数理解析研究所講究録
第186巻 1973年 15-26



# 極限吸収の原理について

京大 教養 望月 清

ここでは弾性波，電磁波等に対する定常波動伝播問題に対して極限吸収の原理を証明する。我々は問題を媒質が遠方で isotropic になる場合（もちろん inhomogeneous であるが）に限り，その場合は本質的には Helmholtz equation と同じように取扱うことが出来ることを示す。

## 1. Helmholtz equation に対する外部境界値問題

$R^m$ の外部領域 $\Omega$ で次の境界値問題を考えよう。

$$
(1)\quad \begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 \rho(x) u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{or} \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} + d(x) u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}
$$

ここに $\kappa$ は $\mathrm{Im}\,\kappa \geq 0$ なる 0 でない複素数であり，$\rho(x)$ は音速とか密度とかに関するもので，有界可測，一様に正な関数である。境界は滑かとし，$d(x)$ は境界上の実数値連続関数であ

るとする。このときもし $\mathrm{Im}\,\kappa>0$ なら、与えられた $f(x)\in L^2(\Omega)$ に対して (1) は一意的な $L^2$-solution $u=u(x,\kappa)$ をもつ。$\kappa$ が実数の場合 (1) は一般に $L^2$-solution をもたないが、いわゆる outgoing [又は incoming] solution の存在が期待される。極限吸収の原理はこの存在を言うひとつの方法で、次のように述べられる。

$\sigma$ を 0 でない実数とするとき、極限

$$u(\cdot,\sigma)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u(\cdot,\sigma+i\varepsilon)$$

が $L^2_{loc}(\Omega)$ の意味で存在し、それが境界値問題

$$(2)\qquad \begin{cases} -\Delta u-\sigma^2\rho(x)u=f(x) & \text{in } \Omega \\ u=0 \quad \text{or} \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}+d(x)u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の outgoing ($\sigma>0$ のとき) [incoming ($\sigma<0$ のとき)] solution を定める。

この主張を証明するためには $\rho(x)$ の無限遠に於ける挙動を制限する必要がある。$\rho(x)$ が無限遠で或る正数 $\rho_\infty$ に近づき、その近づき方が $\rho(x)-\rho_\infty=O(|x|^{-\frac{m+1}{2}-\varepsilon_0})$ ($\varepsilon_0>0$) である場合は上の主張は Eidus ([1], [2]) によって証明されている。もちろん $f(x)$ も $L^2(\Omega)$ より狭い class から取る必要がある。

$\rho(x)$ に対する上の条件は緩められる。ここでは $\rho(x)$ が次の

２つの条件のうちどちらかを充す場合を考える。

(C) $\qquad \rho(x)-\rho_\infty = O(|x|^{-1-\varepsilon_0}) \quad \text{as } |x|\to\infty.$

(C') $\qquad \dfrac{\partial\rho(x)}{\partial|x|} = O(|x|^{-1-\varepsilon_0}) \quad \text{as } |x|\to\infty.$

Eidus の場合もそうであったが，我々はさらに方程式が unique continuation property をもつように $\rho(x)$ の滑かさを必要とする。しかしここではこのことは暗に仮定しておくだけにする。

outgoing [incoming] solution は radiation condition によって特徴づけられる。我々の場合は Eidus が用いたいわゆる Sommerfeld radiation condition を少し（本質的にではなく）modify する必要がある。$\mathcal{H}_p$ $(-\infty<p<\infty)$ を次の性質をもつ可測関数の集合とする。

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_\Omega (1+|x|)^p\,|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < +\infty.$$

このとき(1)の解 $u$ に対して radiation condition を次で与える。

(3) $\qquad u\in\mathcal{H}_{-1-\varepsilon_0}\,;\quad \operatorname{grad}u - i\kappa\sqrt{\rho(x)}\,\tilde{x}\,u \in [\mathcal{H}_{-1+\varepsilon_0}]^m.$

ここに $\tilde{x}=x/|x|$，又 $\varepsilon_0$ は $\rho(x)$ の条件に現れるものと同じ

正数であるが、一般性が失われないので $\varepsilon_0<1$ と仮定する。

<u>定理1.</u> (1) に於て $\rho(x)$ が条件 (C) 又は (C′) を充すとし、$f(x)$ が $\mathcal{H}_{1+\varepsilon_0}$ に属すとする。このとき極限吸収の原理が成り立つ。

この定理は Eidus がやったように背理法を用いて証明されるが、そのために次の2つの補題を用いる。

<u>補題1.</u> (1) に於て $\kappa\neq 0$, real とする。このとき (1) の解で radiation condition (3) を充すものは unique である。

<u>補題2.</u> $\{\kappa_n\}$ を $\Pi_\pm=\{\kappa;\ \mathrm{Re}\,\kappa\gtrless 0,\ \mathrm{Im}\,\kappa>0\}$ に於ける有界列、$\{f_n\}$ を $\mathcal{H}_{1+\varepsilon_0}$ に於ける有界列とし、$\{u_n\}$ を対応する (1) の $L^2$-solution の集合とする。このとき (i) もし $\{u_n\}$ が $\mathcal{H}_{-1-\varepsilon_0}$ で有界ならそれは同じ空間で compact になる。(ii) $\kappa_n\to\kappa$, $f_n\to f$ (in $\mathcal{H}_{1+\varepsilon_0}$) のとき、もし $u_n$ が $\mathcal{H}_{-1-\varepsilon_0}$ で収束するなら極限関数は radiation condition (3) を充す。

これらからすぐわかるように、定理1は $\{u(\cdot,\sigma+i\varepsilon);\ 0<\varepsilon<1\}$ が $\mathcal{H}_{-1-\varepsilon_0}$ で有界なら証明される。$\{u(\cdot,\sigma+i\varepsilon)\}$ の有界性を背理法で、上の2つの補題を再び用いて、証明するのである。

さて補題1は Green の公式~~を用いて~~と次の Proposition から

証明される。

<u>Prop 1.</u> (1)に於て $\kappa \neq 0$, real, $f(x) \equiv 0$ とする。このとき solution $u$ が $\|u\|_{-1+\varepsilon_0} + \|\mathrm{grad}\, u\|_{-1+\varepsilon_0} < \infty$ を充すなら $u \equiv 0$ である。

補題2は境界値問題(1)に対する coercivity inequality と次の2つの Propositions から証明される。

<u>Prop 2.</u> $K_\pm$ をその closure が $\tilde{\Pi}_\pm = \{\kappa ; \mathrm{Re}\,\kappa \gtrless 0, \mathrm{Im}\,\kappa \geq 0\}$ に属すような有界集合とし、$\kappa \in K_\pm$ とする。このとき(1)及び(3)を充す $u$ に対し次の不等式が成り立つ。

$$\|\mathrm{grad}\, u - i\kappa\sqrt{p(x)}\,\tilde{x}\, u\|_{-1+\varepsilon_0} \leq C(K_\pm)\{\|u\|_{-1-\varepsilon_0} + \|f\|_{1+\varepsilon_0}\}.$$

<u>Prop 3.</u> 上と同じ仮定のもとで次の不等式

$$\|u\|_{-1-\varepsilon_0,\,\Omega_r'} \leq C(K_\pm)\, r^{-\varepsilon_0/2}\{\|u\|_{-1-\varepsilon_0} + \|f\|_{1+\varepsilon_0}\}$$

が充分大きな $r$ に対して成り立つ。ここに $\Omega_r' = \{x \in \Omega ; |x| > r\}$ である。

Prop 1 の証明については Ikebe-Uchiyama [3] を Props. 2, 3 の証明については Mochizuki [4] を参照していただくことにする。

## 2. Props 1, 2 の System への拡張

$\Omega'_{r_0} = \{x ; |x| > r_0\}$ に於て次の方程式系を充す $u = \{u_1, \cdots, u_N\}$ を考えよう。

$$(4) \qquad -\Delta u_j - \kappa^2 \rho_j(x) u_j = \sum_{k=1}^{N} P_{jk}(x, D) u_k + f_j(x),$$

$$P_{jk}(x, D) = \sum_{\ell=1}^{m} b_{jk\ell}(x) \frac{\partial}{\partial x_\ell} + c_{jk}(x).$$

係数に次の条件を課す。

(C.1) 各 $\rho_j(x)$ は一様に正な有界可測関数で条件 (C) 又は (C′) を充す。

(C.2) $b_{jk\ell}(x)$, $c_{jk}(x)$ は有界で $|x| \to \infty$ と共に次の挙動をする。

$$b_{jk\ell}(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon_0}), \quad c_{jk}(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon_0}).$$

このとき次の 2 つの結果が従う。

Prop 4. (4) に於て $\kappa \neq 0$, real, $f_j(x) \equiv 0$ とする。このとき solution $u$ が $\sum_{j=1}^{N} \{\|u_j\|_{-1+\varepsilon_0, \Omega'_{r_0}} + \|\mathrm{grad}\, u_j\|_{-1+\varepsilon_0, \Omega'_{r_0}}\} < \infty$ なら $u \equiv 0$ in $\Omega'_{r_0}$ である。

Prop 5. $\kappa \in K_\pm$ に対し (4) の solution $u$ が radiation cond.

$$(5) \qquad u_j \in \mathcal{H}_{-1-\varepsilon_0}(\Omega'_{r_0}); \quad \mathrm{grad}\, u_j - i\kappa\sqrt{\rho_j(x)}\, x\, u_j \in [\mathcal{H}_{-1+\varepsilon_0}(\Omega'_{r_0})]^m$$

を充すならば次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^{N} \| \operatorname{grad} u_j - i\kappa \sqrt{f_j(x)}\, \tilde{x}\, u_j \|^2_{-1+\varepsilon_0,\, \Omega'_{r_0+1}}$$
$$\leq C(K_\pm) \sum_{j=1}^{N} \{ \|u_j\|_{-1-\varepsilon_0,\, \Omega'_{r_0}} + \|f_j\|_{1+\varepsilon_0,\, \Omega'_{r_0}} \}.$$

証明は single equation の場合と同じように出来る（[3], [4] を参照せよ）。Prop 3 の拡張も出来るが以下で使わない。

## 3. 弾性体の方程式の外部境界値問題

$R^3$の或る外部領域$\Omega$ をしめる inhomogeneous medium 中の弾性波の伝播問題を考える。$v = \{v_1, v_2, v_3\}$ を displacement vector とするとき弾性体の方程式は次で与えられる。

$$(6) \qquad [-\Delta^* - \kappa^2 \rho(x)]v = \mathfrak{f}(x) \qquad \mathfrak{f} = \{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3\}, \quad x \in \Omega,$$

$$[\Delta^* v]_j = \sum_{k,l,m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[C^{jk}_{lm}(x) \frac{\partial}{\partial x_l} v_m\right].$$

ここに $C^{jk}_{lm}(x)$ は stress tensor と strain tensor を関係づける tensor であり，次の対称性をもつ。

$$C^{jk}_{lm} = C^{kj}_{lm} = C^{kj}_{ml} = C^{ml}_{kj}.$$

境界$\partial\Omega$ 上で $v$ は Dirichlet 条件又は第3種条件

$$\sum_{k,l,m} n_k C^{jk}_{lm}(x) \frac{\partial}{\partial x_l} v_m + d(x) v_j = 0$$

を充すとする。これらを共に $Bv = 0$ で表わす。

我々は媒質が充分遠方で isotropic であるとする。つまり、$\Omega'_{r_0}$（$r_0$：充分大きくとり）で $C^{jk}_{\ell m}(x)$ が次のように表わせる場合を考える。

(7) $$C^{jk}_{\ell m}(x) = \lambda(x)\,\delta_{jk}\,\delta_{\ell m} + \mu(x)\,(\delta_{j\ell}\,\delta_{km} + \delta_{jm}\,\delta_{k\ell})$$

ここに $\delta_{jk}$ は Kronecker symbol で $\lambda(x)$, $\mu(x)$ は $\mu(x)$ が剛性率, $k(x) = \lambda(x) + \frac{2}{3}\mu(x)$ が圧縮率を表わす scalar 関数である。

$\Omega'_{r_0}$ で (6) は次のように書ける。

(8) $$-\operatorname{grad}[\lambda(x)\operatorname{div} v] - \operatorname{rot}[\mu(x)\operatorname{rot} v] - 2\sum_{j=1}^{3}\partial_j[\mu(x)\partial_j v] - \kappa^2\rho(x)v = f(x)$$

以下簡単のために $\mu(x) = \mu$ constant としよう。そのとき (8) は次のように書ける。

(9) $$-\operatorname{grad}[(\lambda(x)+2\mu)\operatorname{div} v] - \mu\operatorname{rot}[\operatorname{rot} v] - \kappa^2\rho(x)v = f(x).$$

$\lambda(x)$, $\rho(x)$ に次の条件を課す。$\mu$ は正数である。

(C.E) $\lambda(x) \in C^2(\Omega'_{r_0})$, $\rho(x) \in C^1(\Omega'_{r_0})$ であり $|x| \to \infty$ と共に

$\operatorname{grad}\lambda(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon_0})$, $\operatorname{grad}\rho(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon_0})$.

さらに $k(x) = \lambda(x) + \frac{2}{3}\mu > k_0 > 0$, $0 < \rho_0 < \rho(x) < \rho_1$.

$\Omega_{r_0} = \{x \in \Omega ; |x| < r_0\}$ に於ても $C^{jk}_{\ell m}(x)$ に regularity や或る種の definite 性を仮定する必要があるが．ここでは省略する。くわしくは例えば Fichera [5] も見て欲しい。

上の条件のもとに次の結果を得る。

<u>定理2</u> (6) に於て $\rho(x) \in [H^2(\Omega)]^3$, $\mathrm{grad}\,\rho_j(x) \in [\mathcal{H}_{1+\varepsilon_0}\quad]^3$ とする。このとき実軸上の discrete set $\Sigma$ を除いて極限吸収の原理が成り立つ。$\Sigma^2 = \{\sigma^2 ; \sigma \in \Sigma\} - \{0\}$ は (6) 及び境界条件から定まる selfadjoint operator の固有値から成り対応する固有関数は compact support (in $\Omega_{r_0}$) をもつ。一意接続定理が $\Omega$ 全体で成り立てば $\Sigma^2$ は空集合になる。

まず (9) が (4) に帰着出来ることに注意する。そのために $u = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ を次のように定める。

$$(10)\quad \begin{cases} u_1 = (\lambda(x) + 2\mu_0)\,\mathrm{div}\, v \\ u_j = \mu_0 [\mathrm{rot}\, v]_j \qquad j = 2.3.4 \end{cases} \qquad \hat{u} = \{u_2, u_3, u_4\} \text{ とおく。}$$

この $u$ は (4) を充す．ここに $\rho_1(x) = \dfrac{\rho(x)}{\lambda(x) + 2\mu_0}$, $\rho_j(x) = \dfrac{\rho(x)}{\mu}$ $(j = 2.3.4)$, $\sum_{k=1}^{4} P_{1k}(x, \partial) u_k = -\dfrac{\mathrm{grad}\,\rho(x)}{\rho(x)} \cdot \{\mathrm{grad}\, u_1 - \mathrm{rot}\, \hat{u}\}$,

$\sum_{k=1}^{4} P_{jk}(x, \partial) u_k = -\left[\dfrac{\mathrm{grad}\,\rho(x)}{\rho(x)} \times \{\mathrm{grad}\, u_1 - \mathrm{rot}\, \hat{u}\}\right]_j$ $(j = 2.3.4)$,

$f_1(x) = -\mathrm{div}\, g(x) + \dfrac{\mathrm{grad}\,\rho(x)}{\rho(x)} \cdot g(x)$, $\hat{f}(x) = -\mathrm{rot}\, g(x) + \dfrac{\mathrm{grad}\,\rho(x)}{\rho(x)} \times g(x)$.

(9) 及び (10) より $v$ は次のように表せる。

$$(11) \qquad v = \frac{-1}{\kappa^2 \rho(x)} \{ \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{rot} \hat{u} + g(x) \}.$$

定理2に於て radiation condition としては (5) を採用する。

定理2の証明には補題1, 2に対応するものが必要になるがそのためには Props 4, 5 ; (6) に対応する Apriori estimates ((1)に於て coercivity に相当するもの); 及び Green の公式をうまく 用いればよい。Prop 3 に対応する結果はやはり Green の公式と Prop 5 から従う。Apriori estimates は [5] に示されている。

定理2は Leis [6] の結果の拡張である。[6] では medium が $\Omega$ 全体で isotropic, 遠方で homogeneous ($\lambda(x)$, $\rho(x)$: const) の場合を扱っている。

4. Maxwell equation の外部境界値問題

$R^3$ の或る外部領域で次の境界値問題を考える。

$$(12) \quad \begin{cases} -\operatorname{rot} v_1 - i\kappa \mu_2(x) v_2 = g_1(x) & \\ \operatorname{rot} v_2 - i\kappa \mu_1(x) v_1 = g_2(x) & \text{in } \Omega \\ n \times v_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ はそれぞれ媒質の誘電率, 導磁率を表わす tensor

だが、今 $|x|>r_0$ で scalar になるとする。次のことを仮定する。

(C.M) $\mu_j(x)$ は $C^2(\Omega)$ に属し、有界で一様に正定値。

$|x|>r_0$ で $\operatorname{grad}\mu_j(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon_0})$

このとき次の結果を得る。

<u>定理3</u>. $g_j(x)$, $\partial g_j(x)$, $\partial^2 g_j(x) \in [\mathcal{H}_{-1-\varepsilon_0}]^3$ とすると定理2と同じ結果を得る。

この結果は Leis [7], 　　　　の結果の拡張である。[7], 　では $|x|>r_0$ で $\mu_j(x)$ が constant (scalarの) になる場合が扱れている。

定理3に於て radiation condition として Silver-Müller のものでなく、やはり (5) が採用される。(5) は Silver-Müller cond より ある意味で強い条件である。

5. 注意

上で用いられた方法は Dirac equation の場合にも適用出来る。その場合 Yamada [8] と同じ結果を得る。

# 文 献


[1] Eidus, D.M.: The principle of limiting absorption, Math. Sb. (N.S.), 58 (100), 65-86 (1962).

[2] ——: The principle of limiting amplitude, Uspekhi Math. Nauk. 24, 91-156 (1969).

[3] Ikebe, T. & J. Uchiyama: On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second order elliptic operators, J. Math. Kyoto Univ. 11, 425-448 (1971)

[4] Mochizuki, K.: Spectral and scattering theory for second order elliptic differential operators in an exterior domain, Lecture note, University of Utah, Winter & Spring 1972.

[5] Fichera, G.: Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems, Lecture note in Math., Springer 1965.

[6] Leis, R.: Zur Theorie elastischer Schwingungen in inhomogenen Medien, 158-168 (1971).

[7] ——: Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien, Math Z., 106, 213-224 (1968).

[8] Yamada, : to appear in Publ RIMS Kyoto Univ.