数理解析研究所講究録
第187巻 1973年 90-102

超空洞ジエットフラップ翼の揚力係数

大阪府大 工　　木 田 輝 彦

1. まえがき

ジエットフラップは高揚力装置の一種で，通常翼においては想像もできないほど大きな揚力が得られる．このことが離着陸（STOL）性能の向上に有効であるため，これまで多くの研究がなされてきた。二次元ジエットフラップの理論は1956年Spence(1)によって薄翼理論の精度で完成した。三次元問題については二次元理論を拡張したMaskell(2)やTokuda(3)等の研究がある。このジエットフラップの高揚力性能に注目し，超空洞水中翼への応用を目的とした研究が1964年Ho(4)によって始められ，その後実験・理論研究が行われている。特に最近の大場(5)の研究は，ジエットフラップが非規定特性の改善に役立つ上に，翼形強度の向上にも有益であることを示した。ここでは，薄肉ジエット理論を用いて超空洞ジエットフラップ翼の線形解析を行う．まず非線形理論を導き，翼

迎角とジエット噴射角を微少量と考え，これらに対する線形理論を導く．この線形理論によって導かれた線形微積分方程式をジエット運動量係数C_jの小さい場合と大きい場合と摂動法によって解くことを試みる．

2．基礎式

図1は物理面である．不連続流線AD_∞は翼前縁Aから剥離し，ジエットは後縁Bから噴射角τで噴出される．この形状を$y_j(x)$で示す．このジエット膜の一部を拡大したのが図2である．Rはジエット膜の曲率半径で，δはその厚みである．q_jは一様流速U_0で無次元化されたジエットの外部流れのジエット膜下端の流速である．ρ，pは密度，圧力で添字0，jはジエット膜外部，内部の流れを示す．ジエット膜内部の流れは渦無しと仮定し，ジエット膜の両端でジエット内・外部流れにベルヌーイの法則を用いて整理すると

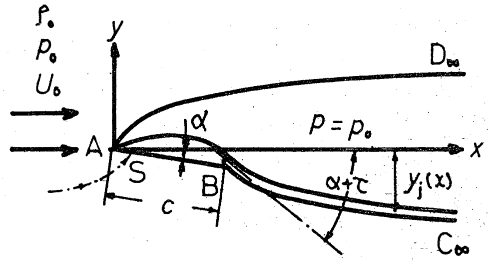


図1．物理面

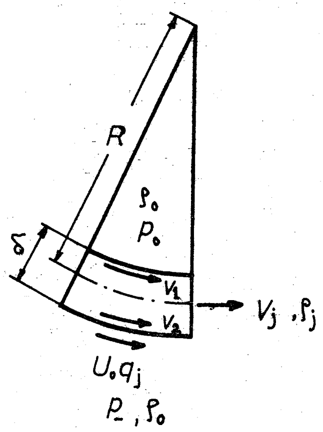


図2．ジエット膜

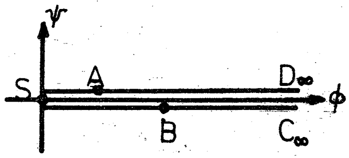


図3．W－面

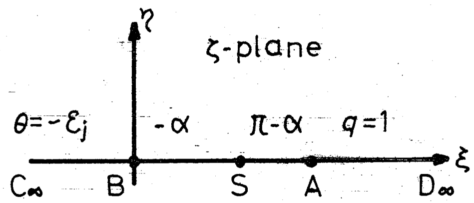


図4．ζ－面

$$1-q_j^2=\frac{cC_j}{R}\ ,\qquad C_j=\frac{J}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2 c}\ ,\qquad J=\delta\rho_j V_j^2 \tag{1}$$

ただし $V_j=(v_1+v_2)/2$ で，c は翼弦長さである．ここで，$V_j\gg U_0$ とし，$J=$ 一定とすれば，$\delta\to 0$ となる（文献(1)）．

図3は $w(=\phi+i\psi)$ 面で，図4は補助（ζ）面である．w と ζ は　$w=B(\zeta-1)^2$，　B は常数．　(2)

$$\omega(\zeta)\equiv\log\left[U_0\Big/\frac{dw}{dz}\right]\equiv-\log q+i\theta\ ,\qquad \varepsilon_j(\xi)\equiv-\tan^{-1}y_j'(x)\Big|_{x=x(\xi)} \tag{3}$$

とすれば，ζ 面の実軸上の境界条件は図4のようになる．従って Rieman-Hilbert の関係より

$$\frac{\omega(\zeta)}{H(\zeta)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\left[\frac{\omega(\zeta)}{H(\zeta)}\right]_{\zeta=\nu}d\nu}{\nu-\zeta}\ ,\qquad H(\zeta)\equiv i\sqrt{\zeta-a}\ , \tag{4}$$

ただし $\mathrm{Im}[\ ]$ は $[\ ]$ の虚部．また上式では $\zeta\to\infty$ で $\omega(\zeta)\to 0$ の条件を用いている．さらにこの条件より

$$\varepsilon_j(-\infty)=0 \tag{5}$$

(2)，(4) 式から

$$\frac{cU_0}{2B}=-\int_0^1\frac{\zeta-1}{q_w}d\zeta+\int_1^a\frac{\zeta-1}{q_w}d\zeta\ ,\qquad q_w\equiv\exp\left[-\mathrm{Re}[\omega(\zeta)]\right] \tag{6}$$

ただし $\mathrm{Re}[\ ]$ は $[\ ]$ の実部．(1)式からジエット膜の形状に関する基礎式は $\dfrac{d\varepsilon_j}{d\xi}=-\dfrac{1}{C_j}\dfrac{2B}{cU_0}(\xi-1)\left[\dfrac{1}{q_j}-q_j\right]$，$q_j\equiv\exp\left[-\mathrm{Re}[\omega(\zeta)]\right]_{\zeta=\xi}$　(7)

(5) 式の条件と (7) 式を考えると $d\varepsilon_j/d\xi\big|_{\xi\to-\infty}=0$ である．従って，

$$-\int_1^a \frac{d\nu}{\sqrt{a-\nu}}+\frac{\alpha}{\pi}\int_0^a \frac{d\nu}{\sqrt{a-\nu}}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon_j(\nu)}{\sqrt{a-\nu}}d\nu=0 \tag{8}$$

3．線形理論

α と τ を微少量とし，これらの2次以上の微少量を省略する．

$$\varepsilon_j(\xi)\equiv\alpha f_\alpha(\xi)+\tau f_\tau(\xi)+O(\alpha^2,\alpha\tau,\tau^2)\,,\quad f_\alpha(0)=f_\tau(0)=1 \tag{9}$$

と置くと，(6)，(7)，(8) 式から

$$\frac{df_\alpha}{d\xi}=-\frac{4}{C_j}\frac{\sqrt{1-\xi}}{\pi}\left[\int_0^1\frac{\sqrt{1-\nu}}{\nu-\xi}d\nu+\int_{-\infty}^0\frac{\sqrt{1-\nu}\,f_\alpha(\nu)}{\nu-\xi}d\nu\right] \tag{10}$$

$$\frac{df_\tau}{d\xi}=-\frac{4}{C_j}\frac{\sqrt{1-\xi}}{\pi}\int_{-\infty}^0\frac{\sqrt{1-\nu}\,f_\tau(\nu)}{\nu-\xi}d\nu \tag{11}$$

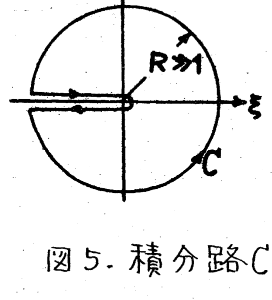
Carleman-Betz の反転公式を用いると，上式は

$$f_\alpha(\xi)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{-\xi}{1-\xi}}\left[\int_0^1\sqrt{\frac{1-\nu}{\nu}}\frac{d\nu}{\nu-\xi}+\frac{C_j}{4}\int_{-\infty}^0\frac{f_\alpha'(\nu)\,d\nu}{\sqrt{-\nu(1-\nu)}\,(\nu-\xi)}\right] \tag{12}$$

$$f_\tau(\xi)=\frac{C_j}{4\pi}\sqrt{\frac{-\xi}{1-\xi}}\int_{-\infty}^0\frac{f_\tau'(\nu)\,d\nu}{\sqrt{-\nu(1-\nu)}\,(\nu-\xi)} \tag{13}$$

今ここで，$F(\zeta)\equiv\dfrac{\lambda}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{\alpha f_\alpha'(\nu)+\tau f_\tau'(\nu)}{\sqrt{-\nu(1-\nu)}\,(\nu-\zeta)}d\nu$ ，$\lambda\equiv\dfrac{C_j}{4}$

と定義する．図5の積分路C を考えると，



$\oint_C \zeta[F(\zeta)]^2 d\zeta=0$ である．これと (12)，

図5. 積分路C

(13)式とを用いると

$$(\alpha A_\alpha+\tau A_\tau)^2=\frac{\pi}{\lambda}(\alpha+\tau)^2-\frac{2\pi}{\lambda}\alpha(\alpha+\tau)+\frac{2\pi}{\lambda}\alpha(\alpha B_\alpha+\tau B_\tau),$$

$$A_{\alpha,\tau}\equiv\int_{-\infty}^{0}\frac{f'_{\alpha,\tau}(\nu)}{\sqrt{-\nu(1-\nu)}}d\nu \quad , \quad B_{\alpha,\tau}\equiv\int_{-\infty}^{0}\sqrt{\frac{-\nu}{1-\nu}}f'_{\alpha,\tau}(\nu)\,d\nu \qquad (14)$$

従って，
$$A_\alpha^2=-\frac{\pi}{\lambda}+\frac{2\pi}{\lambda}B_\alpha \ ,\ A_\alpha A_\tau=\frac{\pi}{\lambda}B_\tau\ ,\ A_\tau^2=\frac{\pi}{\lambda} \qquad (15)$$

一方，揚力係数 C_L は　$C_L\doteqdot\frac{1}{c}\int_0^c C_p\,dx+C_j(\alpha+\tau)$，$C_p=1-q_w^2$

$$\therefore\ C_L\doteqdot\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{C_j}{2}(\alpha A_\alpha+\tau A_\tau)+C_j(\alpha B_\alpha+\tau B_\tau)\equiv\alpha C_{L\alpha}+\tau C_{L\tau}$$

(15)式から $C_{L\alpha}$，$C_{L\tau}$ の間には

$$C_{L\tau}^2=-C_j^2+2C_jC_{L\alpha}\quad ,\quad C_{L\tau}=2\sqrt{\pi C_j}\left(\frac{1}{2}+\frac{C_j}{4\pi}A_\alpha\right)=2\sqrt{\pi C_j}\lim_{\xi\to-\infty}(-\xi f_\alpha). \qquad (16)$$

このように，f_α の $\xi\to-\infty$ での性質がわかれば $C_{L\tau}$ が求まり，従って C_L を求めることが出来る。そこで f_α が $C_j\ll1$ と $C_j\gg1$ の場合，$C_j/4$ 及び $\sqrt{4/C_j}$ を微少量とする摂動法によって，(10)式又は(12)式を以下に解いてみる。

4．$f_\alpha(\xi)$ の C_j による漸近展開

4-1．$C_j\ll1$ の場合，　$\varepsilon\equiv C_j/4$ ．

$\xi\equiv-x$，　$1+F(x)\equiv f_\alpha(\xi)/\sqrt{1-\xi}$ と置くと，　$F(0)=0$，$F(\infty)=1$.

又(12)式は，$(1+x)^2 \bar{F}(x) = (1+x)\left[\sqrt{1+x} - 1 - x - \sqrt{x}\right] + \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{x}(1+x)\left[\frac{G(x)}{2x} - \frac{K}{2x}\right.$

$$\left. + \frac{d}{dx}G(x)\right] + \frac{\varepsilon}{2\pi}\sqrt{x}\,G(x) - \frac{\varepsilon}{2\pi}\sqrt{x}\,G_0 - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{x}, \quad G(x) \equiv \int_0^\infty \frac{\bar{F}(t)\,dt}{\sqrt{t}\,(t-x)}, \; K \equiv G(0), G_0 \equiv G(-1). \quad (17)$$

この(17)式の解 $\bar{F}(x)$ は $x = O(\varepsilon)$ 付近の解を内部解，$x = O(1)$ 付近の解を外部解とし，夫々別々に解を求め Van Dyke のマッチングにより解の接続を行う．この際，内部解を求めるとき，$O(\mu) < x$ に対する $\bar{F}(x)$ を未定関数，外部解を求めるとき $x < O(\Delta)$ に対する $\bar{F}(x)$ を未定関数と仮定する．ただし $O(\varepsilon) < O(\Delta) < O(\mu) < O(1)$ である．

4-1.1．内部解

内部変数 $\bar{x}$ を $\bar{x} = x/\varepsilon$ とし，内部解を $\bar{F}^i(\bar{x})$ とする．Spence[6] より

$$\bar{F}^i(\bar{x}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n \tilde{F}_n^i(\bar{x}), \quad \tilde{F}_n^i(\bar{x}) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{x}^{n+1-s} F_n(s)\,ds, \; 0 < c < \frac{1}{2}. \quad (18)$$

外部解との共通領域 $O(\Delta) < x < O(\mu)$ で，内外部解が接続される．この領域での $\bar{F}$ は，$\bar{F}(0)=0$ と $\bar{F}(\infty)=1$ の条件を考えるとき ε に対しせいぜい $O(1)$ であろう．$\therefore\; B_n \leq O\left((\varepsilon/\mu)^{n+1/2}\right)$. (19)

次に，$\displaystyle\int_0^\mu \frac{\bar{F}(t)\,dt}{\sqrt{t}\,(t-\varepsilon\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n \bar{x}^{n+1}\int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\bar{t}^{-n-1}\tilde{F}_n^i(\bar{t})}{\sqrt{\bar{t}}\,(\bar{t}-\bar{x})}d\bar{t} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sum_{k=0}^{n} \bar{x}^{n-k}\int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\bar{t}^{-n-1+k}\tilde{F}_n^i(\bar{t})}{\sqrt{\bar{t}}}d\bar{t}\right]$,

$$\int_\mu^\infty \frac{\bar{F}(t)\,dt}{\sqrt{t}\,(t-\varepsilon\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_1^\infty \frac{\bar{F}(\mu t)}{t\sqrt{t}}\left[1 + \left(\frac{\varepsilon\bar{x}}{\mu}\right)\frac{1}{t} + \cdots\right]dt = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\bar{A}}_n \left(\frac{\varepsilon\bar{x}}{\mu}\right)^n,$$

を用いると，(17)式で定義された$G(x)$は

$$G(\bar{x})=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}B_n\bar{x}^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{\bar{\xi}^{-n-1}\tilde{F}_n^i(\bar{\xi})}{\sqrt{\bar{\xi}}\,(\bar{\xi}-\bar{x})}d\bar{\xi}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(\frac{\varepsilon\bar{x}}{\mu}\right)^n+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{A}_n\left(\frac{\varepsilon\bar{x}}{\mu}\right)^n\right]$$

ただし C_n は $\tilde{F}_n^i$ $(n=0,1,\cdots)$ によって決まる常数であり，$\bar{A}_n$は未定関数 $F(x)$ $(x>O(\mu))$ によって定まるので，未定常数と考えられる．ここで $C_n\leq O(\sqrt{\varepsilon/\mu})$ であればC_nは$\bar{A}_n$ に含めることが出来るが，今一応C_nも未定常数と仮定する．従って，

$$G(\bar{x})=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}B_n\bar{x}^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{\bar{\xi}^{-n-1}\tilde{F}_n^i(\bar{\xi})}{\sqrt{\bar{\xi}}\,(\bar{\xi}-\bar{x})}d\bar{\xi}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{\varepsilon\bar{x}}{\mu}\right)^n\right],\quad A_n\text{：未定常数．} \tag{20}$$

従って，

$$A_n\leq O\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right) \tag{21}$$

であれば上述の仮定が妥当である．この(20)式を(17)式に代入し，$\tilde{F}_0^i$，$\tilde{F}_1^i$，・・を求めると次のように得られる．

$$B_0=\sqrt{\varepsilon}\,,\quad F_0(s)=\frac{D}{s-1}\mathbb{F}_0(s)\,,\quad D=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\mu}\bar{A}_1+\frac{\varepsilon K}{2\pi}+\frac{\varepsilon G_0}{2\pi}\right], \tag{22}$$

$$B_1=\varepsilon B_0 D\,,\quad B_1\bar{B}_1=-\frac{\varepsilon}{2}\,,\quad F_1(s)=\frac{A^0(s)\mathbb{F}_0(s)}{(s-1)(s-2)}+\frac{\bar{B}_1}{s-2}\mathbb{F}_0(s-1)\,,$$

ただし，$\bar{A}_1$，$\bar{A}_2$ は A_1，A_2とμA_1 の一次式で，$A^0(s)$ は

$$A^0(s+1)=A^0(s)-s+\frac{1}{2}\,,\quad A^0\left(\frac{1}{2}\right)=3-\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left[\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2\frac{\bar{A}_2}{B_1}+\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{B_1}\right]$$

を満足するsの多項式である．又(19)，(22)式から

$$\mu \leq O(\varepsilon^{1/3}) . \tag{24}$$

(22)式で用いられた $\mathbb{F}_0(S)$ は Spence[6] によって導入されたもので，
$$\mathbb{F}_0(S)=\Gamma(S)G_0(S),\quad G_0(S)\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{G(1-S)G(3/2+S)}{G(1+S)G(1/2-S)},\quad G:\text{Alexeirski の } G .$$

4-1.2．外部解

外部変数を $x=x$ とし，外部解を $\bar{F}^0(x)$ とする．基礎式(17)の $G(x)$ を求めるとき，外部解の $x\ll 1$ の性質が重要である．一般に，$x<1$ に対し
$$\bar{F}^0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n x^{-n}\tilde{F}_n^0(x)\ ;\ O(x)<\tilde{F}_n^0\leq O(\log^p x),\ x\to 0$$
p：正の整数 (25)

と表わすことが出来よう．解の接続を考えるとき
$$D_n \leq O(\Delta^n) . \tag{26}$$

ここで，以下の積分を利用して $G(x)$ を求める．
$$\int_0^{\Delta}\frac{\bar{F}(t)}{\sqrt{t}\,(t-x)}dt=-\frac{\sqrt{\Delta}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}E_n\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n \qquad ;\ E_n：\text{未定常数},$$

$$\int_{\Delta}^{1}\frac{\bar{F}(t)\,dt}{\sqrt{t}\,(t-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{x^n}\int_0^1\frac{\tilde{F}_n^0(t)dt}{\sqrt{t}\,(t-x)}+\frac{\sqrt{\Delta}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_n\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n ;\ \bar{C}_n：\tilde{F}_n^0\ (n=0,1,\cdots)\text{により定まる常数}.$$

従って，$\bar{C}_n$ は E_n に含まれると考えられ，これを C_n とすると，
$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{x^n}\int_0^1\frac{\tilde{F}_n^0(t)dt}{\sqrt{t}\,(t-x)}+\int_1^{\infty}\frac{\bar{F}^0(t)dt}{\sqrt{t}\,(t-x)}+\frac{\sqrt{\Delta}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n \tag{27}$$

この(27)式を(17)式に代入すれば，ε に対する漸近解が得られる．$\bar{F}^0(x)$ の第1，2近似を $\bar{F}_0^0(x)$，$\bar{F}_1^0(x)$ とすると

$$F_0^i(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x - \sqrt{x}}{1+x} \ ,$$

$$F_1^i(x) = \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\left[\frac{G_0^0(x)}{2x} + \frac{d}{dx}G_0^0(x)\right] + \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{2\pi}\frac{G_0^0(x)}{(1+x)^2} - \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{2(1+x)^2} - \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{2\pi}\frac{G_{00}}{(1+x)^2}$$

$$-\frac{\varepsilon K_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \ , \quad G_0^0(x) \equiv -\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\log\left[\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\right] + \frac{\log x}{1+x} \ .$$

ただし K_0, G_{00} は K と G_0 の才1近似である．

4-1.3．解の接続

ここで，才2近似までの外部解を内部変数で漸近展開した後，外部変数で書き直したものを F^{oi} とし，内部解を外部変数で漸近展開したものを F^{io} とする．（28）式から

$$F^{oi} \cong -\frac{x}{2} - \sqrt{x} + x\sqrt{x} - \frac{\varepsilon K_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\varepsilon}{\pi}\left(-\frac{K_0}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{G_{00}}{2}\right)\sqrt{x} + \frac{\varepsilon}{2\pi}\frac{\log x}{\sqrt{x}} - \frac{3\varepsilon\sqrt{x}}{2\pi}\log x, \tag{29}$$

又（22）式から

$$F^{io} \cong \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\left[-2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{1/2}(1+\sqrt{\varepsilon}D_1+\varepsilon D_2) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{1/2}(\log 4 + \gamma + 1 + \log x\right.$$

$$\left.-\log\varepsilon)(1+\sqrt{\varepsilon}D_1)\right] + \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{2}\left[\frac{4}{3}A_0^0\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{3/2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{1/2}\left\{A_0^{0\prime}\left(\frac{3}{2}\right) + A_0^0\left(\frac{3}{2}\right)(1-\log 4\right.\right.$$

$$\left.\left.-\gamma - \log x + \log\varepsilon)\right\}\right] - \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{x}{\varepsilon} - 2\left(\frac{x}{\pi\varepsilon}\right)^{1/2} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\pi x}\right)^{1/2}(1+\log 4+\gamma+\log x - \log\varepsilon)\right], \tag{30}$$

ただし $A_0^0(s)$ は $A_0(s)$ の才1近似で，

$\sqrt{\varepsilon}D_1 + \varepsilon D_2 = \varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon}\bar{A}_1/\mu + \varepsilon K/2\pi + \varepsilon G_0/2\pi$ である．

この(29)，(30)式が恒等的に等しくなるためには

$$D_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ ,\quad D_2=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{K_0}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{G_{00}}{2}\right)+\frac{1}{\pi}\left[A_0^{\circ\prime}\left(\frac{3}{2}\right)+A_0^{\circ}\left(\frac{3}{2}\right)(1-\log 4-\gamma+\log\varepsilon)\right],$$

(31)

$$A_0^{\circ}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\ ,\quad A_0^{\circ}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\ ,\quad K_0=-\log 4-\gamma-1+\log\varepsilon\ .$$

従って $\dfrac{\bar{A}_1}{\mu}=\sqrt{\pi}+\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi}\left[K_0+A_0^{\circ\prime}\left(\frac{3}{2}\right)+A_0^{\circ}\left(\frac{3}{2}\right)(1-\log 4-\gamma+\log\varepsilon)\right]$,

又 $A_0^{\circ}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ より， $\bar{A}_2<O\left(\frac{\mu^2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$． (21)式から $O(\varepsilon^{2/5})<\mu\leq O(\varepsilon^{1/3})$.

(32)

又(23)式から $A_0^{\circ}(3/2)=3/2$ が求まり，K_0は才1近似の合成解(composite solution)を用いると

$$K_0\cong\int_0^\infty\frac{\bar{F}(t)}{t\sqrt{t}}dt\cong B_0\int_0^\varepsilon\frac{\tilde{F}_0^i(t)}{t\sqrt{t}}dt+\int_\varepsilon^1\frac{B_0\tilde{F}_0^i(t)+\bar{F}_0^{\circ}(t)-\bar{F}_0^{\circ i}(t)}{t\sqrt{t}}dt+\int_1^\infty\frac{\bar{F}_0^{\circ}(t)}{t\sqrt{t}}dt$$

$$\cong-1+\log\varepsilon-\gamma-\log 4$$

となり(31)式と一致する．

4-1.4．揚力係数

(16)式から$C_{L\tau}$を求めると $C_{L\tau}=2\sqrt{\pi\varepsilon}\left[1-\dfrac{\varepsilon K_0}{\pi}-\dfrac{\varepsilon G_0}{\pi}-\varepsilon\right]$.

K_0の才1近似は求められているので，G_0を才1近似の合成解を用いて求めると，$G_0\cong 1-\pi$．従って

$$C_{L\tau}\cong 2\sqrt{\pi\varepsilon}\left[1-\frac{\varepsilon}{\pi}\log\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\pi}(\gamma+\log 4)+\cdots\right] \qquad (33)$$

4.2. $C_j \gg 1$ の場合，$\varepsilon^2 \equiv 4/C_j$

$\xi \equiv -1/X$，$f_\alpha(\xi) \equiv \sqrt{X/(X+1)}\,F(X)$ とおくと，基礎式 (10) より

$$(1+X)X^3\frac{dF}{dX} + \frac{X^2}{2}F = -\frac{\varepsilon^2}{\pi}(1+X)^2\left[X\int_0^\infty \frac{F(t)dt}{t(t-X)} - 2 - \sqrt{\frac{X+1}{X}}\log\left\{\frac{\sqrt{X+1}-\sqrt{X}}{\sqrt{X+1}+\sqrt{X}}\right\}\right]. \quad (34)$$

ただし $F(0)=0$，$F(\infty)=1$ である．ここで $C_j \ll 1$ の場合と同様に，内・外部解を求め解の接続を行えばよい．以上得られた結果を示すと次のようになる．

外部解：$$F^o(X) = \sqrt{\frac{1+X}{X}} - \frac{\varepsilon^2}{\pi}\sqrt{\frac{1+X}{X}}\int^X \sqrt{\frac{1+X}{X}}\,\frac{1}{X^2}\left[B_0 - 2\sqrt{2} - \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right]dX + O(\varepsilon^4).$$

ただし，B_0 は未定常数である．

内部解：$$F^i(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[F_0^i(\bar{X}) + \varepsilon F_1^i(\bar{X}) + \varepsilon^2 F_2^i(\bar{X}) + O(\varepsilon^3)\right]$$

$$F_n^i(\bar{X}) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{X}^{n-s} F_n(s)ds, \quad -\frac{1}{2} < c < 0,$$

ただし，$F_0(s) = a_0 P(s)\mathbb{F}_1(s)$，$F_1(s) = sF_0(s)$，$F_2(s) = R(s)F_0(s)$，

$$P(s) = (\sqrt{2})^s\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s+\frac{1}{4})}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}, \quad R(s) = \frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})(s+a) - \frac{1}{8}, \quad \mathbb{F}_1(s) = \frac{Q_0(s-1)}{\cos\pi s},$$

$$Q_0(s) \equiv \frac{\Psi(-\frac{1}{2}-\frac{s}{2})\Psi(\frac{1}{4}+\frac{s}{2})}{\Psi(\frac{s}{2})\Psi(-\frac{3}{4}-\frac{s}{2})}, \quad \Psi(s) \equiv \frac{G(1-s)}{G(1+s)}, \quad G\text{: Alexeivski の } G,$$

又 a_0，a は未定常数である．解の接続により

$a_0 = \pi/[P(1/2)Q_0(-1/2)]$，$a$：未定　となる．

従って，$C_{L\tau}$ は

$$C_{L\tau}=\frac{4\sqrt{\pi}}{\varepsilon}\lim_{X\to 0}\frac{F(X)}{\sqrt{X}}\cong C_j \tag{35}$$

5．数値結果と考察

図6は $C_j<<1$ の場合のジエット膜の形状 $\bar{F}(x)$ を示している．$\bar{F}^i(\bar{x})$ は Mellin 逆変換により $\bar{x}>1$ と $\bar{x}<1$ について夫々巾展開式として求められるが，この図の $\bar{F}^i$ は2項まで展開したものの数値結果である．図7は $Ho^{(4)}$ の結果（図式から読取った）と本報の結果とを示した．Ho の結果は C_j の大きい所で少々大きい値を示しているのではないかと思われる．$C_j>>1$ の場合，$C_{L\tau}\cong C_j$ であるので $\partial C_{L\tau}/\partial C_j\to 1\ (C_j\to\infty)$ でなければならないが，Ho の結果は $\partial C_{L\tau}/\partial C_j>1$ のようである．表1は Ho の結果との比較をより明らかにするため示したものである．

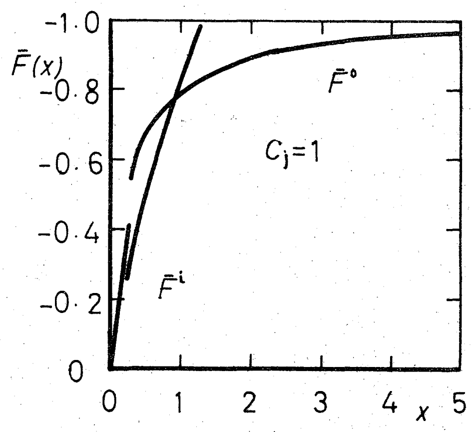


図6．ジエット膜の形状

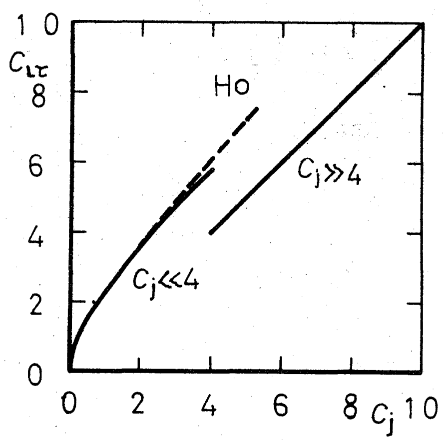


図7．$C_{L\tau}$ と C_j

表1．$C_{L\tau}$ の比較

C_j	Eq.(33)	$Ho^{(4)}$の結果
0.1	0.586	0.581
0.3	1.076	1.063
0.5	1.455	1.499
0.8	1.946	1.981
1.0	2.245	2.287

以上の結果，揚力係数の C_j によ

る漸近展開式が求められ，Ho の結果と比較して妥当な漸近式であることがわかった。勿論，本報の方法，結果を用いて $f_\tau(\xi)$ や不連続自由流線の形状，翼下面の速度分布（C_p 分布）も求めることが出来る．

6．参考文献

(1). Spence, D.A.; Proc. Roy. Soc., A, Vol. 238, 1956, p. 46.

(2). Maskel, E.C., Spence, D.A.; Proc. Roy. Soc., A, Vol. 251, 1959, p. 407.

(3). Tokuda, N.; J. Fluid Mech., Vol. 46, 1971, p. 705.

(4). Ho, H.T.; Trans. ASME, D, Vol. 86, 1964, p. 851.

(5) 大場，樋口；日本機械学会講演論文集 No. 720-4, 1972, p. 157.

(6) Spence, D.A.; Proc. Roy. Soc., A, Vol. 261, 1961, p. 97.