数理解析研究所講究録
第186巻 1973年 61-75



# 強双曲型方程式に対する混合問題の$L^2$-理論についての二、三の注意

北大 理　　上見 練太郎

ここでは、強双曲型方程式に対する zero initial data をもつ混合問題が$L^2$-well posed であるための必要条件—"境界の各点に凍化した定数係数の問題が(一様)$L^2$-well posed である"—を求めて、その逆の問題を二階の場合に考察する。なお、energy 不等式が成立する場合については最後の節で言及する。

## §1. 定義と一般論

半空間$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{ x=(x', x_n)\,;\ x'=(x_0, x'')=(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}),\ x_n>0\}$において、次の境界値問題$(P, B_j)$を考える:

$$P(x, D)u = f \qquad (x_n>0),$$

$$B_j(x', D)u = g_j \quad (j=1, \cdots, l) \qquad (x_n=0).$$

ここで、$D=(D_0, \cdots, D_n)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$. $P$と$B_j$についての仮定は次の通り。$P$は$x_0$方向に強双曲型、$m$次微分作用素、境界作用素$B_j$の次数$m_j$については$m_j<m$かつ

$m_j \neq m_k$ ($j \neq k$), $P$ と $B_j$ はともに $x_n = 0$ に関して non-characteristic, $P$ と $B_j$ の係数は $C^\infty$ で原点を中心とする大きな球の外では定数である.

$L^2$-well posedness を定義するために, 時間方向 $x_0$ に重みをつけた関数空間 $H_{k,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $H_{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ ($\gamma \neq 0$) を導入しよう. 即ち,

$$H_{k,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \{u(x)\,;\ e^{-\gamma x_0}u(x) \in H^k(\mathbb{R}^{n+1}_+)\} \quad (k \geq 0;\ \text{整数}),$$

$$H_{s,\gamma}(\mathbb{R}^n) = \{u(x')\,;\ e^{-\gamma x_0}u(x') \in H^s(\mathbb{R}^n)\} \quad (s;\ \text{実数}).$$

それらのノルムはそれぞれ

$$\|u\|^2_{k,\gamma} = \sum_{j+|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |e^{-\gamma x_0}\gamma^j D^\alpha u(x)|^2 dx,$$

$$\langle\!\langle u \rangle\!\rangle^2_{s,\gamma} = \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-\gamma x_0}\Lambda^s u(x')|^2 dx'.$$

ここで,

$$\Lambda^s u(x') = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau x_0 + i\sigma x''}\Lambda(\xi,\sigma,\gamma)^s \hat{u}(\tau,\sigma)\, d\xi d\sigma,$$

$$\hat{u}(\tau,\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\tau x_0 - i\sigma x''}u(x')\, dx',$$

$$\Lambda(\xi,\sigma,\gamma) = (|\tau|^2 + |\sigma|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau = \xi - i\gamma,$$

$$\sigma x'' = \sigma_1 x_1 + \cdots + \sigma_{n-1}x_{n-1},\ |\sigma|^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_{n-1}^2.$$

なお, あとで使用する parameter $\gamma$ をもつ pseudo-differential operator $A(x', D'; \gamma)$ は上の $\Lambda^s$ の定義において symbol $\Lambda(\xi, \sigma, \gamma)$ を $a(x', \xi, \sigma, \gamma)$ におきかえて定義する.

<u>定義</u>: 境界値問題 $(P, B_j)$ ($g_j \equiv 0$) が $L^2$-well posed であるとは, 適当に正の定数 $C$, $\gamma_0$ をとると, 任意の $f \in$

$H_{1,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ $(\gamma \geqq \gamma_0)$ に対して一意的な解 $u \in H_{m,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ が存在して次の評価式をみたすことである：

(1) $$\gamma^2 \| u \|^2_{m-1,\gamma} \leqq C \ \| f \|^2_{0,\gamma} \quad (\gamma \geqq \gamma_0).$$

この定義は $P$ と $B_j$ が斉次定係数のとき［3］において採用したものと同値である．次に，定義より一般論として導びかれる事実を列記しておこう．その殆んどは久保田［6］による．

(イ) $(P, B_j)$ が $L^2$-well posed ならばその dual な問題は（過去に向って）$L^2$-well posed である．即ち，時間方向の重み $\gamma$ を負にかえる．更に，定義における $u$ は高次の評価式をみたす：

(2) $$\gamma^2 \| u \|^2_{m,\gamma} \leqq C_1 \ \| f \|^2_{1,\gamma} \quad (\gamma \geqq \gamma_1 \geqq \gamma_0).$$

(ロ) $(P, B_j)$ が $L^2$-well posed ならば，適当に正の定数 $C'$, $\gamma_0'$ をとると，任意の $f \in H_{1,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\Lambda^{\frac{1}{2}}_{x''} g_j \in H_{m-m_j,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ $(\gamma \geqq \gamma_0')$ に対して一意的な解 $u \in H_{m,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ が存在して

(3) $$\gamma^2 \| u \|^2_{m-1,\gamma} + \gamma^2 \sum_{j=0}^{m-1} \langle\!\langle \Lambda^{-\frac{1}{2}}_{x''} D_n u \rangle\!\rangle^2_{m-j-1,\gamma} \leqq C' \left( \| f \|^2_{0,\gamma} + \sum_{j=1}^{\ell} \langle\!\langle \Lambda^{\frac{1}{2}}_{x''} g_j \rangle\!\rangle^2_{m-m_j-1,\gamma} \right),$$

ここで，$\Lambda_{x''}$ は $\Lambda$ の定義において symbol $(|\tau|^2+|\sigma|^2)^{\frac{1}{2}}$ を $(\gamma^2+|\sigma|^2)^{\frac{1}{2}}$ にかえたものである．評価式 (3) は $P$ が二階で $B$ が実数値をとるとき，宮武［7］において示された．

一般論として(3)を導くためには，まず[6]によって(3)で$\Lambda_{x''}$を$\Lambda$にかえたものが成立することに注意しよう．さて symbols $\Lambda$と$\Lambda_{x''}$が同等でないところは$\sigma=0$の近傍である．が，そこでは白田[10]と次節に述べる定理1より Lopatinski 行列式が zero ではない．

(ハ) $(P, B_j)$が$L^2$-well posed のとき，$f=0$，$g_j=0$ $(x_0<0)$なら $u=0$ $(x_0<0)$が導かれる．したがって，初期条件が zero であることは関数空間の中にかくされている．

## §2. 必要条件と問題の設定

$P, B_j$の主要部を$P^\circ$，$B_j^\circ$で表わし，$(P, B_j)$を境界の各点$(y', 0)$に凍化した定係数の問題を$(P, B_j)_{y'}$と記すことにする．このとき，

定理 1．$(P, B_j)$が$L^2$-well posed ならば各$(P^\circ, B_j^\circ)_{y'}$もまた$L^2$-well posed である．

注意　定理1の結論をより詳しく記すと，$y'$に無関係な正の定数$C$（これは(1)におけるものと同じにとれる）があって，任意の$f \in H_{1,\mu}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ $(\mu>0)$に対して$(P^\circ, B_j^\circ)_{y'}$の一意的な解$u \in H_{m,\mu}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$が存在して

$$\mu^2 \|u\|^2_{m-1,\mu} \leqq C \|f\|_{0,\mu} \quad (\mu>0). \tag{4}$$

定理1の証明はあとまわしにして，我々は次の

<u>問題</u>　<u>定理１の逆が成立するか？</u>

を考えよう．この問題は P が二階で，$B^0$ の係数が実数値をとるとき，上見〔1〕によって肯定的に解かれている（§3 参照）．高階又は一階系のときは一様 Lopatinski 条件をみたすという特別な class に対して肯定的に解かれている（坂本〔9〕，Kreiss〔5〕）．ここでの主目的は P が二階で $B^0$ が複素数値をとるとき，上の問題を適当な条件のもとで肯定的に解くことである．その正確な記述は §3 で述べる．

<u>定理１の証明</u>　$\mu>0$ を任意に固定し，$f\in H_{1,\mu}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ に対して $f_\varepsilon=\varepsilon^{-m}f(\varepsilon^{-1}(x'-y'),\varepsilon^{-1}x_n)$ とおくと $f_\varepsilon\in H_{1,\frac{\mu}{\varepsilon}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ $(\varepsilon>0)$．今 $\mu\varepsilon^{-1}\geq\gamma_1$ となるように $\varepsilon$ を十分小さくとると，$L^2$-well posedness より

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&P(x,D)v_\varepsilon=f_\varepsilon && (x_n>0),\\
&B_j(x',D)v_\varepsilon=0\quad(j=1,2,\cdots,l) && (x_n=0)
\end{aligned}
$$

の解 $v_\varepsilon\in H_{m,\frac{\mu}{\varepsilon}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ が存在し，§1 の (1), (2) に相当する評価式をみたす．ここで $u_\varepsilon(x)=v_\varepsilon(y'+\varepsilon x',\varepsilon x_n)$ とおけば変数変換によりこれら二つの評価式は次のようになる：

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\mu^2\|u_\varepsilon\|^2_{m,\mu}\leq C_1\|f\|_{1,\mu},\\
&\mu^2\|u_\varepsilon\|^2_{m-1,\mu}\leq C\|f\|_{0,\mu}.
\end{aligned}
$$

定数 $C$, $C_1$ は (1), (2) におけるものと同じである．さて，

(5)と $u_\varepsilon$ の定義より $u_\varepsilon$ は次の方程式をみたす：

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&P(y'+\varepsilon x', \varepsilon x_n, \varepsilon^{-1}D)\,u_\varepsilon = \varepsilon^{-m} f(x) &\quad (x_n>0),\\
&B_j(y'+\varepsilon x', \varepsilon^{-1}D)\,u_\varepsilon = 0 \quad (j=1,\cdots,l) &\quad (x_n=0).
\end{aligned}
$$

(6)より $H_{m,\mu}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ における $u_{\varepsilon_k}$ $(k\to\infty)$ の weak limit $u$ が存在して(4)をみたすことはあきらか。更に、この $u$ は(7)より $\varepsilon_k\to 0$ とすると $(P^0, B_j^0)_{y'}$ の解であることが分る。あと証明すべきことは一意性であるが、これは§1の(イ)と上と同じ方法により dual な問題 $(P^{*0}, B_j^{0*})_{y'}$ $(j=l+1,\cdots,m)$ に対しても解の存在が分るから、Green 形式よりただちに従う。

## §3. 二階の場合

$$P^0(x,D) = -D_0^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_jD_0 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)D_jD_k,$$

$$(\ a_{nn}>0,\quad a_{jk}(x)=a_{kj}(x)\ ),$$

$$B^0(x',D) = D_n - \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x')D_j - c(x')D_0 .$$

このとき、$(P^0, B^0)$ に対する Lopatinski 行列式 $R(x',\tau,\sigma)$ $(\tau=\xi-i\gamma,\ \gamma\geqq 0)$ は次式で定義される：

$$
\begin{aligned}
R(x',\tau,\sigma) &= B^0(x',\tau,\sigma,\lambda^+(x',0;\tau,\sigma))\\
&= \lambda^+(x',0;\tau,\sigma) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x')\sigma_j - c(x')\tau,
\end{aligned}
$$

ここで $\lambda^\pm(x;\tau,\sigma)$ は $P^0(x,\tau,\sigma,\lambda)=0$ の $\lambda$ についての根で $\mathrm{Im}\,\lambda^\pm \gtrless 0$ $(\mathrm{Im}\,\tau=-\gamma<0)$ なるものである。

最初に、$B^0$ の係数が実数値をとるとき、主として[1],

[4] で得られた結果をまとめておこう.

定理2. $B^0$の係数は実数値をとるとせよ. このとき, 次の命題は同値である:

(イ) $(P, B)$ は $L^2$-well posed である.

(ロ) 各 $(P^0, B^0)_{x'}$ は $L^2$-well posed である.

(ハ) $R(x', \tau, \sigma) \neq 0$ $(\gamma > 0)$ かつ $\lambda^+(x', 0, \xi, \sigma)$ が実の単根のとき $R(x', \xi, \sigma) \neq 0$.

(ニ) $R(x', \tau, \sigma) \neq 0$ $(\gamma > 0)$ かつ $(P^0, B^0)_{x'}$ の依存領域が Cauchy 問題のそれと同じである.

(ホ) $a_{nn}(x', 0)c(x') + a_n(x', 0) \geqq 0$ かつ $\sigma$ についての二次形式 $H(x', \sigma)$ が非負値である: ここで

$$H(x', \sigma) = (a_{nn}c + a_n)^2(a_{nn}e(\sigma) - d(\sigma)^2) - 2(a_{nn}c + a_n)$$

$$\times(a_{nn}a(\sigma) - a_n d(\sigma))(a_{nn}b(\sigma) + d(\sigma)) - (a_{nn} + a_n^2)(a_{nn}b(\sigma) + d(\sigma))^2,$$

$$e(\sigma) = \sum_1^{n-1} a_{jk}\sigma_j\sigma_k, \quad d(\sigma) = \sum_1^{n-1} a_{nj}\sigma_j, \quad a(\sigma) = \sum_1^{n-1} a_j\sigma_j,$$

$$b(\sigma) = \sum_1^{n-1} b_j\sigma_j, \quad a_{nn} = a_{nn}(x', 0), \quad c = c(x'), \cdots \text{ etc.}$$

注意 現状では(ホ)の代数的条件が評価式をだすのに重要な役割を果している. 即ち, それを用いて energy 不等式が導びかれ, 強い意味での $L^2$-well posedness と上の各命題が同値になる([1], [4], [7]). 今後の課題は(ホ)を用いないで評価式をだすことにある.

定理2の証明 (イ)→(ロ)は定理1, (ロ)→(ハ)

及び(ハ)$\longleftrightarrow$(ニ)は[10]，(ハ)$\longrightarrow$(ホ)及び(ホ)$\longrightarrow$(イ)は[1]による．(ホ)$\to$(イ)は部分積分の相手を適当にきめて評価式を求めるとよい．[1]で用いたそれは

$$Q(x,D)=-\frac{a_{nn}}{2}\frac{\partial P^0}{\partial\tau}(x,D)+\frac{a_n}{2}\frac{\partial P^0}{\partial\lambda}(x,D)+a_{nn}(a_{nn}C+a_n)B^0(x,D),$$
$$(\ C(x)=C(x'),\ \ b_j(x')=b_j(x)\ )$$

で，$\mathcal{I}m\int_0^t\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(P(x,D)u,\ Q(x,D)u)\,dx_0\,dx_n\,dx'$ を計算して energy 不等式を導びいた．今，目的の評価式(1)を得るには $\mathcal{I}m\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}(e^{-\gamma x_0}P(x,D)u,\ e^{-\gamma x_0}Q(x,D)u)\,dx$ を計算するとよい．解の存在は dual な問題を考えるとよい．なお，(ハ)$\leftrightarrow$(ニ)$\leftrightarrow$(ホ)$\leftrightarrow$(ロ)の基礎には[3]による $L^2$-well posedness の特徴付けがあることを注意しておこう．

さて，次に主目的の $B^0$ が複素数値をとる場合を考えよう．この場合非常に簡単と思われる例について $L^2$-well posedness を定理2の(ホ)のような係数の条件になおしても，微分作用素の範囲で部分積分の相手みつけることは絶望的と思われる(§5参照)．そこで我々はそれを pseudo-differential operator の中からみつけよう．そのため以下の仮定をおく．

(I) $\lambda^+(x',0,\xi,\sigma)=\lambda^-(x',0,\xi,\sigma)$ のとき $R(x',\xi,\sigma)\neq 0$.

(II) $R(x'_0,\xi_0,\sigma_0)=0$ かつ $\mathcal{I}m\,\lambda^+(x'_0,0,\xi_0,\sigma_0)>0$ なる$(x'_0,$

$\xi_0, \sigma_0)$ の近傍で $\mathrm{Re}\, R_0(x', \xi, \sigma)\overline{R_1(x', \xi, \sigma)} \geq 0$ , ここで

$$R(x', \tau, \sigma) \equiv R_0(x', \xi, \sigma) + \gamma R_1(x', \xi, \sigma) + O(\gamma^2).$$

これらの仮定の意味は次の通り. (I) はその点の近傍で坂本-Kreiss の方法が適用できること意味し, (II) はいわゆる Sharp form of gårding inequality ([8]) を使用できることを保証する.

<u>定理 3.</u> (I) 及び (II) を仮定すると問題は肯定的に解ける.

この定理の証明は [2] にあるが, その概略は次節で示めす.

## <u>§4. 定理3の証明</u>

向題 (P, B) を一階系に直そう.

$$V = \begin{pmatrix} \Lambda u \\ D_n u \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ \lambda^+, & \lambda^- \end{pmatrix}, \quad U = N^{-1} V = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

とおくと, (P, B) は

$$LU = D_n U - K\Lambda U + (l.o.t) \qquad (x_n > 0),$$

$$BU = (R, Q) U + (l.o.t) \qquad (x_n = 0)$$

ここで

$$K = \begin{pmatrix} \lambda^+, & 0 \\ 0, & \lambda^- \end{pmatrix}, \quad LU = N^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ Pu \end{pmatrix}, \quad Q = B^0(x', \tau, \sigma, \lambda^-).$$

なお, 上の操作は $\lambda^\pm$ が単根のときのみ意味あるものと

$\ell$, $\lambda^{\pm}$, R, Q は 0 次の pseudo-differential operators である．さて，

$$M = \begin{pmatrix} -c_1, & 0 \\ 0, & c_2 \end{pmatrix} \text{ 又は } \begin{pmatrix} -d_1\gamma\Lambda^{-1}, & 0 \\ 0, & d_2\gamma^{-1}\Lambda \end{pmatrix},$$

( $c_1, c_2, d_1, d_2$ は定数であとできめる)

を相手に部分積分を行うと

(8) $$2\,\mathrm{Im}\,(LU, MU)_{0,\gamma} = \langle U, MU\rangle_{0,\gamma} + 2\,\mathrm{Im}\,(U, MK\Lambda U)_{0,\gamma} + R(U,U),$$

ここで

(9) $$|R(U,U)| \leq C\|U\|^2_{0,\gamma} \text{ 又は } C\left(\|u_1\|^2_{0,\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\|\Lambda u_2\|^2_{0,\gamma}\right),$$

(10) $$\mathrm{Im}\,\overline{MK} = \begin{pmatrix} c_1\,\mathrm{Im}\,\lambda^+, & 0 \\ 0, & -c_2\,\mathrm{Im}\,\lambda^- \end{pmatrix} \text{ 又は } \begin{pmatrix} d_1\gamma\Lambda^{-1}\mathrm{Im}\,\lambda^+, & 0 \\ 0, & -d_2\gamma^{-1}\Lambda\,\mathrm{Im}\,\lambda^- \end{pmatrix}.$$

次に問題を局所化するために次の 1 の分割を用いる：

$$\sum_{1\leq j,k<\infty} \psi_j(\tau,\sigma)\varphi_k(x')\varphi_0(x_n) + (1-\varphi_0(x_n)) = 1,$$

ここで，$\varphi_0$, $\varphi_k$ は $C_0^\infty$ で $\varphi_0(x_n) = 1$ ( $0 \leq x_n \leq \delta$ )，$\varphi_1(x') = 1$ ( $|x'| \geq R$ )．$\psi_j'(\tau',\sigma')$ は $\{(\tau',\sigma');\ |\tau'|^2 + |\sigma'|^2 = 1,\ \gamma' \geq 0\}$ における 1 の分割として $\psi_j(\tau,\sigma) = \psi_j'(\tau\Lambda^{-1}, \sigma\Lambda^{-1})$ とおいたもの．最初に P は強双曲型だから Sharp form of Gårding inequality を用いると

(11) $$\gamma^2\|(1-\varphi_0)u\|^2_{m-1,\gamma} \leq C\,\|P(1-\varphi_0)u\|^2 \quad (\gamma \geq {}^{\exists}\gamma_0).$$

$\psi_j\varphi_k\varphi_0$ を symbol とする pseudo-differential operator

をその代表とみて $\beta(x,D)$ で表わす．$\beta(x,D)u$ のアプリオリ評価を求めるために，[3]，[10] による次の補題を用いる．

<u>補題1</u> $(P^\circ, B^\circ)_{x'}$ が $L^2$-well posed ならば

(イ) $\gamma>0$ 又は $\gamma=0$ で $\lambda^+(x',0,\xi,\sigma)$ が実の単根のとき $R(x',\tau,\sigma)\neq 0$．

(ロ) $R(x',\xi,\sigma)=0$ で $\mathrm{Im}\,\lambda^+(x',0,\xi,\sigma)>0$ のとき $R_1(x',\xi,\sigma)\neq 0$．

今，$(x'_0, \tau'_0, \sigma'_0)$ $(|\tau'_0|^2+|\sigma'_0|^2=1)$ を任意にきめて，その点が $\beta(x,D)$ の symbol の中心とせよ．才1の場合として，その中心において $\lambda^\pm$ が単根で $R\neq 0$ ときは $c_2$ を $c_1$ より十分大きくとり，(8)，(9)，(10) より Sharp form of Gårding inequality を用いると

$$(12)\quad \begin{aligned} &\gamma^2\|\beta u\|^2_{1,\gamma} + \gamma\left(\langle\!\langle \beta u\rangle\!\rangle^2_{1,\gamma} + \langle\!\langle D_n\beta u\rangle\!\rangle^2_{0,\gamma}\right) \\ &\leq C\left(\|Pu\|^2_{0,\gamma} + \gamma\langle\!\langle Bu\rangle\!\rangle^2_{0,\gamma} + \gamma\|u\|^2_{1,\gamma}\right) \end{aligned}$$

が成立する．才二の場合として，中心において $\lambda^+=\lambda^-$ のときは $\lambda^\pm$，$R$，$Q$ は通常の symbol と見ることはできないが，仮定(I)より坂本－Kreiss の方法が使えて (12) と同じ評価式が得られる．故に，残った場合はその中心が補題1の(ロ)をみたすときである．

$\beta(x,D)$ の symbol の中心が補題1の(ロ)をみたすとせよ．$\gamma'$ は十分小さいと考えてよいから仮定(II)を用いると

$$\mathrm{Re}\,\Lambda R/R_1 = \mathrm{Re}\,R_0\overline{R_1}/|R_1|^2 + \gamma + \gamma\gamma'\,\mathrm{Re}\,R_2/R_1$$
$$\geqq c\gamma .$$

これとSharp form of Gårding inequalityより

$$\langle\!\langle \Lambda R R_1^{-1}\beta v \rangle\!\rangle_{0,\gamma} \geqq c\gamma \langle\!\langle \beta v\rangle\!\rangle_{0,\gamma} - C\langle\!\langle v\rangle\!\rangle_{0,\gamma}$$
$$( v\in H_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n) \ , \ \gamma \geqq^{\exists} \gamma_0 ).$$

この式で $v=\Lambda^{-\frac{1}{2}}u_1$ とおき，$Bu = Ru_1 + Qu_2 + (\mathrm{l.o.t})U$ を用いると

$$\gamma^2\langle\!\langle \Lambda^{-\frac{1}{2}}\beta u_1\rangle\!\rangle^2_{0,\gamma} \leqq C\left(\langle\!\langle \Lambda^{\frac{1}{2}}Bu\rangle\!\rangle^2_{0,\gamma} + \langle\!\langle \Lambda^{\frac{1}{2}}\beta u_2\rangle\!\rangle^2_{0,\gamma} + \langle\!\langle U\rangle\!\rangle^2_{-\frac{1}{2},\gamma}\right).$$

故に，Mとして第二の形を用いて $d_2$ を $d_1$ より十分大とすると

(13) $\quad \langle \beta U, M\beta U\rangle_{0,\gamma} \geqq -\frac{C}{\gamma}\left(\langle\!\langle Bu\rangle\!\rangle^2_{\frac{1}{2},\gamma} + \langle\!\langle U\rangle\!\rangle^2_{-\frac{1}{2},\gamma}\right).$

次に，体積々分を考えよう．$\mathrm{Im}\,\lambda^{\pm} \neq 0$ に注意して，(10)とSharp form of Gårding inequalityより

(14) $\quad \mathrm{Im}(\beta U, KM\Lambda\beta U)_{0,\gamma} \geqq C\left(\gamma\|\beta u_1\|^2_{0,\gamma} + \frac{1}{\gamma}\|\Lambda\beta u_2\|^2_{0,\gamma} - \|U\|^2_{0,\gamma}\right).$

他方，(10)の左辺は次式で評価される：

(15) $\quad 2|\mathrm{Im}(L\beta U, M\beta U)| \leqq \frac{1}{\varepsilon\gamma}\|LU\|^2_{0,\gamma} + \varepsilon\gamma\left(\|\beta u_1\|^2_{0,\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\|\Lambda\beta u_2\|^2_{0,\gamma}\right).$

故に，(9),(13),(14),(15)より $\gamma_0$ を十分大とすると

(16) $\quad \gamma^2\|\beta u\|^2_{1,\gamma} \leqq C\left(\|Pu\|^2_{0,\gamma} + \langle\!\langle \Lambda^{\frac{1}{2}}_{x''}Bu\rangle\!\rangle^2_{0,\gamma} + \gamma\|u\|^2_{1,\gamma}\right).$

ここで，$\Lambda$ と $\Lambda_{x''}$ との同等性を用いた．

以上(11),(12),(16)の評価式をよせ集めて

<u>補題2.</u> 仮定(I)(II)のもとで，各$(P^0, B^0)_{x'}$ が $L^2$-well posedのとき次のアプリオリ評価式が成立する．

(17) $$\gamma^2\|u\|^2_{1,\gamma} \leqq C\left(\|Pu\|^2_{0,\gamma}+\langle\!\langle \Lambda^{\frac{1}{2}}_{x''}Bu\rangle\!\rangle^2_{0,\gamma}\right)$$
$$\left(u\in H_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{+}),\quad \gamma \geqq {}^{\exists}\gamma_0\right).$$

勿論，(17)の左辺に $\gamma^2(\langle\!\langle \Lambda^{-\frac{1}{2}}_{x''}u\rangle\!\rangle^2_{1,\gamma}+\langle\!\langle \Lambda^{-\frac{1}{2}}_{x''}D_nu\rangle\!\rangle^2_{0,\gamma})$ をつけ加えてもよいが，ここではあまり重要でない．最後にのこったのは存在であるが，dualな問題に対しても(I)(II)が保たれることに注意するとよい．

## §5. 例とenergy不等式

$P(D)=-D_t^2+D_y^2+D_x^2$，$(x_0,x_1,x_2)=(t,y,x)$ とするとき

| 境界条件 | $B=D_x-ib_2(t,y)D_y$ | $B=D_x-(b_1(t,y)+ib_2(t,y))D_y-D_t$ |
|---|---|---|
| $L^2$-well posed | $\lvert b_2(t,y)\rvert<1$ | $b_1^2(t,y)+b_2^2(t,y)\leqq 1$ |
| 上で仮定(I)(II)をみたすもの | $0<\lvert b_2(t,y)\rvert<1$ | $b_1^2(t,y)+b_2^2(t,y)=1$ かつ $b_2(t,y)\neq 0$ |

最後に，energy不等式についての注意をしてこのノートを終ろう．Pが二階で$B^0$の係数が実数値をとるとき([1]，[7])，又は$(P^0,B^0)$が一様Lopatinski条件をみたすとき([9])はenergy不等式が成立していた．しかし，一般に$L^2$-well posedのときenergy不等式が成立しているかどうかは上の簡単と思われる例さえわからない．なお，上の右側の例とLopatinski行列式も反射係数も同一でenergy不等式をみたす一階2×2系

が存在する:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (x>0)$$

$$(1,\ b_1 + i b_2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (x=0)$$

ここで、条件としては $b_1^2 + b_2^2 \leqq 1$ ($b_1, b_2$ 定数).

以上

## References


[1] R. Agemi: On energy inequalities of mixed problems for hyperbolic equations of second order, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ., vol. 21, 221-236 (1971).

[2] R. Agemi: Remarks on $L^2$-well posed mixed problems for hyperbolic equations of second order, to appear.

[3] R. Agemi - T. Shirota; On necessary and sufficient conditions for $L^2$-well-posedness of mixed problem for hyperbolic equations; Jour. Fac. Sci. Hokkido Univ., vol. 21, 133-151 (1970).

[4] R. Agemi - T. Shirota: On necessary and suffi-

cient conditions for $L^2$-well-posedness of mixed problems for hyperbolic equations, ibid, vol. 22, 137–149 (1972).

[5] H. O. Kreiss: Initial-boundary value problems for hyperbolic systems, Comm. Pure Appl. Math., vol. 23, 277–298 (1970).

[6] K. Kubota: Remarks on boundary value problems for hyperbolic equations, to appear.

[7] S. Miyatake: Mixed problem for hyperbolic equation of second order, to appear.

[8] P. D. Lax – L. Nirenberg: On stability for difference schemes: a Sharp form of Gårding inequality, Comm. Pure Appl. Math., vol. 19, 473–492 (1966).

[9] R. Sakamoto: Mixed problems for hyperbolic equations I, II. Jour. Math. Kyoto Univ., vol. 10, 349–373, 403–417 (1970).

[10] T. Shirota: On the propagation speed of hyperbolic operator with mixed boundary conditions, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ., vol. 22, 25–31 (1972)