全ての領域で $\varepsilon$ の 1 次の微小項である。したがって、倍振動撹乱と主撹乱に対しては通常の Orr-Sommerfeld 型方程式を用いることにする。境界条件は、$y>1$ において方程式の強制項を無視すれば、線型理論の場合と同様になる。

倍振動撹乱をつぎのようにおいて方程式(4)の第3式に代入すれば、未知函数 $g_2(y)$ が定まる。

$$\psi_2=A_1^2\,g_2(y)e^{i\tau_2\xi}, \qquad \tau_2=2\alpha_1 \qquad (13)$$

平均流ゆがみ $\psi_0$ と倍振動撹乱 $\psi_2$ を主撹乱方程式((4)の第1式)の右辺に代入し、解を求めると、主撹乱の分布函数 $\phi_1(y)$ および波数・減衰率を表わす $\alpha_1$ が定まる。

$$\phi_1(y)=\phi_1^{(0)}(y)+|A_1|^2\left(\frac{\gamma}{2\alpha_{1i}-\kappa_0}f_0(y)+f_2(y)\right),\quad \alpha_1=\alpha_1^{(0)}+|A_1|^2\left(\frac{\gamma}{2\alpha_{1i}-\kappa_0}\lambda_0+\lambda_2\right) \tag{14}$$

ここで、$\alpha_1^{(0)}$, $\phi_1^{(0)}(y)$ は無限小撹乱の固有値と固有函数，$\lambda_0$, $\lambda_2$, $f_0(y)$, $f_2(y)$ は方程式の解として得られる定数と函数である。

主撹乱の減衰率 $\alpha_{1i}$ が $0$ になる場合を平衡状態と呼ぶと，このときの撹乱振幅はつぎのように定まる。

$$|A_1|_e^2=-\alpha_{1i}^{(0)}/\lambda_i \qquad \left(\text{ただし}\ \lambda_i=-\frac{\gamma}{\kappa_0}\lambda_{0i}+\lambda_{2i}\right) \tag{15}$$

$\alpha_{1i}^{(0)}$ と $\lambda_i$ の符号によって撹乱の発達状況はつぎの4つの場合に分けられる。(I) $\alpha_{1i}^{(0)}>0$, $\lambda_i<0$ のとき、不安定平衡点が存在する。すなわち、$|A_1|_e$ より大きい撹乱は増幅し、これ以下の撹乱は減衰する。(II) $\alpha_{1i}^{(0)}<0$, $\lambda_i>0$ のとき、安定平衡点が存在し、撹乱の振幅は $|A_1|_e$ に収束する。(III) $\alpha_{1i}^{(0)}<0$, $\lambda_i<0$ のときは撹乱は常に増幅する(絶対増幅)。(IV) $\alpha_{1i}^{(0)}>0$, $\lambda_i>0$ のときは反対に常に減衰する(絶対減衰)場合である。

## 3. 計算結果

通常、境界層流れに対する無次元化は排除厚 $\delta^*$ を用いるので、計算結果の整理は $\delta^*$ に基づく量 $R^*$, $\beta^*$, $\alpha^*$ を使用する。また、主撹乱の振幅もつぎに定義される $|A_1^*|$ で表わす。

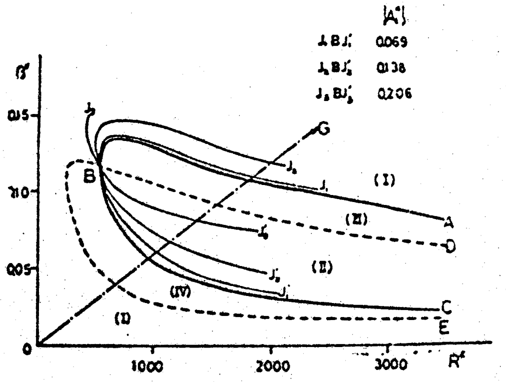
$$|A_1^*|=\frac{\delta^*}{\delta}|A_1|=\left|\frac{\delta^*}{U_0}\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}\right| \tag{16}$$

第1図には無限小撹乱の中立曲線 $ABC$ と $\lambda_i=0$ の曲線 $DBE$ が与えられている。(I)は不安定平衡点が存在する領域，(II)は安定平衡点が存在する領域，(III)は絶対増幅領域，(IV)は絶対減衰

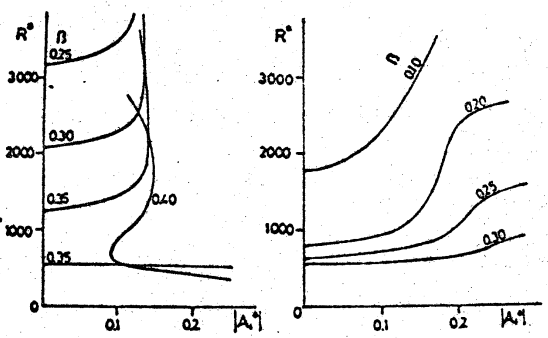
領域である。いま振動数一定の攪乱が境界層の前縁から下流に進む場合は、直線OGで示されるような経路をたどり、領域(I)(IV)(II)(III)(I)をこの順序で通過する。第2図には攪乱の大きさ$|A_1^*|$に対して平衡点Reynolds数がどのように変化するかを$\beta$をパラメターとして図示した。(i)図は不安定平衡点に対するもので、(ii)図は安定平衡点に対するものである。この図から平衡点振幅を一定にしたときの$R^*$と$\beta^*$の関係を求め第1図に図示したものが曲線$J_1BJ_1'$, $J_2BJ_2'$, $J_3BJ_3'$である。これらの曲線は対応する振幅を持つ有限攪乱の中立曲線を表わす。

## 4. 実験との比較

Klebanoff等[1]は平板の前縁か

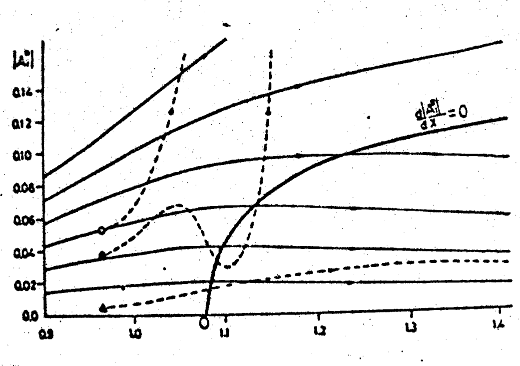



第1図 有限攪乱の安定線図




(i)不安定平衡点　(ii)安定平衡点

第2図 平衡点Reynolds数




第3図 攪乱の主流方向の発達
(実線はKlebanoff等の実験, ○△: peak, ●▲: valley)

ら0.89mの位置に振動リボンをおき、一様流速15.2 m/s, 周波数145Hzの攪乱を与えたとき、平板表面からの距離$y=1.14$mmにおける速度変動の$x$成分が下流方向に変化する様子を測定した。この実験は第1図における直線OGに沿って攪乱の発達を調べたことになる。この実験に対応するReynolds数と角速度に対して計算を行い、両者を比較したものが第3図である。曲線OCは$|A_1^*|$の減衰率が0になる点を結んだもので有限中立状態を表わす。実験では人工的に3次元攪乱を発生させているので、攪乱は$z$方向にpeakとvalleyを持つ。初期攪乱が小さいときには実験と計算結果は比較的よく合うが、初期攪乱が大きくなると3次元性の影響が著しくなるため、両者の間にはかなりの差が生じる。

5. 結　論

平板に沿う境界層において生じる2次元攪乱の発達を有限攪乱理論によって調べた。境界層の厚さが$x$方向に変化することおよび基本流が平行流でないことによる影響は平均流ゆがみ方程式を求める場合に無視できないものとなる。有限攪乱の安定線図はPoiseuille流れの場合と似た形になる。中立曲線の上分枝を横切って発達する攪乱の状況を示す図が得られ、実験結果との比較が行なわれた。

参考文献 (1) Klebanoff, Tidstrom and Sargent, J. Fluid Mech. 12.1. (1962)