数理解析研究所講究録
第187巻 1973年 103-116

回転および非回転成層流体の温度変化過程

京大 工 航空　　松田 卓也

§1. 序

鉛直軸のまわりに角速度Ωで回転している円柱型容器に入っている流体を考える。容器の角速度をわずかに変化させた場合に流体がどのようにふるまうかを調べるのがいわゆるlinear spin-up 問題である。非圧縮性流体で温度が一定の場合は Greenspan & Howard (1963) により，安定な温度成層の場合は Holton (1965), Pedlosky (1967), Walin (1969), Sakurai (1969 a, b), Sakurai, Clark & Clark (1971 a, b) により詳しく研究された。いずれの場合も容器の上下底の水平壁にそってできるEkman層が子午面環流を誘起し，それによって角運動量が壁から内部の流体に輸送される。このspin-up time は環流が容器を一循する時間でありその大きさは$\Omega^{-1}E^{-1/2}$の程度である。ここで$E=\nu/H^2\Omega$はEkman数，Hは容器の高さ，νは動粘性係数である。spin-up time はEが小さいとき粘性拡散時間$\Omega^{-1}E^{-1}$より短い。

さて成層流体と回転流体の間にはある対応関係がある事が知られている。(Greenspan 1967) Veronis (1967 a, b) はこの問題をさらに詳しく調べ,回転流体を記述する変数を適当によみかえると成層流体の式が得られる事を示した。 しかしこの対応は Plandtl 数 $\sigma(=\nu/\kappa)$ が1で,さらに成層流体が二次元的運動をする場合に限られる。 ここで我々が議論する円柱容器の heat-up は彼の三次元的問題であり,しかも σ を残しておく。
回転流体の spin-up に対応する現象は,成層流体の側壁の温度の急激な変化に対する内部流体の温度変化過程(heat-up)である

この論文では容器が回転していない場合と,速く回転している場合の heat-up を調べる。

詳しい定量的議論に入るまえに,側壁の温度を少し変化させた場合どのような事がおこるかを定性的に考えてみよう。
たとえば側壁の温度が上昇すると壁近くの流体の温度は熱伝導で上昇し,流体は膨張によって軽くなって上昇運動をする。
そのような上昇流のある境界層を浮力層と呼ぶ。 浮力層内では流体に働く浮力は壁による粘性力とつりあうので

(1) $\qquad \alpha g \tilde{T} \sim \nu \tilde{q}_z / \delta^2,$

ここで α は熱膨張率,g は重力加速度,T は基準温度からのずれ,q_z は z 方向の速さ,δ は境界層の厚み,$\tilde{\ }$ は境界層の量をあらわす。 また浮力層内では熱伝導による熱の流入と,鉛直流によ

る熱の流出はつりあうので

(2) $\quad \bar{q}_z \Delta T/H \sim \kappa \bar{T}/\delta^2$,

ここで $\Delta T/H$ は基準状態の温度勾配, κ は熱伝導率である。

(1), (2) から浮力層の厚み δ を求めると

(3) $\quad \delta \sim (\sqrt{\kappa\nu}\, N^{-1})^{1/2} = \sigma^{1/4}(\kappa/N)^{1/2} = H E_N^{1/2}$,

但し N は Brunt-Väisälä 振動数, E_N は Ekman数に対応した量である。

(4) $\quad N \equiv (\alpha g \Delta T/H)^{1/2}, \quad E_N \equiv \sqrt{\kappa\nu}/(H^2 N) = E/(\sigma S)^{1/2}$,

但し S は thermal Rosbby number で $S \equiv \alpha g \Delta T/(H\Omega^2) = (N/\Omega)^2$.

浮力層内の鉛直流は容器内部の非粘性非伝導の流体をすいこみ内部域の流れを誘起する。　連続の式から

(5) $\quad q_z H \sim \bar{q}_z \delta$.

内部流体の鉛直方向の移動は対流効果を持つのである点での温度変化は, t をその time-scale とすると次の式であらわされる.

(6) $\quad T/t \sim q_z \Delta T/H$.

これらの式から t を求めると

(7) $\quad t \sim \sigma^{1/4}(H^2/N\kappa)^{1/2} = N^{-1} E_N^{-1/2}$.

時刻 t 後には内部流体の温度は壁の温度に一致し新しい成層状態が達成される。　非回転流体の heatup time は $\sigma = 1$ のとき N を Ω, E_N を E と読みかえれば一様流体の spin-up time と一致する。

上の議論では暗に容器の非回転を仮定した。　もし回転し

ているとコリオリカの為内部流体は動径方向に自由に動けないので側壁の境界層の影響はその附近に限定される。 側壁の影響を受ける層の厚みをΔrとすると円柱座標をとってr, θ, z方向の力のつりあいを考えると，ρ_Bを基準密度，Pを圧力とし

(8) $\rho_B \Omega q_\theta \sim P/\Delta r$,

(9) $q_\theta / t \sim \Omega q_r$,

(10) $\rho_B \alpha g T \sim P/H$.

さらに連続の式

(11) $q_z/H \sim q_r/\Delta r$,

(12) $\bar{q}_r/\delta \sim q_z/H$,

を用い $q_r \sim \bar{q}_r$, $T \sim \bar{T}$ を考慮すると

(13) $\Delta r \sim \sqrt{S} H$,

(14) $t \sim (\sigma S)^{1/2} N^{-1} E_N^{-1/2}$,

が得られる。 但しΔrが円柱容器の半径Rより大きい時は$\Delta r = R$とおいて，$r_0 = R/H$ とすると次の式を得る。

(15) $t \sim \sigma^{1/2} r_0 N^{-1} E_N^{-1/2}$.

§2. 基礎方程式

我々が用いる基礎方程式は回転系からみた非圧縮性流体のNavier-Stokes 方程式とBoussinesq 近似式で次のように書かれる.

(16) $$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q}\cdot\nabla\mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + g\alpha T\hat{\mathbf{k}} + \alpha T\nabla\left(\frac{\Omega^2}{2}r^2\right) + \nu\nabla^2\mathbf{q},$$

(17) $$\nabla\cdot\mathbf{q} = 0,$$

(18) $$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q}\cdot\nabla T + \frac{\Delta T}{H}q_z = \kappa\nabla^2 T,$$

(19) $$\rho' = -\rho\alpha T,$$

ここで $\mathbf{q}=(q_r, q_\theta, q_z)$, $\hat{\mathbf{k}}$ は Z 方向の単位ベクトル, ρ は平均密度, ρ' は密度のずれ, T は安定成層の温度分布からのずれである。(18)の左辺第三項は安定成層による対流項を別にとり出したものである。 いま遠心力が重力に比べて十分小さいとする ($\Omega^2 R/g \ll 1$) と (16)の右辺第三項の遠心力による浮力は無視できる。 無次元変数 $\mathbf{q}'$ … を次のように定義する.

(20) $$\partial_t = \sqrt{\frac{g\alpha\Delta T}{H}}\,\partial_{t}' = N\partial_{t}', \quad \mathbf{q} = \sqrt{\frac{g\alpha H}{\Delta T}}\,\Delta T_c\,\mathbf{q}', \quad T = \Delta T_c\sqrt{\sigma}\,T',$$
$$P = g\alpha\Delta T_c\,\rho H\sqrt{\sigma}\,P', \quad \nabla = \nabla'/H,$$

但しここで ΔT_c は Heat-up の際の壁の温度の変化巾である。

(20) を (16)~(19) に代入し ′ をおとすと

(21) $$\sigma^{-1/2}\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \varepsilon\mathbf{q}\cdot\nabla\mathbf{q}\right) + 2(\sigma S)^{-1/2}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{q} = -\nabla P + T\hat{\mathbf{k}} + E_N\nabla^2\mathbf{q},$$

(22) $$\nabla\cdot\mathbf{q} = 0,$$

(23) $$\sigma^{1/2}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon\mathbf{q}\cdot\nabla T\right) + q_z = E_N\nabla^2 T,$$

但し $\varepsilon \equiv \Delta T_c/\Delta T$ は非線型性の程度をあらわす。非線型項を無視し $F \equiv (\sigma S)^{-1/2}$ とおき (21)〜(23) を円柱座標でかくと

(24) $$\sigma^{-1/2}\frac{\partial q_r}{\partial t} - 2F q_\theta = -\frac{\partial P}{\partial r} + E_N \mathcal{L} q_r$$

(25) $$\sigma^{-1/2}\frac{\partial q_\theta}{\partial t} + 2F q_r = E_N \mathcal{L} q_\theta$$

(26) $$\sigma^{-1/2}\frac{\partial q_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + T + E_N \nabla^2 q_z$$

(27) $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r q_r) + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

(28) $$\sigma^{1/2}\frac{\partial T}{\partial t} + q_z = E_N \nabla^2 T$$

但し $$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \mathcal{L} = \nabla^2 - \frac{1}{r^2}.$$

流れ函数 ψ を次のように定義すると (27) は自働的に満される。

(29) $$q_r = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad q_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi).$$

(29) を (24)〜(28) に代入し (24) と (26) から P を消去し、さらに次のような scale 変換を行い

(30) $$t = \sigma^{1/2} E_N^{-1/2} t^*, \qquad \psi = E_N^{1/2} \psi^*,$$

そして * をとると

(31) $$E_N\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sigma E_N^{1/2}\mathcal{L}\right)\mathcal{L}\psi - 2F\sigma\frac{\partial q_\theta}{\partial z} + \sigma\frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

(32) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sigma E_N^{1/2}\mathcal{L}\right) q_\theta + 2F\sigma\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

(33) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}-E_N^{1/2}\nabla^2\right)T-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi)=0 \; .$$

F=0とおけば非回転の式が得られる。

初期条件　$\psi=q_\theta=T=0$,　$t\leq 0$,

境界条件　$\psi=\partial\psi/\partial z=q_\theta=0$, $T=\Delta T_c(\delta)$ for $z=\delta$, $0\leq r<r_0$

　　　　　$\psi=\partial\psi/\partial r=q_\theta=0$　$T=\Delta T_c(z)$ for $0<z<1$, $r=r_0$　　$t>0$

ここで $\delta=0$ or 1, $\Delta T_c(z)$ は側壁の温度変化量である。　次の§3 で F=0 の場合を §4 で F=O(1) の場合も調べる。

§3.　非回転の場合*

変数を内部成分と浮力層成分の和としてあらわす.

(34) $$T=T_I+\bar{T}\;,\quad \psi=\psi_I+\bar{\psi}$$

そしてそれぞれを次のように展開する.

(35) $$T_I=T_I^{(0)}+E_N^{1/2}T_I^{(1)}+E_N^{1/4}T_I^{(2)}+\cdots,\ \cdots .$$

内部非粘性非伝導域

(34),(35) を (31)~(33) に代入し, F=0 とおいて,さらに 0 次項のみをとると

(36) $$\frac{\partial T_I^{(0)}}{\partial r}=0\;,\qquad \frac{\partial T_I^{(0)}}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi_I^{(0)}) \; .$$

これを解くと

(37) $$T_I^{(0)}=T_W^{(0)}(z,t)\;,\quad \psi_I^{(0)}=\psi_W^{(0)}(z,t)\,r/r_0 \; .$$

---

* この場合は Sakurai & Matsuda (1972) により調べられた。

浮力層域

§1 で浮力層の厚みは$E_N^{1/2}$である事が知れているので

$$r = r_0 - E_N^{1/2}\beta$$

で浮力層内の stretched variable βを導入する。

(38) $$\frac{\partial^4 \bar{\Psi}^{(0)}}{\partial \beta^4} + \frac{\partial \bar{T}^{(0)}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}^{(0)}}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}^{(0)}}{\partial \beta} = 0.$$

これらを次の境界条件のもとに解く。

(39) $$\Psi^{(0)} (= \Psi_I^{(0)} + \bar{\Psi}^{(0)}) = 0, \quad \partial \Psi^{(0)}/\partial r = 0, \quad T^{(0)} (= T_I^{(0)} + \bar{T}^{(0)}) = \Delta T_c(z) \quad \text{at } r = r_0$$

(38)の解は

(40) $$\bar{\Psi}^{(0)} = -\Psi_w^{(0)} e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \left[\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\beta}{\sqrt{2}} \right],$$

(41) $$\bar{T}^{(0)} = \sqrt{2}\, \Psi_w^{(0)} e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}.$$

温度に対する側壁の境界条件は結局次のようになる。

(42) $$T_w^{(0)} + \sqrt{2}\, \Psi_w^{(0)} = \Delta T_c(z).$$

(36), (37), (42)から$\Psi_w^{(0)}$のみたすべき式は

(43) $$\frac{\partial \Psi_w^{(0)}}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}}{r_0} \Psi_w^{(0)} = 0.$$

$t=0$ で $T_w^{(0)}(z,0) = 0$ だから $\Psi_w^{(0)}$ の初期条件は $\Psi_w^{(0)}(z,0) = \Delta T_c(z)/\sqrt{2}$。

結局求める解は

(44) $$\Psi_I^{(0)} = \frac{\Delta T_c(z)}{\sqrt{2}} \frac{r}{r_0} e^{-\frac{\sqrt{2}}{r_0}t}, \quad T_I^{(0)} = \Delta T_c(z)\left[1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{r_0}t}\right].$$

これらの解は上下底での境界条件を満足しないので、TとΨの接続は上下底にそう適当な境界層を通じて達成される。

§4. 回転の速い場合*

ここでは $F=O(1)$ つまり $\sqrt{\sigma}N\sim\Omega$ の場合を考える。
内部非粘性非伝導域の解を $E_N^{1/4}$ で展開し0次項のみをとると

$$2F\frac{\partial q_\theta^{(0)}}{\partial z}-\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}=0 \quad, \tag{45}$$

$$\frac{\partial q_\theta^{(0)}}{\partial t}+2F\sigma\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}=0 \quad, \tag{46}$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi^{(0)})=0 \quad, \tag{47}$$

内部域を示す添字Iははぶいた。

側壁の境界層

側壁にそう境界層は $F=O(1)$ の場合, $E_N^{1/2}$ の厚さの浮力層と $E_N^{1/4}$ の拡散境界層がある。 次の式で $E_N^{1/4}$ 層, $E_N^{1/2}$ 層内での stretched variable α,β を定義する。

$$r=r_0-E_N^{1/4}\alpha \ , \quad r=r_0-E_N^{1/2}\beta \ . \tag{48}$$

側壁の境界層で変数をつぎのように展開する。

$$\begin{aligned}\psi &= \psi^{(0)}(r,z)+E_N^{1/4}\psi^{(1)}(r,z)+\cdots\\ &\quad +\bar{\Psi}^{(0)}(\alpha,z)+E_N^{1/4}\bar{\Psi}^{(1)}(\alpha,z)+\cdots\\ &\quad +\bar{\bar{\Psi}}^{(0)}(\beta,z)+E_N^{1/4}\bar{\bar{\Psi}}^{(1)}(\beta,z)+\cdots\end{aligned} \tag{49}$$

これらを (31)~(33)に代入し $\bar{\Psi}^{(0)}(\alpha\to\infty)=0$, $\bar{\bar{\Psi}}^{(0)}(\beta\to\infty)=0$ などに注意すると境界層方程式が得られる。 0でないものだけ書くと

---

* この場合少し異った定式化が Matsuda & Sakurai (1972) により行なわれている。

(50) $$\frac{\partial \bar{q}_\theta^{(0)}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \bar{q}_\theta^{(0)}}{\partial \alpha^2}$$

(51) $$\frac{\partial^4 \bar{\bar{\psi}}^{(0)}}{\partial \beta^4} + \frac{\partial \bar{\bar{T}}^{(0)}}{\partial \beta} = 0$$

(52) $$\frac{\partial^2 \bar{\bar{T}}^{(0)}}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \bar{\bar{\psi}}^{(0)}}{\partial \beta} = 0$$

(50) の解 $\bar{q}_\theta^{(0)}$ は内部解に影響を与えない。(51), (52) の解はすでに§3で与えられているのでそれを用いると側壁での温度に対する境界条件が決定される。

(53) $$T^{(0)} + \sqrt{2}\,\psi^{(0)} = \Delta T_c(Z) \quad \text{on } r = r_0,\ 0<Z<1.$$

水平壁の境界層

水平壁にそっては厚さ $E_N^{1/4}$ の拡散境界層の他に厚さ $E^{1/2}$ の Ekman 層があるが $E_N = FE$ だから $F = O(1)$ のとき $E_N^{1/2}$ 層と考えて良い。

(54) $$Z_j = j + (-1)^j E_N^{1/4} \xi_j, \quad Z_j = j + (-1)^j E_N^{1/2} \eta_j \quad 但し\ j = 0, 1$$

で拡散境界層, Ekman 層の stretched variable ξ_j, η_j を定義する。

(55) $$\begin{aligned} \psi_j &= \psi_j^{(0)}(r, Z) + E_N^{1/4} \psi_j^{(1)}(r, Z) + \cdots \\ &\quad + \hat{\psi}^{(0)}(r, \xi_j) + E_N^{1/4} \hat{\psi}_j^{(1)}(r, \xi_j) + \cdots \\ &\quad + \hat{\hat{\psi}}^{(0)}(r, \eta_j) + E_N^{1/4} \hat{\hat{\psi}}^{(1)}(r, \eta_j) + \cdots \end{aligned}$$

のように変数を展開し (31)〜(33) に代入, 0 次項のみをとると

(56) $$\frac{\partial \hat{T}_j^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \hat{T}_j^{(0)}}{\partial \xi_j^2}$$

(57) $$\frac{\partial^4 \hat{\hat{\psi}}_j^{(0)}}{\partial \eta_j^4} + 2F(-1)^j \frac{\partial \hat{\hat{q}}_{\theta j}^{(0)}}{\partial \eta_j} = 0$$

(58) $$\frac{\partial^2 \hat{q}^{(0)}_{\theta j}}{\partial \eta_j^2} - 2F(-1)^j \frac{\partial \hat{\psi}^{(0)}_j}{\partial \eta_j} = 0$$

$\hat{T}^{(0)}_j$は内部解に影響を与えない。 (57)(58)を適当な境界条件で解くと

(59) $$\hat{\psi}^{(0)}_j = -\frac{1+i}{2}\psi^{(0)}\left[e^{-\sqrt{F}(1+i)\eta_j} - i e^{-\sqrt{F}(1-i)\eta_j}\right],$$

(60) $$\hat{q}^{(0)}_{\theta j} = (-1)^j \sqrt{F}\,\psi^{(0)}\left[e^{-\sqrt{F}(1+i)\eta_j} + e^{-\sqrt{F}(1-i)\eta_j}\right].$$

内部解$q^{(0)}_\theta$に対する境界条件は(60)を用いて

(61) $$q^{(0)}_\theta + 2(-1)^j \sqrt{F}\,\psi^{(0)} = 0 .$$

(45)〜(47) を解く為にLaplace変換を行う。 $\psi^{(0)}, q^{(0)}_\theta, T^{(0)}$のtに関してLaplace変換した量を$\Psi, Q, \mathcal{T}$であらわすと(45)〜(47)は

(62) $$S\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi)\right) + 4\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$$

(63) $$Q = -\frac{2F\sigma}{\tau}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

(64) $$\mathcal{T} = \frac{1}{r\tau}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi)$$

となる。 境界条件(53),(61)は次のようになる。

(65) $$\tau\sqrt{2}\,\Psi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi) = \Delta T_c \quad \text{on } 0<z<1,\ r=r_0$$

(66) $$\tau\Psi - (-1)^j \sqrt{F}\,\sigma\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \qquad \text{on } z=j,\ 0\le r<r_0$$

(62)の解を浮力層によって駆動される部分Ψ_Bと、その反作用としてのEkman層による流れΨ_Eとに分ける。 Ψ_Eは(65)で$\Delta T_c = 0$とした時に満足される解である(Sakurai, Clark & Clark 1971a)。

(67) $$\Psi = \Psi_E + \Psi_B ,$$

(68) $$\Psi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^s (\sinh \mu_n z + \sinh \mu_n (1-z)) + A_n^a (\sinh \mu_n z - \sinh \mu_n (1-z)) \right] J_1(\mu_n \hat{r}),$$

(69) $$\Psi_B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\pi z \; I_1(n\pi \hat{r}) .$$

但しここで $\hat{r} \equiv 2r/\sqrt{5}$, J_n, I_nはそれぞれn次の Bessel, 変形 Bessel 関数である。(68)でA_n^s, A_n^aはそれぞれ$z=\frac{1}{2}$に関して対称, 反対称部分の係数である。(69)でnが奇数の時Ψ_Bは反対称, 偶数の時対称である。Ψ_Eを(65)に代入し$\Delta T_c=0$とおくと固有値μ_nを求める方程式がでる。

(70) $$J_1(\mu_n \hat{r}_0) + \frac{\sqrt{2}\mu_n}{\tau\sqrt{5}} J_0(\mu_n \hat{r}_0) = 0 .$$

Ψ_Bを(65)に代入するとB_nが求まる。

(71) $$B_n = \frac{b_n}{\sqrt{2} I_1(n\pi \hat{r}_0)} \left[\tau + \sqrt{\frac{2}{5}}\, n\pi \frac{I_0(n\pi \hat{r}_0)}{I_1(n\pi \hat{r}_0)} \right]^{-1} ,$$

但しここでb_nはΔT_cの Fourier 成分で

(72) $$\Delta T_c(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\pi z .$$

(68), (69)を(66)へ代入すればA_nが求まるがΨ_Eは Laplace 逆変換が困難なのでここでは結果を省略する。Ψ_EはΨ_Bの結果として生じるものであるので$t \sim 0$と$t \to \infty$ではΨ_Eの寄与は無い。その事はA_nの形からも分る。(69), (71)を(63), (64)に代入して$\tau \to 0$の極限を調べる事により$\Psi_B^{(0)}, T^{(0)}$の$t \to \infty$での漸近形を求める事ができる。

(73) $$\lim_{t\to\infty} q_\theta^{(10)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma}\, I_1(n\pi\hat{r})}{I_0(n\pi\hat{r}_0)} b_n \sin n\pi z \ ,$$

(74) $$\lim_{t\to\infty} T^{(10)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(n\pi\hat{r})}{I_0(n\pi\hat{r}_0)} b_n \cos n\pi z \ .$$

$\tau\to\infty$を調べる事により$\psi^{(10)}$の$t\sim 0$での形も決定できる。

(75) $$\psi^{(10)}(t\sim 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(n\pi\hat{r})}{I_1(n\pi\hat{r}_0)} b_n \cos n\pi z \, \exp\left[-\sqrt{\frac{2}{S}}\, n\pi \frac{I_0(n\pi\hat{r}_0)}{I_1(n\pi\hat{r}_0)}\, t\right].$$

この式から heat-up time t_hは次のようになる。 次元をつけて

(76) $$t_h \sim \frac{I_1(n\pi\hat{r}_0)}{I_0(n\pi\hat{r}_0)} \sqrt{\sigma S}\ N^{-1} E_N^{-1/2} .$$

これは$r_0 \gg S$ のとき(14)に$r_0 \ll \sqrt{S}$ のとき(15)に一致するので§1の定性的議論が正しかった事が分る。 $\Delta T_c(z)$の対称部分(n偶数)には$T^{(0)}$, $\psi_B^{(10)}$の対称部分, $q_\theta^{(10)}$の反対称部分が$\Delta T_c(z)$の反対称部分にはその逆が対応する事が得られた式の形から分る。 $\psi_E^{(10)}$はしかし$\psi_B^{(10)}$と反対の対称性を示す事が予想される。

§5 議論

§3の結果から分るように非回転の場合の heat-up の漸近状態では流体の温度分布は壁のそれと一致する。 しかし§4でみるように回転があるとr方向の運動がさまたげられ流体の温度は壁附近のみが壁と一致する。 また回転のある heatupの特徴は流体が容器に対してspin-upする事である。

この論文では $F=0$ と $F=O(1)$ の場合のみがとり扱われたが $F=E_N^n$ として $n>\frac{1}{3}$ の場合は $F=0$，$n<\frac{1}{4}$ の場合は $F=O(1)$ の解析でよいが $\frac{1}{4}<n<\frac{1}{3}$ では水平壁の境界層が三重構造になり別のとりあつかいが必要であろう。しかし本質的な結果はこの論文の範囲でつくされている。

謝辞　この論文の多くの部分は桜井健郎教授との共同研究に負っているのでここに感謝の意を表明します。

文　献

Greenspan, H.P. 1967 Theory of Rotating Fluids. Cambridge Univ. Press. 2.

Greenspan, H.P & Howard, L.N. 1963 J. Fluid Mech. 17, 385.

Holton, J.R. 1965 J. Atmos. Sci. 22, 402.

Matsuda, T. & Sakurai, T. 1972 submitted to J. Fluid Mech.

Pedlosky, J. 1967 J. Fluid Mech. 28, 463.

Sakurai, T. 1969a J. Phys. Soc. Japan 26, 840.

Sakurai, T. 1969b J. Fluid Mech. 37, 689.

Sakurai, T., Clark, A. Jr. & Clark, P.A. 1971a J. Phys. Soc. Japan 30, 1517.

Sakurai, T., Clark, A. Jr. & Clark, P.A. 1971b J. Fluid Mech. 49, 753

Sakurai, T., & Matsuda, T. 1972 J. Fluid Mech to be published.

Veronis, G. 1967a Tellus, 19, 326.

Veronis, G. 1967b Tellus, 19, 620

Walin, G. 1969 J. Fluid Mech. 36, 289.