数理解析研究所講究録
第188巻 1973年 1-174



# Introduction

1. 解析学においては，考察の対象とする函数族を，明確に認識し定式化することが重要である。そして，問題の解決にあたっては，できるだけ広い関数のクラスから，自らの目的に応じて必要なものを選択し駆使することとなる。従って我々が望むのは，できるだけ色々な操作が自由にでき，かつ"なるべく一般な函数"である。しかしながら，通常の函数族を拡張したものにおいて，微分が自由にできるということを要請するかぎり，Dirac の $\delta$ 函数に相当するものの存在と，いつでも積が矛盾なく定義できるということとは，背反するものであることをも我々は知っている。*L. Schwartz* は，S. L. Sobolev, K. Friedrichs, *S. Bochner* などの先駆的理論を集成し，1950年"*Théorie des Distributions*"を著し，その有効性はただちに認められるところとなった。そこにおける函数概念の拡張は，「位相の強い小さな函数空間の双対空間は，十分大きい」ということに基づいており，基本的演算や位相は，双対空間であることから自然に定っている。だが，その基礎空間として $\mathcal{D}$ という無限回微分可能で *compact support* な函数の全体をもってくるということは，何かしら *artificial* な感をまぬがれない。双対空間的思考

法による適当な函数空間の設定は，その後．Beurling，Roumieu 等による ultradistribution，ソ連における一般函数論などがあらわれた。[1)]

しかし，1958年，そのようなものとは全く異なる立場から函数概念の拡張をめざした理論が出現した。それは，distribution 等を含むものであり，色々な分野に広大な視野を与えるものであった。それが「佐藤超函数－Hyperfunction」である。Hyperfunction は正則函数の"ある意味での境界値"として定義され，distribution より自然な存在ということができる。特にきわだった性質は，『任意の開集合上の hyperfunction は，必らず全空間の hyperfunction の制限である』という点にある。これは，色々な応用において本質的な役割をはたすものである。ここにおいて，複素変数函数論があたかもその復権を主張するがごとく介入した，否，複素函数により定義され，それが hyperfunction の本質的特性であるということは注目に値する。しかしながら，一般の函数を正則函数の境界値として表わすという考えは，一変数の場合古い歴史を持っている。

2. 連続函数はだいたいの点では微分可能であろう，と楽観的であった19世紀において，厳密を旨とする C.Weierstrass は 1861年[2)]「連続であるがいたるところ微分できない函数」

1) 以上の歴史については Bibliography II. 2. を参照せよ

2) ただし公表されたのは 1875年.

の例を作った。即ち $0<a<1$, $b$は1より大きな奇数として

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos b^k \pi x \qquad \text{①}$$

彼は①が $$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi \qquad \text{②}$$

ならばたしかにその性質をもつことを示した。①を形式的に項別微分すれば $-\pi\sum(ab)^k \sin b^k \pi x$ であり，②は $ab \geqq 1$ でよいのではないかというのが当然問題となる。Hardy は 1916 年，"新しい方法"を用いることにより，①が微分係数をもたない条件を，最終的ではないにしろ，それに近い結果を出した。即ち，（cf.〔2; I〕）

(i) $ab \geqq 1$ のとき，どの点においても $F(x)$ は有限な微係数をもたない.

(ii) $ab > 1$ のとき，$\rho = \log\left(\frac{1}{a}\right)/\log b$ (i.e. $a = b^{-\rho}$, $0<\rho<1$) とおくと $F(x)$ は $\rho$-次 Hölder であるが[1] いかなる点においても $(\rho+\varepsilon)$次 Hölder ではない.

ことを示した。我々に興味があるのはその証明の方法である。

$a = b^{-\rho}$, $(0<\rho\leqq 1)$, $\pi x = \theta$ とおくと，①は $\theta$ の Fourier 級数となり（以下は $0<\rho<1$ の場合のみ論ずる）それは

---

1) 即ち $F(x+h) - F(x) = O(|h|^\rho)$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b^{-\rho k} z^{b^k} \qquad |z| \leqq 1 \qquad ③$$

の $|z|=1$ での実部となる。実際，③は $|z| \leqq 1$ で連続で $|z|<1$ で正則であり，$F(x) = \mathrm{Re}\, f(e^{i\pi x})$ ととらえることができる。そして彼は

「$F(x)$ が $\rho$ 次 Hölder だがいかなる $\varepsilon$ についても，又いかなる点においても $(\rho+\varepsilon)$ 次 Hölder でない」

が $f$ の境界での挙動で判定されること，即ち

「$$\frac{df}{dz}(re^{i\theta}) = O((1-r)^{\rho-1})$$
$$\neq O((1-r)^{\rho+\varepsilon-1}) \qquad \varepsilon>0$$」

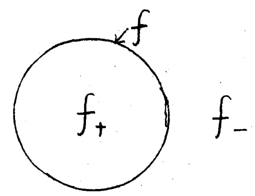
と同値であることを示した。

この様な方法により，Fourier Analysis の Complex Method は始められ，Kolmogorov, M.Riesz, Zygmund 等により，色々と深い結果が出された。

単位円上の函数 $f(e^{i\theta})$ が Fourier 展開されているとせよ．

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$$

$$\begin{cases} f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ f_-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n \end{cases}$$



とおけば $f_+$ は $|z|<1$ で，$f_-$ は $|z|>1$ で収束する。[1] よって
$z \to e^{i\theta}$ のときに境界値があれば

$$f(e^{i\theta}) = f_+(e^{i\theta}) - f_-(e^{i\theta}) \quad \text{である。}$$

又，$\tilde{f}(e^{i\theta}) = f_+(e^{i\theta}) + f_-(e^{i\theta})$ は無限区間における Hilbert 変換に対応するものである。

逆に，$|z|<1$ で正則な函数

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

が与えられ $0 \leqq r < 1$ に対し

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta \leqq M \qquad (p>0)$$

となるとき $\varphi$ は $H^p$ に属するという。

$(p>1)$ のとき $\lim_{r\to 1} \varphi(re^{i\theta})$ は a.e. 存在して $L^p$ に属する。$p=1$ の場合，$\varphi(e^{i\theta})$ の実部と虚部が，共に有界変動函数の Fourier 級数になっているならば，$\varphi(e^{i\theta})$ は実は絶対連続であり，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$ である，等々色々な事実が成立する。

3. J. Hadamard は双曲型偏微分方程式の研究にあたり，

---

1) $f \in L^1$ なら $c_n = o(1)$ 　$L^2$ なら $\sum |c_n|^2 < +\infty$
$\alpha$ 次 Hölder なら $c_n = O(|n|^{-\alpha})$ 　有界変動なら $|c_n| \leqq \dfrac{M}{|n|}$
etc. であり，ともかくもその範囲で収束する。

"Partie-finie" という概念を導入した。（cf.〔2；2〕）

$f(x)$ が $(a, b)$ では積分可能でないが $\forall \varepsilon > 0$,

$(a+\varepsilon, b)$ では積分可能であって，

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}} + g(x) \qquad \left( \begin{array}{l} \mathrm{Re}\,\lambda_\nu > 1,\ \lambda_\nu \notin \mathbb{N} \\ g(x) \text{ は } (a, b) \text{ で積分可能} \end{array} \right)$$

とすると $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \sum \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_\nu - 1} + F(\varepsilon)$ とかくとき有限な $\displaystyle\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(\varepsilon)$ が存在する．それを $\mathrm{Pf}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書く．即ち

$$\mathrm{Pf}\int_a^b f(x)\,dx = -\sum_\nu \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & x > 0 \quad (\text{主値}) \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \text{は } \mathrm{Re}\,\alpha > -1$$

なら $L_{loc}^1$ であり問題ないが，そうでなければ，$x=0$ における解釈を与えねばならない．たとえば，

$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} x_+^{\alpha-1}\,dx$ は $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ のとき classical に意味をもつ．そこで $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ のときも上の考えに従えば

$$\int_\varepsilon^\infty \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots \pm \frac{x^n}{n!}\right) x_+^{\alpha-1}\,dx + \int_\varepsilon^\infty \left(e^{-x} - 1 + x - \mp \frac{x^n}{n!}\right) x_+^{\alpha-1}\,dx$$

$$= \left(\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \cdots \pm \frac{\varepsilon^{\alpha+n}}{n!(\alpha+n)}\right) + (\text{convergent term})$$

（ただし $n$ は $\mathrm{Re}(\alpha+n)\geqq -1$ となる初めての $n$）

とかき 第一項を $0$ とおくことになる．これは結局

$\int_0^1 x_+^\alpha\,dx=\dfrac{1}{\alpha+1}$ をみとめるのと同じことである。それを
$(\alpha\neq -1)$

次のように考えてみよう．

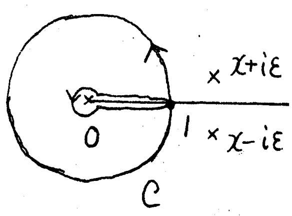
$$\varphi(z)=\frac{-1}{2i\sin\pi\alpha}(-z)^\alpha\qquad(\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

とおき，$\mathbb{C}$ 平面で $[0,\infty)$ にスリットを入れた残りで主値をとることにする。まず，容易にわかるように

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi(x+i\varepsilon)-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi(x-i\varepsilon)=\begin{cases}x^\alpha & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

従って $\varphi(z)$ は実軸での“境界値の差”として $x_+^\alpha$ をもっていると考えられる．更に単位円を $1$ から正に一まわりする道を $C$ とすれば

$$-\int_C\varphi(z)\,dz=\frac{1}{2i\sin\pi\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}(-i)e^{i(\alpha+1)\theta}d\theta\qquad(z=-e^{i\theta})$$




$$=\frac{1}{\alpha+1}$$

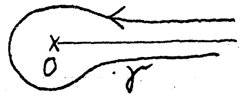
ここで $C$ を déformer すれば 記号的に

$$-\int_C\varphi(z)\,dz=\int_0^1(\varphi(x+i0)-\varphi(x-i0))\,dx$$

であり，前の式とあわせ考えれば，“$\varphi(z)$ の境界値の差”は

" partie finie を考慮した $x_+^\alpha$ " であると考えうる。実際，$\Gamma$ 函数に対する Hankel の公式（$\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0, -1, -2 \cdots$）

$$\Gamma(\alpha) = \frac{-1}{2i \sin \pi\alpha} \int_\gamma e^{-t}(-t)^{\alpha-1} dt$$

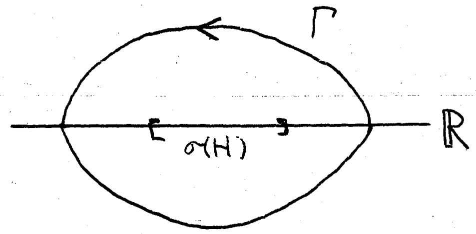



はこのことをよくあらわしているといえよう。

4. T. Carleman も又興味ある研究を行なっている。

Hilbert space における，self-adjoint operator $H$ のスペクトル分解を $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda)$ とし，スペクトルを $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$ とおく。

$\sigma(H)$ の $\mathbb{C}$ における適当な近傍で正則な函数 $f(z)$ に対して，作用素の函数 $f(H)$ は Dunford integral あるいは spectral integral により与えられる。




（$\Gamma$ は $\sigma(H)$ を正の向きに一周する curve）

$$f(H) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z-H)^{-1} dz$$

$$f(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, dE(\lambda)$$

ここで Dunford integral における $\Gamma$ を déformer して $\mathbb{R}$ の上岸と下岸を走ると考えれば

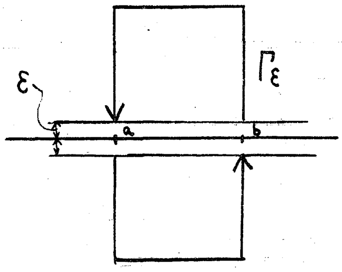
$$f(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\underbrace{\frac{-1}{2\pi i}\left((x+i0-H)^{-1}-(x-i0-H)^{-1}\right)dx}$$

従って，└─┘の部分が $dE(x)$ であると考えられる。実際

$$\frac{1}{2}(E(\beta)+E(\beta-0)) - \frac{1}{2}(E(\alpha)+E(\alpha-0))$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{-1}{2\pi i}\left(\int_{\alpha}^{\beta}((x+i\varepsilon-H)^{-1}-(x-i\varepsilon-H)^{-1})dx\right)$$

これは又，$\Gamma_\varepsilon$ を右図のようにとった時




$$\int_a^b dE(\lambda) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}(z-H)^{-1}dz$$

であるといってもよい。

即ち，$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ における resolvent $(z-H)^{-1}$ がわかればスペクトル分解がわかる。そして，具体的にスペクトル分解を計算するにはこれは最も有効な方法である。有名な，Weyl - Stone - Titchmarch - Kodaira の展開定理も，これに基づくものであることを思えばよい。

実変数の函数を，"複素函数の境界値"としてとらえる立場は，上の様に色々な方面にあらわれ，それぞれ有効に用いられる。この立場を数学的に統一した観点から眺めるため，厳密な定義を与え，それに従って理論をくみ立てていくことが，以下の目的である。

# 才I章　一変数函数論補遺

## §1. Duality theorem

### 1. 函数空间 $\mathcal{O}(V)$, $\mathcal{O}_c(L)$, $\mathcal{O}(K)$.

i) $V$: open set ($\subset \mathbb{C}$)

$\mathcal{O}(V)$: $V$上の一価正則函数全体のなす ring であり，任意 compact 上の一様収束により与えられる位相をもつ。詳しくいえば，$K_1 \Subset K_2 \Subset \cdots \subset V$ [1] $\bigcup K_n = V$ $K_n$: compact in $V$ という列をとり，$f \in \mathcal{O}(V)$ に対して，$p_n(f) = \sup_{K_n} |f(z)|$ なるセミノルム系を与えたものである。これにより $\mathcal{O}(V)$ は Fréchet space であるが [2]，nuclear と呼ばれる性質もそなえている。

ii) $L$: compact set ($\subset \mathbb{C}$)

$\mathcal{O}_c(L) \equiv \{ f \in C^0(L) \mid f \in \mathcal{O}(L^0) \}$

norm $\|f\|_{\mathcal{O}_c(L)} = \sup_L |f(z)|$ により Banach space である。

---

1) $A \Subset B$ とは $A \subset B^\circ$（$B$の内点）を意味する。

2) ii)の記号を用いれば，$\mathcal{O}(V) = \varprojlim \mathcal{O}_c(K_n)$ であり，$\mathcal{O}(V)$ は FS-space である.（Appendix 1 参照.）

iii) $K$: compact set ($\subset \mathbb{C}$)

$$\mathcal{O}(K) \equiv \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{O}(U) \qquad (K \subset U \text{ open set})$$

位相は Fréchet space $\mathcal{O}(U)$ の inductive limit locally convex linear topology[1] を与える。位相の考慮には，次の定式化が便利である。$K_1 \Supset K_2 \Supset \cdots \Supset K$, $\cap K_n = K$, $K_n = \overline{K_n^{\circ}}$ はコンパクト，かつ $K_n^{\circ}$ の各成分は $K$ と交わるとすれば $\mathcal{O}(K) = \varinjlim \mathcal{O}_c(K_n)$。位相は，位相空間の帰納極限として考えたものと，局所凸線型位相空間の帰納極限として考えたものが一致し，もとの定義に等しい。それは $\mathcal{O}_c(K_n) \to \mathcal{O}_c(K_{n+1})$ が injective compact map であること（Montel の定理）より従う。$\mathcal{O}(K)$ は DFS-space である[2]。

集合として，$\mathcal{O}(K) \supset \mathcal{O}_c(K_n)$ $\mathcal{O}(K) = \cup \mathcal{O}_c(K_n)$ であるが，その意味において，次の命題が成立する。[3]

---

1) 即ち，$^{\forall}U$, $\varphi_U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(K)$ を連続にする最強の局所凸位相。いいかえれば，$\mathcal{O}(K)$ 上の seminorm $p$ は，すべての $U$ について $p \circ \varphi_U$ が $\mathcal{O}(U)$ 上の連続な seminorm になるとき，そのときに限り連続とする。

2) Appendix 1. 参照

3) これは DFS-space の一般論より従う。Ap. 1, Prop. 4.

Prop. 1.1. ① $f_n \to f$ in $\mathcal{O}(K) \Leftrightarrow \exists m,\ \{f, f_1, \cdots, f_n, \cdots\} \subset \mathcal{O}_c(K_m)$

$f_n \to f$ in $\mathcal{O}_c(K_m)$

② $B$: *bounded* in $\mathcal{O}(K) \Longleftrightarrow \exists m$, $B$ *bdd* in $\mathcal{O}_c(K_m)$

③ $S$: 線型位相空間　$\varphi$: 連続 $\Leftrightarrow \forall n, \varphi|_{\mathcal{O}_c(K_n)}$ 連続

$\varphi$: $\mathcal{O}(K) \to S$ *linear map*

2. Eが局所凸線型空間のとき，その *dual space*，すなわちE上の連続線型汎函数全体の空間を$E'$で表わす。$x \in E$, $x' \in E'$のとき，$\langle x', x \rangle$でもってそれらの内積を表わす。$E'$にEの各有界集合上一様収束の位相を与える。

Th. 1.2. (J. e. Silva, Köthe, Grothendieck)

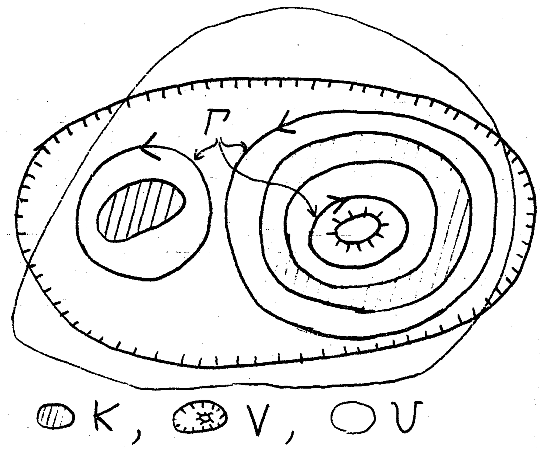
$K$ compact $\subset V$ open $\subset \mathbb{C}$

$\Rightarrow\ \mathcal{O}(K)' \approx \mathcal{O}(V \setminus K)/\mathcal{O}(V)$　（位相をこめて）

ここで *duality* は具体的に次のように与えられる。

$\mathcal{O}(K) \ni g \Rightarrow g \in \mathcal{O}(U)\ \exists U \supset K$.

$\mathcal{O}(V \setminus K) \ni \varphi$，$\varphi$の属する $\mathcal{O}(V \setminus K)/\mathcal{O}(V)$ の class を $[\varphi]$ と書く。$\Gamma$を$U \cap (V \setminus K)$



の中にあり，Kをひとまわりする closed curve[1] の任意のものとする．

$$\langle [\varphi], g \rangle = -\int_\Gamma \varphi(z) g(z) dz \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

Proof) 4段階に分ける．

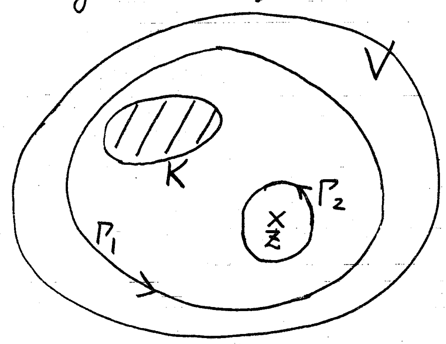
(1) (1.1) が $\Gamma$, 代表元 $\varphi$, のとり方によらぬことは明らかである．$\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus K)$ を与えれば，(1.1) により $\mathcal{O}(K)$ 上の函数が生じる．その連続性は Prop. 1.1 ③ により，各 $\mathcal{O}_c(K_n)$ で確かめればよいが，$n$ を固定したとき，$\mathcal{O}_c(K_n)$ の元に対しては，$\Gamma$ が一定に選べることより明らかである。従って map $\eta : \mathcal{O}(V \setminus K)/\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(K)'$ が作れた。

(2) $\eta$ が単射であることを示す。それには次の事を示せばよい．

$\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus K)$, $\int_\Gamma \varphi(z) g(z) dz = 0 \quad {}^\forall g \in \mathcal{O}(K) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{O}(V)$

$\Gamma_1$ : $V \setminus K$ 中の，Kを正の向きにひとまわりする道

$\Delta$ : $\Gamma_1$ で囲まれた open set（$\Gamma_1$ の左側）




1) 例えば，$d = \mathrm{dist}(K, (U \cap V)^c)$ とし，Kの半径 $d/2$ の disc による有限被覆をとり，その境界に，Kを左にみるように向きづける．

$\Gamma_2$： $z \in \Delta \setminus K$ を正の向きにひとまわりする $\Delta \setminus K$ の道。

$$\psi(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \varphi(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}d\zeta$$ とおけば，$\psi \in \mathcal{O}(\Delta)$

である。

$1/\zeta - z$ は，$\Gamma_1 - \Gamma_2$ で囲まれた closed set のある近傍で正則であるから，$\varphi$ に関する仮定により

$$\int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} \varphi(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}d\zeta = 0$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}$$

$$= \varphi(z) \qquad (\because \text{Cauchy の積分公式})$$

$\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus K)$, $\psi \in \mathcal{O}(\Delta)$, $\varphi = \psi$ on $\Delta \setminus K$ より $\varphi \in \mathcal{O}(V)$.

(3) $\eta$ が全射であることを示す.

$\Phi \in \mathcal{O}(K)'$ をとり，

$$\varphi(z) \equiv \frac{-1}{2\pi i}\left\langle \Phi_t, \frac{1}{z-t} \right\rangle \quad z \in \mathbb{C} \setminus K$$ とおく。

$$\frac{1}{z_n - z_0}\left(\frac{1}{z_n - t} - \frac{1}{z_0 - t}\right) \xrightarrow[z_n \to z_0]{} -\frac{1}{(z_0 - t)^2} \text{ in } \mathcal{O}(K)^{1)}$$

より $\varphi(z)$ は微分可能であり $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$。

$g \in \mathcal{O}(K)$ をとり，$g \in \mathcal{O}(U)$ $U \supset K$ であるとする。

---

1) Prop. 1.1 ① に留意せよ.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z)\frac{1}{z-t}\,dz \qquad t \in U$$

ここで右辺は，Riemann 和の $\mathcal{O}(K)$ で収束したもの[1]と考えてよい。

$$\begin{aligned}\langle \Phi_t,\, g(t)\rangle &= \left\langle \Phi_t,\, \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z)\frac{1}{z-t}\,dz\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left\langle \Phi_t,\, \frac{1}{z-t}\right\rangle g(z)\,dz \\ &\qquad\qquad (\text{直前に述べた理由による}) \\ &= -\int_{\Gamma} \varphi(z)\, g(z)\,dz\end{aligned}$$

(4) 以上により $\eta$ が continuous bijective map であることがわかった。$\eta^{-1}$ の連続性がわかればよい。$\mathcal{O}(K)'$ は DFS-space の dual として FS-space 特に Fréchet, $\mathcal{O}(V\setminus K)/\mathcal{O}(V)$ も Fréchet の商空間として Fréchet. よって，Banach の可逆定理[2]により，$\eta$ は bicontinuous である。 ∎

---

1) Prop. 1.1 ① に留意せよ

2) Banach の可逆定理とは，“E, $E_1$ : Fréchet 空間, $u$ ; $E \to E_1$ bijective continuous linear map ⇒ $u$ : bicontinuous”

## §2. Runge's th., Mittag-Leffer's th.

### 1. Runge's theorem

Th. 1.3. (Runge's th. for compact pairs)

$K \subset L$ compact sets in $\mathbb{C}$

$\mathcal{O}(L)$ dense in $\mathcal{O}(K)$

$\Longleftrightarrow$ "$\mathbb{C} \setminus K$ の各成分が $\mathbb{C} \setminus L$ と交わる" .... (1.2)

特に，$K \subset\subset L$ かつ (1.2) $\Rightarrow \mathcal{O}(L)$ sequentially dense in $\mathcal{O}(K)$.

Proof) (1) $\rho: \mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}(K)$ を restriction から induce された continuous map とする。$\mathrm{Im}\,\rho$ が dense であることと，dual map $\rho': \mathcal{O}(K)' \to \mathcal{O}(L)'$ が 1-1 であることは同値。[1] Th. 1.2 を考慮すれば restriction $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K) \to \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus L)$ から induce された map $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)/\mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus L)/\mathcal{O}(\mathbb{C})$ が $\rho'$ そのものであることがわかる。従って，$\rho'$ が 1-1 であることは『$\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ を $\mathbb{C} \setminus L$ に制限したものが $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ の元に拡張可能ならば，$\varphi$ 自身 $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ の元に拡張可能である』と同値。そして『....』は (1.2) と同値である。

$\mathcal{O}_c(K)$ のノルムは明らかに $\mathcal{O}(K)$ において連続である。従って，任意の $\varphi \in \mathcal{O}(K)$ および $k = 1, 2, \cdots$,

1) Hahn-Banach の定理より.

に対して $\|\varphi-\varphi_k\|_{\mathcal{O}_c(K)}<1/k$ となる $\varphi_k\in\mathcal{O}(L)$ が存在する。

(2) $K\subset\subset L$ かつ (I.2) がなりたつと仮定して、任意の $\varphi\in\mathcal{O}(K)$ をとる。

$\varphi$ は $K$ の近傍 $V$ で正則な函数であるから、$K'$ を $V$ に含まれる $K$ のコンパクト近傍とすれば、$\varphi\in\mathcal{O}(K')$ とみなせる。もし $K'$ が $K'\subset L$ かつ (I.2) をみたすようにとれれば、(I) の最後の注意により、$\|\varphi-\varphi_k\|_{\mathcal{O}_c(K')}\longrightarrow 0$ となる $\varphi_k\in\mathcal{O}(L)$ が存在する。従って、$\mathcal{O}(K)$ の位相でも $\varphi_k\to\varphi$.

さて、$K$ の各点 $x$ を中心とし、$V\cap L^{\circ}$ に含まれる閉球 $K_x$ をとり、有限個の $K^{\circ}_{x_i}$, $i=1,2,\cdots,m$, で $K$ を覆う。このとき $K''=K_{x_1}\cup\cdots\cup K_{x_m}$ は $V\cap L^{\circ}$ に含まれる $K$ のコンパクト近傍で、$\mathbb{C}\setminus K''$ は高々有限個の連結成分しかない。もし $\mathbb{C}\setminus K''$ の成分 $C$ で $\mathbb{C}\setminus L$ と交わらないものがあれば、(I.2) の仮定により $C$ の1点 $y$ と $\mathbb{C}\setminus L$ のある点を $\mathbb{C}\setminus K$ 内の折れ線 $\Gamma$ で結ぶことができる。$K''$ から $\Gamma$ の小さい近傍を除く。この操作を有限回くりかえして $K'$ を得る。∎

Theorem (A) (Runge)

$K$ compact $\subset V$ open $\subset\mathbb{C}$

$\mathcal{O}(V)$ (sequentially) dense in $\mathcal{O}(K)$

$\Leftrightarrow$ $V\setminus K$ が $V$ の中で relatively compact な成分をもたない。

Proof) ($\Leftarrow$) $K = K_0 \subset\subset K_1 \subset\subset \cdots \subset\subset V$, $\bigcup K_n = V$ なる compact 列を $V \setminus K_n$ の各成分は $V$ において relatively compact でないようにとる。これは relatively compact な成分を全部 $K_n$ につけ加えることによって可能である。このとき、$K_n \subset\subset K_{n+1}$ は Th. 1.3 の仮定をみたす。従って、任意に $\varphi \in \mathcal{O}(K)$ をとると、$\exists L_1$, $K \subset\subset L_1 \subset\subset K_1$, $\varphi \in \mathcal{O}(L_1)$ かつ任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\exists \varphi_1 \in \mathcal{O}(K_1)$ s.t. $\|\varphi - \varphi_1\|_{\mathcal{O}_c(L_1)} \leqq \varepsilon/2$. $\varphi_1$ に対しても同様に、$\exists L_2$, $K_1 \subset\subset L_2 \subset\subset K_2$, $\varphi_1 \in \mathcal{O}(L_2)$, かつ $\exists \varphi_2 \in \mathcal{O}(K_2)$ s.t. $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{O}_c(L_2)} \leqq \varepsilon/2^2$。以下同様にすれば、列 $\varphi_n$ は各 $L_j$ 上一様収束する。よって $\varphi_n \to \exists \psi \in \mathcal{O}(V)$。$\|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{O}_c(L_1)} < \varepsilon$ $\forall n$ より $\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{O}_c(L_1)} \leqq \varepsilon$ を得る。

($\Rightarrow$) $V_0 (\neq \phi)$ が $V \setminus K$ の $V$ 中での relatively compact な成分であるとする。$\overline{V}_0$ compact, $\partial V_0 \subset K$ より最大値原理によって

$$\sup_{\overline{V}_0} |f| \leq \sup_{K} |f| \qquad f \in \mathcal{O}(V)$$

$\varphi \in \mathcal{O}(K)$ が $\mathcal{O}(V) \ni f_n$ により $f_n \to \varphi$ unif on $K$ となれば、上の不等式より $f_n \to \exists F \in \mathcal{O}_c(\overline{V}_0)$. $\varphi = 1/z-a$ $a \in V_0$ とすれば $(z-a)F(z) = 1$ in $V_0$. ($\because = 1$ on $\partial V_0$) これは $z = a$ において矛盾. ∎

Remark　$K$ compact $\subset U$ open $\subset \mathbb{C}$ とする.

Kの$\mathcal{O}(V)$-包 $\hat{K}_V$を（Vを固定しているときは$\hat{K}$とも記す）

$$\hat{K}_V \equiv \{z\in V \mid |f(z)| \leq \sup_K |f| \quad {}^\forall f \in \mathcal{O}(V)\}$$

により定義する。$\hat{\hat{K}} = \hat{K}$, $K \subset \hat{K}_V \subset$ (convex hull of K)

$\hat{K}_V$ は compact set,であるが更に,

Th.(A) bis

$$\mathcal{O}(V) \text{ dense in } \mathcal{O}(\hat{K}_V)$$

これは多変数におけるTh. Aの formulation に一致する.

Proof) $V_0$ が $V\setminus K$ の rel. compact な成分であれば, Th.(A)の後半の証明の不等式により $V_0 \subset \hat{K}$. そのような $V_0$ すべてとKの合併集合を $K_1$ とすれば $K \subset K_1 \subset \hat{K}$. $V\setminus K$は$V\setminus K$ の成分の合併であり open set, よって$K_1$ は compact であり, 作り方より $V\setminus K_1$ はもはやVにおいて rel. compact な成分をもたない。従ってTh.(A)より $\mathcal{O}(V)$ dense in $\mathcal{O}(K_1)$. $z \notin K_1$, $D \subset V\setminus K_1$ をz中心の closed disc とせよ. $V\setminus(K_1\cup D)$ の成分は, $V\setminus K_1$ の成分の一つからDが除かれたにすぎないから $K_1 \cup D$ とVにTh.(A)を適用して, $K_1$の近傍で0, Dの近傍で1であるような$\mathcal{O}(K_1\cup D)$の元が, $\mathcal{O}(V)$ の元で近似され

る。従って定義により $z \notin \hat{K}_1$. よって $K_1 \supset \hat{K}_1$. 明らかに $\hat{K}_1 \supset \hat{K}$ であるから. 前の $K_1 \subset \hat{K}$ とあわせて $K_1 = \hat{K}_1 = \hat{K}$, よって $\mathcal{O}(V)$ dense in $\mathcal{O}(\hat{K})$ ∎

又, この証明からわかるように

Prop. $\hat{K}_V$ はV中で relatively compact な $V \setminus K$ の成分すべてと, Kとの合併集合である。

$\hat{K}_V = K$ なるKを, "Vにおいて Rungeの性質をもつ" と呼ぶことにすれば (それは又 $\mathcal{O}(V)$ dense in $\mathcal{O}(K)$ と同値であるが) Th.(A) bis より,

$K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset \cdots \subset\subset V$ $\bigcup K_n = V$ で各 $K_n$ はVで Rungeの性質をもつような compact 列がとれる. Th.(B) の証明においてこれを用いるであろう。

## 2. Mittag-Leffler's theorem

Theorem (B) (Mittag-Leffler)[1)]

$$V_\alpha \text{ open} \subset \mathbb{C}$$

$$\varphi_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(V_{\alpha\beta})^{2)} \qquad \varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha} = 0 \text{ on } V_{\alpha\beta\gamma}{}^{2)}$$

---

1) これは covering cohomology $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$ $V = \bigcup V_\alpha$ $\mathcal{U} = \{V_\alpha\}$ を示している. これより $H^1(V, \mathcal{O}) = \varinjlim H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$. 実は $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$ $^\forall V$ open $\subset \mathbb{C}$ と Th.(B) は同値である.

2) covering $\{V_\alpha\}$ があるとき $V_{\alpha\beta} \equiv V_\alpha \cap V_\beta$, $V_{\alpha\beta\gamma} \equiv V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma$ などと記号を定める.

$\Rightarrow {}^{\exists}\varphi_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$ s.t. $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ on $V_{\alpha\beta}$

Proof) 条件より $\varphi_{\alpha\alpha} = 0$, $\varphi_{\beta\alpha} = -\varphi_{\alpha\beta}$ が従う.

以下 open sets の個数に応じて，4段階にわける。

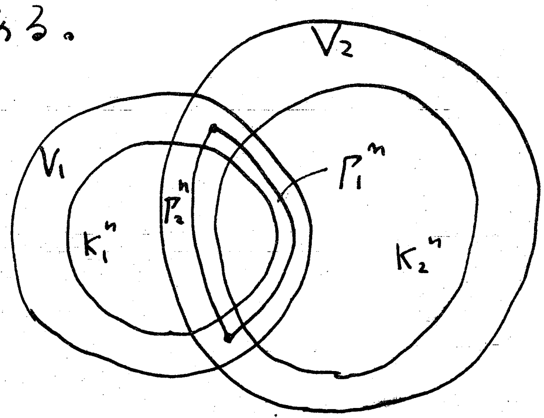
(1) open sets 2個の場合。

「${}^{\forall}\varphi \in \mathcal{O}(V_{12})$, ${}^{\exists}\varphi_i \in \mathcal{O}(V_i)$ $i=1,2$ s.t. $\varphi = \varphi_2 - \varphi_2$」

$K_1^n \cup K_2^n = K^n$ が $V$ で Runge の性質をもち

$K_i^1 \subset\subset K_i^2 \subset\subset \cdots \subset\subset V_i$, $V_i = \cup K_i^n$ $i=1,2$ となるような compact 列 $\{K_i^n\}_n$ をえらぶ（前節のおわりをみよ）.

$K_1^n \cap K_2^n \nearrow V_1 \cap V_2$ である。




$\Gamma_n : (V_1 \cap V_2) \backslash (K_1^n \cap K_2^n)$ の中の路で，$K_1^n \cap K_2^n$ を正の向きに一廻りするもの。

$\Gamma^n = \Gamma_1^n \cup \Gamma_2^n$

$\Gamma_1^n \cap \Gamma_2^n = \Gamma_1^n \cap K_1^n = \Gamma_2^n \cap K_2^n = \phi$ とする。$z \in K_1^n \cap K_2^n$ に対しては

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_1^n} + \int_{\Gamma_2^n} \varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right)$$

$$= -\underset{\mathcal{O}(K_1^n)}{\underset{\cap}{\psi_1^n(z)}} + \underset{\mathcal{O}(K_2^n)}{\underset{\cap}{\psi_2^n(z)}}$$

$\varphi = -\varphi_1^n + \varphi_2^n$ となる $\varphi_i^n$ を，以下帰納的に定める。

$\varphi_i^1 \equiv \psi_i^1 \quad i=1.2.$

$\varphi_i^n$ まで定まったとすると，

$$\underset{\mathcal{O}(K_1^n)}{\underset{\cap}{\psi_1^{n+1}-\varphi_1^n}} = \underset{\mathcal{O}(K_2^n)}{\underset{\cap}{\psi_2^{n+1}-\varphi_2^n}} \quad \text{on} \quad K_1^n \cap K_2^n$$

$K_1^n$ においては左辺，$K_2^n$ においては右辺であるような $\mathcal{O}(K^n)$ の元を $\chi^n$ とかく。$K^n$ に対する仮定により，

$^\exists\chi_1^n \in \mathcal{O}(V) \qquad \|\chi^n-\chi_1^n\|_{\mathcal{O}_c(K^n)} \leqq 2^{-n}$ ．そこで，

$\varphi_i^{n+1} \equiv \psi_i^{n+1} - \chi_i^n \quad i=1,2$ と定める。

$$\|\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n\|_{\mathcal{O}_c(K_i^n)} = \|\psi_i^{n+1}-\varphi_i^n-\chi_i^n\|_{\mathcal{O}_c(K_i^n)}$$

$$= \|\chi^n-\chi_i^n\|_{\mathcal{O}_c(K_i^n)} \leqq 2^{-n}$$

従って，$\varphi_i^n \to {}^\exists\varphi_i \in \mathcal{O}(V_i)$

$\varphi = -\varphi_1^n + \varphi_2^n$ より $n\to\infty$ として $\varphi_2-\varphi_1=\varphi$

(2) $V_1, \cdots, V_n$ と有限個の場合

$n=2$ のときは (1) である。以下帰納法による。$n-1$ まではよいとする．$1 \leqq \alpha, \beta \leqq n-1$ なる $\alpha, \beta$ については

$$\varphi_{\alpha\beta} = \psi_\beta - \psi_\alpha \quad {}^\exists\psi_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$$

$\varphi_{\alpha\beta}+\varphi_{\beta n}-\varphi_{\alpha n}=0$ より

$\psi_\alpha+\varphi_{\alpha n} = \psi_\beta+\varphi_{\beta n}$ on $V_{\alpha\beta n}$ （これを(1)の時と同様に拡張して）

$= \psi \in \mathcal{O}((\bigcup_{\alpha=1}^{n-1} V_\alpha) \cap V_n)$ （(1)を用いて）

$= \varphi_n - \chi \quad {}^\exists\varphi_n + \mathcal{O}(V_n),\ {}^\exists V \in \mathcal{O}(\bigcup V_\alpha)$

$\varphi_\alpha = \psi_\alpha + \chi \ (1 \leqq \alpha \leqq n-1)$ と定めれば，$\varphi_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$

$$\varphi_{\alpha n} = \varphi_n - \chi - \psi_\alpha = \varphi_n - \varphi_\alpha$$

(3) $\{V_\alpha\}$ locally finite 1) の場合.

$K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset \cdots \subset\subset V$ ($K_n$: $V$の中でRunge の性質をもつ)

$K_n$ を fix すれば仮定より $A_n = \{\alpha \mid K_n \cap V_\alpha \neq \phi\}$ は有限集合 (2) より

$$\exists \psi_\alpha^n \in \mathcal{O}(V_\alpha) \quad \alpha \in A_n \text{ s.t. } \varphi_{\alpha\beta} = \psi_\beta^n - \psi_\alpha^n$$

$$\psi_\alpha^{n+1} - \psi_\alpha^n = \psi_\beta^{n+1} - \psi_\beta^n \quad \text{on } V_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta \in A_n$$

$$= \chi^n \in \mathcal{O}(\bigcup_{\alpha \in A_n} V_\alpha) \quad \text{(拡張したもの)}$$

$K_n$ に対する仮定より $\exists \chi_1^n \in \mathcal{O}(V)$ s.t. $\|\chi^n - \chi_1^n\|_{\mathcal{O}_c(K_n)} \leq 2^{-n}$

$\varphi_\alpha^{n+1} = \psi_\alpha^{n+1} - \chi_1^n$ とおけば, 前と同様に $\varphi_\alpha^n \to \varphi_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$

(4) 一般の場合 $V$ が paracompact 2) であるから,

$\exists \{U_j\}$ loc. finite $V = \bigcup V_\alpha = \bigcup U_j$ $\forall j\ \exists \alpha(j)$ s.t. $U_j \subset V_{\alpha(j)}$

$\psi_{ij} \equiv \varphi_{\alpha(i)\alpha(j)} \in \mathcal{O}(U_{ij})$ と定める. (3) により

$\exists \psi_j \in \mathcal{O}(U_j)$ s.t. $\psi_{ij} = \psi_j - \psi_i$

---

1) $V = \bigcup V_\alpha$ が locally finite covering であるとは,
$\forall K$ compact $\subset V$, $\#\{\alpha \mid K \cap V_\alpha \neq \phi\} < \infty$. 又は $\forall a \in V$,
$\exists U_a$ nbd of $a$ s.t. $\#\{\alpha \mid U_a \cap V_\alpha \neq \phi\} < \infty$

2) 位相空間 $S$ が paracompact であるとは, 任意の open covering が locally finite な細分をもつときにいう.

$\varphi_{\alpha(i)\alpha(j)} + \varphi_{\alpha(j)\alpha} - \varphi_{\alpha(i)\alpha} = 0$ より

$\psi_i + \varphi_{\alpha(i)\alpha} = \psi_j + \varphi_{\alpha(j)\alpha}$ on $U_{ij} \cap V_\alpha$

$= \varphi_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$ （$\cup U_i = V$ により前と同様に拡張したもの）

即ち $\varphi_{\alpha(i)\alpha} = \varphi_\alpha - \psi_i$ on $U_i \cap V_\alpha$

$\varphi_{\alpha\beta} - \varphi_{\alpha(i)\beta} + \varphi_{\alpha(i)\alpha} = 0$ on $V_{\alpha\beta} \cap U_i$ へ代入すれば，

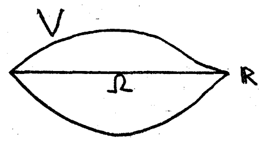
$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ on $V_{\alpha\beta} \cap U_i$

これが $\forall i$ について成立するから（$\cup U_i = V$ より）この等式は $V_{\alpha\beta}$ で成立する。∎

# 才II章　一変数超函数論

$\Omega$を実軸 $\mathbb{R}$ の open set、$\Omega$ を close set として含む、複素平面 $\mathbb{C}$ の open set $V$で、$V \cap \mathbb{R} = \Omega$ かつ$V$の連結成分は$\Omega$と交わるものをとる。このとき、$V$、$V \setminus \Omega$ 上の正則函数全体を考えれば restriction により $\mathcal{O}(V)$ は $\mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ の部分群に同一視される。商をとり

$$\mathcal{B}(\Omega) \equiv \mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$$




を$\Omega$上の超函数（hyperfunction）の空间という。$\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ の同値類を $[\varphi]$ と記し、$\varphi$によって定義された超函数，$\varphi$を $f = [\varphi]$ の定義函数 とよぶ。これが $V$ のとり方によらぬこと，$\mathcal{B}(\Omega)$ が 局所化の原理をみたすこと、更に決定的なこととして，$\mathcal{B}(\Omega)$ の元はすべて $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元の制限とみなせること、などがわかる。それらのことを正確にのべるため，まず層の概念を解説する。

## §1. 準層、層

### 1. 定義

Def. 2.1　$X$を位相空间とする。$X$の各開集合$U$に対しアーベル群 $\mathcal{F}(U)$ が与えられ、$V \subset U$であるとき、準同

型写像 $\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が与えられていて、$\mathcal{F}(\phi) = \{0\}$, $\rho^U_U = id_{\mathcal{F}(U)}$, $W \subset V \subset U$ に対し $\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$ を満足するとき、この体系を$X$上のアーベル群の準層 (presheaf, préfaisceau) という。(群の準層, 環の準層なども同様に定義される[1]) $s \in \mathcal{F}(U)$ に対し $\rho^U_V(s) = s|_V$ とかき $s$ の $V$ への制限という. $X$上の２つの準層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の間の準同型 $\varphi$ とは群の準同型 $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ の族 $\{\varphi_U\}$ であって、$V \subset U$に対しては右の図式が常に可換である (i.e. $\rho'^U_V \circ \varphi_U = \varphi_V \circ \rho^U_V$) ものをいう。[2]

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho^U_V} & \mathcal{F}(V) \\ \varphi_U \downarrow & & \downarrow \varphi_V \\ \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\rho'^U_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

**Def. 2.2** 準層 $\mathcal{F}$ が、次の条件を満足するとき、$\mathcal{F}$ を層 (sheaf, faisceau) であるという。

$X \supset U$ : $\forall$open , $U = \cup U_\alpha$ : $\forall$open covering とする。

1°) $s \in \mathcal{F}(U)$, $s|_{U_\alpha} = 0 \ \forall \alpha \Rightarrow s = 0$

---

1) 一般に、圏 $\mathcal{C}$ に値をもつ$X$上の準層とは、$X$の開集合全体のなす圏 ($V \subset U$ のとき unique な map $V \to U$ があるとする) から、$\mathcal{C}$への反変関手のことである。

2) 1)の言葉でいえば、$\varphi$ は関手 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の間の自然な変換である.

2) $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ がすべての pair $(\alpha, \beta)$ に対し
$s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ をみたすとき,
$\exists s \in \mathcal{F}(U)$ s.t $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$

$\mathcal{F}$が準層, $x \in X$ のとき, $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U\,\text{open}} \mathcal{F}(U)$を, $\mathcal{F}$の$x$上の<u>茎</u>(stalk)という。$s \in \mathcal{F}(U)$ の $\mathcal{F}_x$ における像を'$s$の$x$における芽(germ)'といい $s_x$ で表わす。前層の準同型 $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ は茎の準同型 $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ を誘導する。$X$上の module の sheaf $\mathcal{F}$, ring の sheaf $R$ があり $^\forall U$, $\mathcal{F}(U)$ が $R(U)$ module であるとき $\mathcal{F}$を <u>$R$-module</u> であるとよぶ。

$\mathcal{F}'$が$\mathcal{F}$の部分準層(subpresheaf)であるとは, $\mathcal{F}'(U)$が$\mathcal{F}(U)$の部分群であり, $\rho'^U_V = \rho^U_V|_{\mathcal{F}'(U)}$ なるものをいう。例えば準同型 $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ において, $(\mathrm{Ker}\,\varphi)(U) \equiv \mathrm{Ker}\,\varphi_U$ により定義される $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は$\mathcal{F}$の部分準層である。$\mathcal{F}$が sheaf であるとき, $\mathcal{F}(U)$のかわりに, 記号 <u>$\Gamma(U, \mathcal{F})$</u> を用いることが多い。$s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$を, $\mathcal{F}$の$U$上の <u>断面</u>(section) という。$s$の台(support of $s$)とは次のごとく定める。それは定義により閉集合である.

$$\mathrm{supp}\, s \equiv \{x \in U \mid s|_V \neq 0 \quad V\text{は}x\text{の任意の近傍}\}$$

$S$ を $U$ の部分集合とするとき，次の記号を用いる。

$$\mathcal{F}_S(U) \equiv \{ s \in \mathcal{F}(U) \mid \mathrm{supp}\, s \subset S \}$$

$$\mathcal{F}_C(U) \equiv \{ s \in \mathcal{F}(U) \mid \mathrm{supp}\, s \text{ は compact} \}$$

$$\mathcal{F}(S) \equiv \varinjlim_{U} \mathcal{F}(U)^{1)} \quad (U \supset S)$$

## 2. Soft sheaf, flabby sheaf

Def. 2.3　層 $\mathcal{F}$ が柔かい（soft, mou）とは $X$ の任意閉集合 $F$ に対して

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(F) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

であること。[2]

例えば $\mathbb{R}^n$ 上の，連続函数の germ の sheaf $\mathcal{C}^0$，$\mathcal{C}^\infty$-class fn の germ の sheaf $\mathcal{E}$，distribution の germ の sheaf $\mathcal{D}'$ はすべて柔層である。

---

1) $X$ の任意の部分集合が paracompact な基本近傍系を有すると仮定する。$\mathcal{F}(S)$ のこの定義は，"$S$ から sheaf space $\mathcal{F}$ への continuous map 全体"（すなわち $S$ 上の section）と定義したものと一致する．sheaf space については第III章．§1 参照．

2) map $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(F)$ は $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ から induce $\mathcal{F}(X) \to \varinjlim_{U \supset F} \mathcal{F}(U)$ なる nature map．$X$ が 1) にのべた条件をみたしておれば，この map は又，$\mathcal{F}(X)$ の元すなわち "$X$ から $\mathcal{F}$ への cont. map" を $F$ へ制限する map であると思ってもよい．

Def. 2.4. 層 $\mathcal{F}$ がブヨブヨ (flabby, flasque, 散布的) であるとは，任意の開集合 U に対して

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \qquad (\text{exact})$$

が成立すること。

Prop. 2.5.

$$\left.\begin{array}{l} X : \text{paracompact} \\ \mathcal{F} : \text{flabby} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{F} : \text{soft}$$

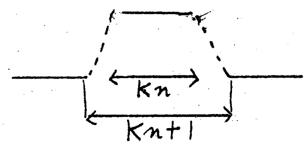
Th. 2.6 $\mathcal{F}$ : soft　X : locally compact かつ σ - compact $\Longrightarrow {}^{\forall}s \in \mathcal{F}(X),\ {}^{\exists}s_j \in \mathcal{F}_c(X)$

$$s = \sum s_j \quad (\text{loc. finite sum})$$

Proof ) とりつくし compact 列, $K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset \cdots \subset\subset X$

$X = \cup K_n$ に対して, $g_n \in \mathcal{F}_c(X)$ を

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in K_n \\ 0 & x \notin (K^{\circ}_{n+1})^c \end{cases}$$



として、即ち $K_n \cup (\overset{\circ}{K}_{n+1})^c$ なる閉集合で右辺のように与えたものを $\mathcal{F}$ の softness によって全空間上の section に拡張したのが $g_n$ である。$f_1 = g_1$, $f_n = g_n - g_{n-1}$ $(n > 2)$ とおけばよい。

## §2. 超函数の定義、基本性質

初めにのべたが、あらためて定義を掲げる。

Def. 2.7
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \mathbb{C} \\ \text{open} \cup & & \cup \text{ open} \\ \Omega & \underset{\text{closed}}{\subset} & V \end{array}$$
$V \cap \mathbb{R} = \Omega$ とする。このような $V$ を

$\Omega$ の<u>複素近傍</u>という。

$\mathcal{B}(\Omega) \equiv \mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$ を $\Omega$ 上の<u>超函数</u>(hyperfunction)の空間とよぶ。$\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ の同値類を $[\varphi] \in \mathcal{B}(\Omega)$ とかき、$\varphi$ はその<u>定義函数</u>であるという。

定義が複素近傍の取り方によらず、$\Omega$ のみに依存するものであることが、次の様に示される。

$\Omega \subset W \subset V$　$V, W$ は $\Omega$ の複素近傍とする。

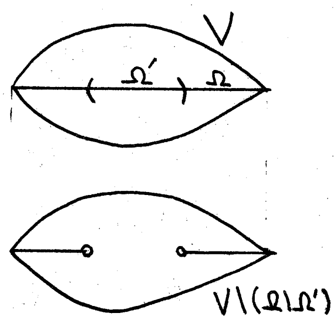
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V \setminus \Omega) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{res} & & \downarrow \text{res} & & \downarrow \eta & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(W) & \longrightarrow & \mathcal{O}(W \setminus \Omega) & \longrightarrow & \mathcal{O}(W \setminus \Omega)/\mathcal{O}(W) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

restriction より induce される $\eta$ は 1−1 である。というのは，$\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega) \cap \mathcal{O}(W)$ であるとすれば $W \supset \Omega$ なのだから $\varphi \in \mathcal{O}(V)$。

又、onto である。実際，${}^\forall \varphi \in \mathcal{O}(W \setminus \Omega)$ をとれば、$(V \setminus \Omega) \cap W = W \setminus \Omega$ であるから，Th(B)（証明の(1)の部分）を $\{V \setminus \Omega, W\}$ に適用して ${}^\exists \psi \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega), {}^\exists \chi \in (W)$ s.t. $\varphi = \psi - \chi$ on $W \setminus \Omega$　$\eta([\psi]_V) = [\varphi]_W$. ∎

$\Omega$ の開部分集合 $\Omega'$ について，$\mathcal{B}(\Omega')$ を考える。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(V) \arrow[r] \arrow[d, "rest"] & \mathcal{O}(V \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d, "rest."] & \mathcal{B}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^{\Omega}_{\Omega'}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(V \setminus (\Omega \setminus \Omega')) \arrow[r] & \mathcal{O}(V \setminus (\Omega \setminus \Omega') \setminus \Omega') \arrow[r] & \mathcal{B}(\Omega') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$




上の図式で restriction から induce される $\rho^{\Omega}_{\Omega'}$ は，V によらない。$f \in \mathcal{B}(\Omega)$ のとき $\rho^{\Omega}_{\Omega'}(f) = f|_{\Omega'}$ を $f$ の $\Omega'$ への制限とよぶ。$\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$ のとき $\rho^{\Omega}_{\Omega''} = \rho^{\Omega'}_{\Omega''} \circ \rho^{\Omega}_{\Omega'}$ は容易にわかる。又 $\rho^{\Omega}_{\Omega} = id_{\mathcal{B}(\Omega)}$ これをまとめて，

Th. 2.8　$\mathcal{B} = (\mathcal{B}(\Omega), \rho^{\Omega}_{\Omega'})$ は presheaf である。

実は、次の定理が成立し，これが超函数を"函数概念の拡張"であると主張できる１つの根拠を与える。

Th. 2.9 $\mathcal{B}$ は sheaf である。

Proof) Def. 2.2 における2つの条件を確めればよい。

$\Omega = \bigcup \Omega_j$ (open covering)

(1)「$f \in \mathcal{B}(\Omega)$, $f = 0 \iff f|_{\Omega_j} = 0$ ($\forall j$)」

$f = [\varphi] \in \mathcal{B}(\Omega)$, $V_j$ を $\Omega_j$ の複素近傍とする。$V = \bigcup V_j$

$f|_{\Omega_j} = 0 \iff \varphi \in \mathcal{O}(V_j)\ {}^{\forall}j \iff \varphi \in \mathcal{O}(V) \iff f = 0$

(2)「$f_j \in \mathcal{B}(\Omega_j)$, $f_j|_{\Omega_j \cap \Omega_k} = f_k|_{\Omega_j \cap \Omega_k}$

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{B}(\Omega)$ s.t. $f|_{\Omega_j} = f_j$」

$f_j = [\varphi_j]$ $\varphi_j \in \mathcal{O}(V_j \setminus \Omega_j)$ とする。仮定より

$\varphi_{jk} = \varphi_k - \varphi_j \in \mathcal{O}(V_j \cap V_k)$

$= \psi_k - \psi_j$ $\psi_i \in \mathcal{O}(V_i)$ (Th.(B)を適用)

従って $\varphi_j - \psi_j = \varphi_k - \psi_k$ ($\forall j, k$) であるから,

$V_j \setminus \Omega_j$ で $\varphi_j - \psi_j$ であるような $\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ が定まる。$\mathcal{B}(\Omega) \ni f = [\varphi]$ とおくと,

$f|_{\Omega_j} = [\varphi|_{V_j}] = [\varphi_j - \psi_j] = [\varphi_j] = f_j$ ∎

$\mathcal{D}' = (\mathcal{D}'(\Omega), \rho^{\Omega}_{\Omega'})$ を distribution の presheaf とすれば これも sheaf をなしている。しかし $\mathcal{B}$ は次の決定的な性質をもち,それは現在知られている函数の層では唯一無二のものであり, distribution に比べて hyperfn が一段と強力なく(それは特に多変数で発揮さ

れる）点である。

Th. 2.10 $\mathcal{B}$ は flabby である。

Proof） 連結成分を考えることにし、$\Omega=(a,b)$ とする。

複素近傍として $\mathbb{C}\setminus\partial\Omega$ をとる。[1]

$$\mathcal{B}(\Omega)=\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega})/\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\partial\Omega)$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathbb{C})。$$

又、$\mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R})=\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega})/\mathcal{O}(\mathbb{C})$ とおく。

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega})\xrightarrow{res}\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{B}(\mathbb{R}) \arrow[d, "\rho^{\mathbb{R}}_{\Omega}"] \\ & \mathcal{B}(\Omega) \end{tikzcd}$$

埋めこみ $\mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は

restriction $\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega})\to\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ が induce するものであり、図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\partial\Omega) \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega}) \arrow[r] & \mathcal{B}(\Omega) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

の右端、縦の写像は全射、よって $\rho^{\mathbb{R}}_{\Omega}$ は全射である ■

$\Omega=(0,\infty)$, $\mathcal{D}'(\Omega)\ni e^{1/x}$ であるが、よく知られているようにこれは $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元の拡張することは不可能。よって $\mathcal{D}'$ は flabby ではない。又、$\mathcal{D}'$ について sheaf の第2条件を示すのには、1を分解を用いることを想起せよ。我々は、

1) 前の複素近傍の定義では明確のため $V\cap\mathbb{R}=\Omega$ を仮定したが、それ以降の概論でわかるように $\Omega$ を closed set として含む $\mathbb{C}$ の open set $V$ なら何でも $\mathcal{B}(\Omega)=\mathcal{O}(V\setminus\Omega)/\mathcal{O}(V)$ である。

analytic な category で論じているため、$\mathcal{D}'$ においては1の分解を用いるかわりに、より強力な flabbiness を用いるのである。

## § 3. 微分、積分

### 1. 微分作用素、不定積分

$a(x)$ が $\Omega\subset\mathbb{R}$ 上の real analytic fn であるとすれば、$\exists V\supset\Omega$, $\tilde{a}(z)\in\mathcal{O}(V)$ $\tilde{a}|_{\Omega}=a$ となる。（以下 $\tilde{a}(z)$ は $a(z)$ とかく） そこで $[\varepsilon(z)a(z)]$ $\varepsilon(z)=\begin{cases}1 & \mathrm{Im}\,z>0\\ 0 & \mathrm{Im}\,z<0\end{cases}$ $\varepsilon\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ を $a(x)$ と同一視することにより、real analytic fn の sheaf $\mathcal{A}$ が、$\mathcal{B}$ の subsheaf となる。[1)]

又、$\varphi\in\mathcal{O}(V\setminus\Omega)$ に対し $\varphi(x+i0)=[\varepsilon\varphi]$ $\varphi(x-i0)=[-\bar{\varepsilon}\varphi]$ とかく。$f=[\varphi]\in\mathcal{B}(\Omega)$, $a\in\mathcal{A}(\Omega)$; $\varphi(z)\in\mathcal{O}(V\setminus\Omega)$ $a(z)\in\mathcal{O}(V)$ に対して

$$\frac{d}{dx}f\equiv\left[\frac{d}{dz}\varphi(z)\right]$$

$$a\cdot f\equiv\left[a(z)\varphi(z)\right]$$

と定めるのは正則函数の性質から自然である。そこで一般に、$\mathcal{L}(\Omega)=\bigcup_{m\geq 0}\sum_{\alpha=0}^{m}\mathcal{A}(\Omega)\dfrac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ とおくことにすれば、$\mathcal{L}$ は $\mathcal{B}$ に対する作用素の presheaf となる。

---

1) $\bar{\varepsilon}(z)=\begin{cases}0 & \mathrm{Im}\,z>0\\ 1 & \mathrm{Im}\,z<0\end{cases}$ とし $a\longmapsto[-\bar{\varepsilon}(z)a(z)]$ としても同一の埋めこみを与えている。$[\varepsilon\cdot a]=[-\bar{\varepsilon}a]$ が $a$ の拡張 $\tilde{a}$ のとりかたによらぬことは明らか。

Def. 2.11. $\mathcal{L}(\Omega) \ni P(x, D_x) = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ $(a_\alpha \in \mathcal{a}(\Omega))$

$f = [\varphi] \in \mathcal{B}(\Omega)$ $\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$, $a_\alpha(z) \in \mathcal{O}(V)$ に対して、

$P(x, D_x) f = [P(z, D_z)\varphi(z)]$ と定義する。これにより

$\mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$-Module[1] となる。

Prop. 2.12. $\Omega = (a, b)$ $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ とする

$\frac{d^n f}{dx^n} = 0 \Longleftrightarrow f$ はたかだか $n-1$ 次の多項式.

Proof) $f = [\varphi]$ とおく $\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$

$$\frac{d^n f}{dx^n} = 0 \Longleftrightarrow \frac{d^n \varphi}{dz^n} \in \mathcal{O}(V)$$

$V$ を連結かつ単連結としてよい。然らば、常微分方程式の理論より $\exists \psi \in \mathcal{O}(V)$ s.t. $\frac{d^n}{dz^n}\psi = \frac{d^n}{dz^n}\varphi$

$\therefore \frac{d^n}{dz^n}(\varphi - \psi) = 0$ in $V \setminus \Omega$

$\therefore \varphi(z) - \psi(z) = \varepsilon(z)P_1(z) + \bar{\varepsilon}(z)P_2(z)$ $\deg P_i < n$

Prop. 2.13 $\Omega = (a, b)$ $f \in \mathcal{B}(\Omega)$

$\Longrightarrow \exists F_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ s.t. $\frac{d^n}{dx^n} F_n = f$

---

1) Cf. P.27 の R-Module の def.

Proof) $f=[\varphi]$ $\varphi\in\mathcal{O}(V)$ $V$, $V^+$, $V^-$ [1] すべて連結かつ単連結としてよい。前の証明と同様に、$\exists\psi_n(z)\in\mathcal{O}(V\setminus\Omega)$ s.t. $\dfrac{d^n}{dz^n}\psi_n=\varphi$. $F_n=[\psi_n]$ が求めるものである。■

Def. 2.14 $f\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対して Prop. 2.13 において定まる $F_n$ を、$f$ の n 階不定積分 といい $F_n=\underbrace{\int^x dx\cdots\int^x}_{n} f(x)\,dx$ とかく。

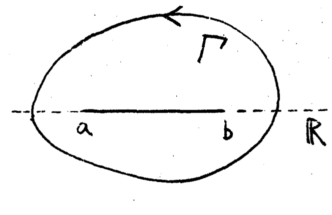
それは Prop. 2.12 により、次数 $n$ 未満の多項式の付加項を除いて決定する。Prop. 2.13, 2.12 は実は後の Th. 2.21 の特別な場合にすぎない。

## 2. 定積分、標準定義函数

定積分は、一般には意味をなさないが、$\mathcal{B}_c(\Omega)$ の元に対しては次のように定義できる。

Def. 2.15 $f=[\varphi]\in\mathcal{B}_c(\Omega)$ $\Omega=(a,b)$ のとき
$(\varphi\in\mathcal{O}(V))$

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv -\int_\Gamma \varphi(z)\,dz$$




---

1) $V^\pm = V\cap\mathbb{C}^\pm$ $\mathbb{C}^\pm=\{z\mid \mathrm{Im}\,z \gtrless 0\}$ $\mathbb{C}=\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}\cup\mathbb{C}^-$

但し $\Gamma$ は $V\setminus\operatorname{supp} f$ の中にあって，$\operatorname{supp} f$ を正方向に一周する閉曲線。

これが自然な定義であることは、後の実例によってもわかる。（尚、Introduction を参照のこと）

$\mathbb{R}\supset K$ compact とし $K$ に support をもつ hyperfunction 全体を $\mathcal{B}_K(\mathbb{R})$ と記す。次の exact sequence は明らか

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_K(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus K) \longrightarrow 0$$

これと exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus K)/\mathcal{O}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus K) \longrightarrow 0$$

を比較すれば，$(\mathbb{C}\setminus K)\setminus(\mathbb{R}\setminus K)=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，

$\mathbb{C}\setminus K$ は $\mathbb{R}\setminus K$ を closed set として含むことより右端は一致。真中の項も定義より一致、従って

$$\mathcal{B}_K(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus K)/\mathcal{O}(\mathbb{C})$$

よって、次の duality は Th. 2.2 の言い換えにすぎない。

Th. 2.16　$\mathbb{R}\supset K$ compact のとき (DFS)-space $\mathcal{A}(K)$ と (FS)-space $\mathcal{B}_K(\mathbb{R})$ は次の内積により、互に strong dual である。

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx \qquad (f \in \mathcal{B}_K\ ,\ g \in \mathcal{A})$$

右辺の積分は Def. 2.15 のものである。
今 $\mathcal{L}(\Omega) \ni P(x, D) = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha(x) \dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ の formal dual を
$P'(x, D)u = \sum_{\alpha=0}^{m} (-\dfrac{d}{dx})^\alpha (a_\alpha(x) u)$ により定めれば
上の式により

$$\langle Pf, g \rangle = \langle f, P'g \rangle \quad \text{である。}$$

Def. 2.17 　$f \in \mathcal{B}_K(\mathbb{R})$ のとき

$\varphi_0(z) = \dfrac{-1}{2\pi i} \langle f(t), \dfrac{1}{z-t} \rangle$ とおき，これを
$f$ の <u>標準定義函数</u> とよぶ.[1)]

Th. 2.2 の証明 (3) を見れば $\varphi_0(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ であり，
従って上の duality から $[\varphi] = f$ である。

examples 1. (Dirac の $\delta$) 　$\delta : g(x) \longmapsto g(0)$ の標準
定義函数は $\varphi(z) = \dfrac{-1}{2\pi i} \cdot \dfrac{1}{z}$ 　従って

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0} \right)$$

---

1) $f(x)$ の定義函数のうちで，標準定義函数は次の式で特徴づけられる。

$$\begin{cases} \varphi_0(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K) \\ \lim_{z \to \infty} \varphi_0(z) = 0 \end{cases}$$

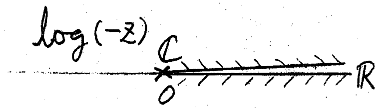
又. $\delta^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i}\left(\frac{1}{(x+i0)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i0)^{n+1}}\right) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i}\left[\frac{1}{z^{n+1}}\right]$

δ函数の色々な性質はこれからただちに従う。

$x \cdot \delta^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i}\left[z \frac{1}{z^{n+1}}\right] = -n \cdot \frac{(-1)^{n}(n-1)!}{2\pi i}\left[\frac{1}{z^{n}}\right] = -n\,\delta^{(n-1)}(x)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = -\oint\left(\frac{-1}{2\pi i}\,\frac{1}{z}\right)dx = 1$

2. $Y(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left[\log(-z)\right]$




$\log(-z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus[0,\infty))$

$z \in (-\infty, 0)$ で *real value*

$Y(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \infty) \\ 0 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ である

$\frac{d}{dx} Y(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left[\frac{d}{dz}\log(-z)\right] = \frac{-1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z}\right] = \delta(x)$

3. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ の特性函数 $\chi_{[a,b]}$ は次のものである。

$\chi_{[a,b]}(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left[\log\frac{a-z}{b-z}\right] \quad = \begin{cases} 1 & x \in (a, b) \\ 0 & その他 \end{cases}$

$f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ のとき，次の式が成立する。

◎ $\int_a^b f(x)\chi_{[a,b]}(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

左辺は Def. 2.15 の積分，右辺は本来の *real analytic* function としての Riemann 積分.

Proof)
$$\int_a^b f(x)\chi_{[a,b]}(x)\,dx = \oint_\gamma f(z)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{dx}{x-z}\Big)dz$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\Big(\oint_\gamma \frac{f(z)}{x-z}dz\Big)dx$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

## §4. Distribution の埋蔵

1. 多項式は $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ で dense, 又 $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ においても dense であるから, compact support の distribution の test fn として多項式をとることにより embedding
$$\mathcal{D}'_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}_c(\mathbb{R})$$
ができる。これは support を保存するので, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元を Th. 2.6 により $\mathcal{D}'_c(\mathbb{R})$ の locally finite sum に分解しておいて embed することにより.
$$0 \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
が構成できる。さらに sheaf としても同様の考察から

Prop. 2.18 $\quad 0 \to \mathcal{D}' \to \mathcal{B} \quad$ (exact)

であり, この injection は $\mathcal{L}$-Module としての準同型になっている。[1]

---

1) くわしくは 小松: 東大 Lecture notes P.108 f.f. 参照のこと.

$\mathcal{D}'$ が $\mathcal{B}$ の proper subsheaf をなすことは明らかであるが,[2] 又、簡単な実例によっても示しうる。

$$[e^{1/x}] = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!\,\nu!}\,\delta^{(\nu-1)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

であるが、右辺は $\mathcal{D}'$ では収束しない。これらについては、(§2.5) をも参照のこと。

$\mathcal{B}(\Omega)$ の元がどのような関数族に属するかについては、色々な判定条件が知られている。いくつかを証明なしに以下列挙する。

Prop. 2.19

1. $f = [\varphi] \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$\iff \Omega \supset {}^\forall K$ compact ${}^\exists m$.

$$\|\varphi(x+iy)\|_{L^p(K)} = O(|y|^{-m})$$

ここで $\|\cdot\|_{L^p(K)}$ は supnorm に かえてもよい。

このとき $\varphi(x+iy) \in \mathcal{D}'$ かつ

$$\varphi(x \pm iy) \xrightarrow[y \downarrow 0]{} \varphi(x \pm i0) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \text{ であり}$$

$$f(x) = \varphi(x+i0) - \varphi(x-i0) \quad \text{とあらわされる。}$$

2. $f = [\varphi] \in L^p_{loc}(\Omega) \qquad 1 < p < \infty$

$\iff \Omega \supset {}^\forall K$ compact

$$\|\varphi(x+iy)\|_{L^p(K)} = O(1)。$$

---

2) $\mathcal{B}$ は flabby であるが, $\mathcal{D}'$ は soft にすぎない.

3. $f = [\varphi] \in \mathcal{D}^{(m)'}_{L^2{}_{loc}}(\Omega)$　（$L^2_{loc}$ の元の distribution の意味で $m$ 階の導函数であるもの）

$\Longleftrightarrow$ $\Omega \supset {}^\forall K$ compact $\exists m$,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|\varphi(x+iy)\|^2_{L^2(K)} |y|^{2m-1} dy < \infty 。$$

4. $f = [\varphi] \in B^{loc}_{n+\alpha, p, q}$　（$L^p$ の意味で $n$ 回微分可能で $n$ 次導函数を $L^q{}_{nom}$ で測定して $\alpha$-Hölder 連続であるもの）

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|\varphi^{(m)}(x+iy)\|^q_{L^p(K)} |y|^{(-m+n+\alpha)q-1} dy < \infty 。$$

## §5. 常微分方程式

### 1 基本定理

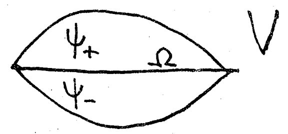
$\mathcal{L}(\Omega) \ni P(x, D) = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha$ とする。

Th. 2.21　$\mathcal{B}(\Omega) \xrightarrow{P} \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow 0$　exact.

即ち，${}^\forall f \in \mathcal{B}(\Omega)$, ${}^\exists u \in \mathcal{B}(\Omega)$ s.t. $P(x, D)u = f$

Proof　各連結成分を考えることにし，$\Omega = (a, b)$ とおく．$\Omega$ の複素近傍 $V$ を適当にとり，$a_\alpha(z) \in \mathcal{O}(V)$, $\varphi(z) \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$　$f = [\varphi]$,　$V^\pm$ は単連結，$V \setminus \Omega$ に $a_m(z)$ の零点がないようにする．

$\varphi_\pm(z) \equiv \varphi(z)|_{V^\pm}$ とおく




Vのとり方により解析的係数の常微分方程式 $P(z, D_z)\chi = \varphi_+ (= \varphi_-)$ は解 $\psi_+(z) \in \mathcal{O}(V^+)$ $(\psi_-(z) \in \mathcal{O}(V^-))$ をもつ.

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_+(z) & z \in V^+ \\ \psi_-(z) & z \in V^- \end{cases}$$ とすれば

$u = [\psi]$ が解を与える。■

解の基本系，fの性質の解への遺伝については，$a_m(z)$ の零点が $\Omega$ 上にあるかどうかで状況が異なる。

$$\mathcal{B}(\Omega)^P = \mathrm{Ker}\,[\mathcal{B}(\Omega) \xrightarrow{P} \mathcal{B}(\Omega)]$$ とする。1)

Th. 2.22　$a_m(x) \neq 0$ on $\Omega$ のとき

(i) $\dim \mathcal{B}(\Omega)^P = m$

(ii) $P(x, D)u = f$,　$f \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{A}(\Omega)$

(iii) 〃 ,　$f \in \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Proof) V を Th. 2.21 の証明におけると同様に定める。更に V の各連結成分が単連結，$a_m(z) \neq 0$ in V とする。　$u = [\psi]$,　$f = [\varphi]$ とおく.

---

1) P が induce する sheaf hom $\mathcal{B} \xrightarrow{P} \mathcal{B}$ の Kernel sheaf を $\mathcal{B}^P$ とかくと　$\mathcal{B}^P(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega)^P$,　(cf. § 2.1)

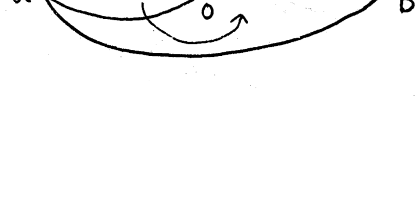
(i) $m$ の一次独立な $\mathcal{A}(\Omega)$ の解は存在する。(ii) で $f=0$ の場合と考えれば、すべての解が $\mathcal{A}(\Omega)$ なのだから それがすべてである。

(ii) $\chi = P(z, D_z)\psi - \varphi$ とすれば、$\chi(z) \in \mathcal{O}(V)$
V のとり方より $\exists \psi_0 \in \mathcal{O}(V)$ s.t. $P(z, D)\psi_0 = \chi$
$P(z, D)(\psi - \psi_0) = \varphi$
$[\varphi] \in \mathcal{A}(\Omega)$ より $\varphi_\pm \in \mathcal{O}(V_\pm \cup \Omega) \therefore (\psi - \psi_0)_\pm \in \mathcal{O}(V_\pm \cup \Omega)$
従って、$u = [\psi] = [\psi - \psi_0] \in \mathcal{A}(\Omega)$

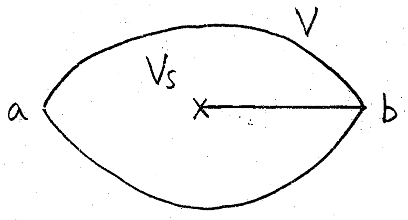
(iii) $P(z, D)\psi_\pm = \varphi_\pm$ であるが、$[\varphi] \in \mathcal{D}'$ より Prop. 2.18 から $\exists m$, $\varphi_\pm(x+iy) = O(|y|^{-m})$ 従って常微分方程式の理論より $\exists m'$, s.t.
$\psi_\pm(x+iy) = O(|y|^{-m'}) \therefore [\psi] \in \mathcal{D}'$ ■

次に $a_m(x)$ が $\Omega$ 内に零点をもつ場合を考察する。簡単のため、$\Omega = (a, b)$ $a < 0 < b$ $a_m(x)$ の唯一の零点が原点である場合を考えよう。(単純な除法の問題では、処理できないものである。)

$P(x, D)u = 0$ は前定理により $(a, 0)$ 上に $m$ 個の独立解をもつ、単連結な V をとることにより、定義函数を延長して $\mathcal{B}(\Omega)$ の元となる。よってまず $m$ 個の独立解がある。



$(a, 0)$ で $0$ であり，$[0, b)$ で non-zero なものを考えよう。
$V$ の $[0, b)$ にスリットを入れたものを $V_s$ とかく。




$P(z, D_z)\psi = \varphi$ とすれば
$\varphi \in \mathcal{O}(V)$ のとき $\psi \in \mathcal{O}(V_s) \setminus \mathcal{O}(V)$
となるものが，それらをあたえる。

まず $\underline{\dim\left(\mathcal{O}(V)/P\mathcal{O}(V)\right)}$ はある。実際，$\mathcal{O}(V)/P\mathcal{O}(V)$ の一つの class から代表元をとってくれば，$P(z, D)\psi = \varphi$ なる $\psi \in \mathcal{O}(V_s)$ はあるが，$[\psi] \neq 0$ on $[0, b)$．代表元によらぬこと，class が異ればー次独立であることは容易にわかる。

次に $\varphi \in P\mathcal{O}(V)$ を考える。

$P(z, D)\psi = \varphi = P(z, D)\varphi_0$
なる $\exists \varphi_0 \in \mathcal{O}(V)$，$\psi \in \mathcal{O}(V_s)$
$P(z, D)(\psi - \varphi_0) = 0$
これらが $\underline{m \text{ 次元}}$ あるうちで，
$\mathcal{O}(V)$ に入っているものの次元，

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & 0 \\
& \mathrm{Ker}\,P \arrow[d] & \mathrm{Coker}\,P \arrow[ur] & \\
& \mathcal{O}(V) \arrow[r, "P"] \arrow[dr] & \mathcal{O}(V) \arrow[u] & \\
& & \mathrm{Im}\,P \arrow[u] \arrow[dr] & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}
$$

即ち $\underline{\dim \mathrm{Ker}\, P}$ をひいたものも，又独立解を与える。従って全体として

$$
\begin{aligned}
& m + \dim \mathrm{Coker}\, P + (m - \dim \mathrm{Ker}\, P) \\
&= 2m - \mathrm{ind}\,(P : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V))^{1)} \\
&= m + \mathrm{ord}_0\, a_m
\end{aligned}
$$

まとめて

---

1) $\mathrm{ind}\,(P : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V)) = m - \mathrm{ord}_0 a_m$ が知られている。ただし $\mathrm{ord}_0 f$ は $x = 0$ における $f$ の零点の次数．この等式については Appendix 2 を見よ．

Th. 2. 23 $\quad a_m(0) = 0 \quad \Omega = (a, b) \quad a < 0 < b$

$$\Longrightarrow \dim \mathcal{B}(\Omega)^P = m + \operatorname{ord}_0 a_m$$

examples 1. $\quad x^2 \dfrac{du}{dx} + u = 0 \quad x = 0$ は irregular singularity. 独立解は Th. 2.21 より 3つ存在する。

① $u_1 = \begin{cases} 0 & x \geqq 0 \\ e^{1/x} & x < 0 \end{cases}$ これは $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元。

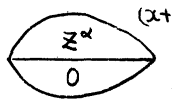
② $u_2 = [\varepsilon(z)\, e^{1/z}] - u_1 = \begin{cases} e^{1/x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

よく知られているように、これは $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に属さない。

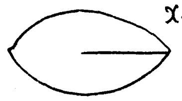
③ $u_3 = [e^{1/z}] = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!\,\nu!}\, \delta^{(\nu-1)}$ これも $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に属さない。

2. $\quad x \dfrac{du}{dx} - \alpha u = 0 \quad x = 0$ は reg. singularity

すべての解は $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $(x + i0)^\alpha = [\varepsilon(z)\, z^\alpha]$ は一つの解である。もう一つの解は.

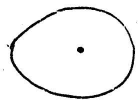
(x+i0)^α



a. $\alpha \notin \mathbb{Z} \qquad x_+^\alpha \equiv \dfrac{-1}{2i \sin \pi\alpha} [(-z)^\alpha]$

x₊^α


b. $\alpha \in \mathbb{N}_0 \qquad x_+^\alpha \equiv \dfrac{-1}{2\pi i} [z^\alpha \log(-z)]$

c. $\alpha \in -\mathbb{N} \qquad \delta^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i} \left[\dfrac{1}{z^{n+1}}\right]$

δ^(n)


$\alpha = -n-1$

a, b の場合一般解は $c_1 x_+^\alpha + c_2 x_-^\alpha$ で与えられ [1]

c の場合は $c_1 P\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) + c_2 \delta^{(n)}(x)$ で与えられる。[1]

なお c の場合も、$g_\alpha(\pm x) \equiv \frac{\mp 1}{2\pi i}[(\pm z)^\alpha \log(\mp z)]$ で定義すれば、$g^\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ $g^\alpha(-x) = \begin{cases} 0 & x>0 \\ (-x)^\alpha & x<0 \end{cases}$

であるが

$$\left(x\frac{d}{dx} - \alpha\right) g_\alpha(\pm x) = \frac{(\mp 1)^{n+1}}{n!}\delta^{(n)}(x)$$ となる。

この例では、$m = 1$, $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}_0} P = \{0\}$ である。

$(x+i0)^\alpha$ は普通の（即ち $m=1$ に対応する）解であり、a, c では $\mathrm{Ker}_{\mathcal{O}_0} P = \{0\}$ であって $P(-z)^\alpha = 0$ より解が生じ、b では、$\mathrm{Ker}_{\mathcal{O}_0} P = \{cz^n \mid c \in \mathbb{C}\}$ で一次元あるため、$\mathcal{B}$ においては、$P(z^n \log(-z)) = z^n$ からもう一つの解が生じている。

---

1) $$x_-^\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2i\sin\pi\alpha}[z^\alpha] & z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0) \quad \alpha \notin \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{2\pi i}[(-z)^\alpha \log z] & \quad \text{〃} \quad \alpha \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$P\frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon(z)}{z^{n+1}} - \frac{\bar{\varepsilon}(z)}{z^{n+1}}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+i0)^{n+1}} + \frac{1}{(x-i0)^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(x \pm i0)^{n+1}} \pm \frac{(-1)^n}{n!}\pi i\,\delta^{(n)}(x)$$

## §6. 超函数の空間の位相.

$K$ compact $\subset \mathbb{R}$ ならば Th 2.16 より.

$$\mathcal{B}_K(\mathbb{R}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus K)/\mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad (FS)\text{-space}$$
$$= \mathcal{A}(K)'$$

特に $K=\{0\}$ (原点) としてみれば, Laurent 展開により

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \ni \varphi \qquad \varphi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i} \alpha_n \frac{1}{z^{n+1}} \bmod \mathcal{O}(\mathbb{C})$$
$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n!\,|\alpha_n|} = 0$$

$f=[\varphi]$ とする。

$\mathcal{A}(\{0\}) \ni g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ この Taylor 展開は $\mathcal{A}(\{0\})$ の位相で収束している。($\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$) 従って $\langle f, g\rangle =$

$$\langle f, \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f, \sum_{n=0}^{k} c_n x^n \rangle$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n n!\, \alpha_n c_n = \lim_{k\to\infty} \langle \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta^{(n)}, g \rangle$$

よって $f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta^{(n)}$ が $\mathcal{B}_{\{0\}}(\mathbb{R})$ の位相で成立する。

$K=[a,b]$ $a\le 0\le b$ とすれば. $\{\sum_{n=0}^{k} \alpha_n \delta^{(n)}(x)\}$ ($\alpha_n$, $k$ は任意にうごく) が $\mathcal{B}_K(\mathbb{R})$ で dense になる。というのは, $g\in\mathcal{A}(K)$ $\langle f, g\rangle = 0\ {}^\forall f \in \{\sum_{n=0}^{k} \alpha_n \delta^{(n)}(x)\} \Rightarrow f$ を適当にとることにより. $g^{(n)}(0)=0$ $n=0,1,\cdots \Rightarrow g=0$. よって $\{\sum \alpha_n \delta^{(n)}\}$ は dense

$f \in \mathcal{B}_K(\mathbb{R})$ のとき $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b x^n f(x)\,dx$ とおけば、
$f(x) = \lim_{h\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta^{(n)}(x)$ である。例えば、$\delta(x-a) = \sum \frac{(-a)^n}{n!}\delta^{(n)}(x)$.

尚、$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ を考慮すれば、$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta^{(n)}(x)$ は
$\overline{\lim}\, n \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ のとき収束して $\mathcal{B}_{\{0\}}$ の元をあらわす。
${}^{\exists}N < {}^{\forall}n$, $c_n = 0$ のときにのみ $\mathcal{D}'_{\{0\}}$ に属する。

Prop. 2.24 $\mathbb{R} \supset L \supset K$ compact sets
$\mathcal{B}_K(\mathbb{R})$ dense in $\mathcal{B}_L(\mathbb{R})$
$\Longleftrightarrow$ $L$ が $K$ に disjoint な成分をもたない。

Proof) $(\Leftarrow)$ $K$ の各連結成分から一点づつ $c_j$ をえらぶと、前述のことと仮定より $\mathcal{B}_K(\mathbb{R}) \supset \{\sum_j \sum_k \alpha_{jk} \delta^{(k)}(x-c_j)\}$ は $\mathcal{B}_L(\mathbb{R})$ で dense. これは又、

$$\mathcal{B}_K(\mathbb{R}) \xrightarrow{inj} \mathcal{B}_L(\mathbb{R}) \quad \text{の dual map}$$
$$\mathcal{A}(K) \longleftarrow \mathcal{A}(L) \quad \text{を考えてもわかる.}$$

$(\Rightarrow)$ disjoint な成分があれば、dense でないことは明らか。∎

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_c(\Omega) &= \varinjlim_K \mathcal{B}_K(\Omega) \quad K \text{ compact} \subset \Omega \\ &= \varinjlim_K (\mathcal{A}(K)') \\ &= \mathcal{A}(\Omega)'\end{aligned}$$

ここで $\mathcal{A}(\Omega) = \varinjlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{A}(K)$ であるが、その位相は $\mathcal{A}(\Omega) = \varprojlim_{V \supset\supset \Omega} \mathcal{O}(V)$ としたものと一致することが知られている[1]。後者の定式化からわかることとして，$\mathcal{A}(\Omega)$ は complete, nuclear, ultrabornologique である。

$\mathcal{B}_c(\Omega)$ の元を compact support の hyperfunction とよぶ。Th. 2. 10 の証明からでもわかるように（P. 33 ） $\Omega$ が bdd open set であるとき，

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{\partial\Omega}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow 0 \quad \text{exact}$$

であるが，$\mathcal{B}_{\partial\Omega}(\mathbb{R})$ dense in $\mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R})$ であるから集合としては $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R}) / \mathcal{B}_{\partial\Omega}(\mathbb{R})$ であっても，右辺に誘導された位相は，密着位相である。

なお，§ 4. における injection

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega)$$

を連続にするような，linear Hausdorff topology は $\mathcal{B}(\Omega)$ 上に存在しないことを注意しておく。

---

1) Martineau [2; 35] をみよ．

## §7、超函数の特異性

$\mathcal{B}(\Omega) \ni f, g$ のとき、積 $f\cdot g$ はどう定義すべきであるか。

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x+i0) - \varphi(x-i0) = \varphi_+ - \varphi_- \\ g(x) = \psi(x+i0) - \psi(x-i0) = \psi_+ - \psi_- \end{cases}$$

を形式的にかければ、

$$f\cdot g = \varphi_+\psi_+ - \varphi_-\psi_+ + \varphi_-\psi_- + \varphi_+\psi_-$$

ここで 〰 の部分は定義可能。他の２項は、

$$(\varphi(x+i0) \in \mathcal{A} \ \text{ or } \ \psi(x-i0) \in \mathcal{A})$$

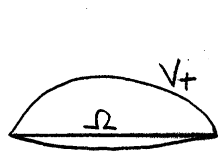
かつ $(\varphi(x-i0) \in \mathcal{A}$ or $\psi(x+i0) \in \mathcal{A})$ ならば定義可能。

例えば、$\dfrac{1}{x+i0}\cdot\dfrac{1}{x+i0}$ は定義可能。しかし、$\delta = \dfrac{-1}{2\pi i}\left(\dfrac{1}{x+i0} - \dfrac{1}{x-i0}\right)$ であるから、$\delta\cdot\delta$ はうまく定義できそうにない。

一般的に矛盾なく定義するためには、超函数の irregularity を詳しく考察せねばならない。それには、$\mathcal{B}/\mathcal{A}$ を調べるのが適当であろう。

$$C_\pm(\Omega) = \mathcal{O}(V_\pm)/\mathcal{O}(V_\pm \cup \Omega) \quad \text{とおけば}^{1)}$$

（但し $V \cap \mathbb{R} = \Omega$）これが $V$ のとり方によらぬこと、presheaf $\Omega \longmapsto C_\pm(\Omega)$ は flabby sheaf であることなどが、




---

1) $\mathcal{O}(V_+ \cup \Omega)$ は $V_+ \cup \Omega$ から $\Omega$ を少しこえて接続される holomorphic fn

この章の§2．におけると同様にしてわかる。

$\mathcal{A}_\pm(\Omega) = \varinjlim \mathcal{O}(V_\pm)$ とおく。 $\varinjlim \mathcal{O}(V_\pm \cup \Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ であり，

$\mathcal{C}_\pm(\Omega) = \mathcal{A}_\pm(\Omega)/\mathcal{A}(\Omega)$ [1)]

$\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_\pm$ の subsheaf とみなせ，さらに $\mathcal{A}_\pm \to \mathcal{B}$ により，$\mathcal{A}$ の $\mathcal{B}$ への埋めこみが分解される。 $\varphi \mapsto \varphi(x \pm i0)$

第2の写像は injective であり，それにより $\mathcal{A}_\pm$ を $\mathcal{B}$ の subsheaf とみなせば，$\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_- = \mathcal{A}$ 従って

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A} & \to & \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_- & \longrightarrow & \mathcal{B} \\
\varphi & \longmapsto & (\varphi, -\varphi) & & \\
 & & (\varphi, \psi) & \longmapsto & \varphi(x+i0) + \psi(x-i0)
\end{array}
$$

による下の可換図式より

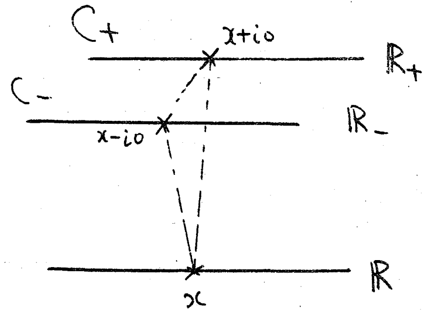
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \oplus \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_- & \to & \mathcal{B} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & \mathcal{A}_+/\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}_-/\mathcal{A} & \to & \mathcal{B}/\mathcal{A} & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

$\mathcal{B}/\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}_+ \oplus \mathcal{C}_-$．$\mathcal{C}_\pm$ の flabbiness より $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ は flabby [2)]

---

1) $\varinjlim$ が exact functor であることより。

2) 実は・$\mathcal{B}$ の flabbiness と $H^1(\Omega, \mathcal{A}) = 0$ より $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の flabbiness はただちに従う。




さて，$\mathbb{R}$ の copy を２つとり $\mathbb{R}_+$，$\mathbb{R}_-$ とし，$\mathbb{R}\ni x$ に対応する点をそれぞれ $x\pm i0\in\mathbb{R}_\pm$ としよう。（それは $\mathbb{R}$ の上岸，下岸のつもりである）$S\mathbb{R}=\mathbb{R}_+\sqcup\mathbb{R}_-$ とすれば，$C_+$，$C_-$ はそれぞれ $\mathbb{R}_+$，$\mathbb{R}_-$ の上の sheaf とみることができる。$S\mathbb{R}$ 上にそのようにして作った sheaf を $C$ とする。exact sequence

$$0\longrightarrow \mathcal{A}\longrightarrow \mathcal{B}\xrightarrow{\beta} C_+\oplus C_-\longrightarrow 0$$

により $f\in\mathcal{B}$ のとき $\beta(f)$ は $C_+\oplus C_-$ の元であるが，又，上のことより $S\mathbb{R}$ 上の sheaf $C$ の元ともおもえる。前者のように思った時の $\beta(f)$ の support を $S\text{-}S_{\mathbb{R}}f$，後者のように思った時の $S\mathbb{R}$ における support を $S\text{-}S_C f$ と記すことにしよう。$S\text{-}S_C f$ の方がより詳しい情報を与えてくれる。

$f_1=\dfrac{1}{x+i0}$　$f_2=\delta(x)$ とすれば　$S\text{-}S_C f_1=\{0+i0\}\subsetneqq\{0+i0,0-i0\}$

$=S\text{-}S_C f_2$　しかし，$S\text{-}S_{\mathbb{R}}f_1=\{0\}=S\text{-}S_{\mathbb{R}}f_2$

$S\mathbb{R}$ における写像 $a$ を　　$a:\begin{array}{l} x+i0\longmapsto x-i0\\ x-i0\longmapsto x+i0\end{array}$

と定めれば，結局次の命題が成立する。

Prop. 2.25　　$S\text{-}S_C f\cap(S\text{-}S_C g)^a\neq\phi\Rightarrow f\times g$ well-defined.

$$S\text{-}S_C fg\subset(S\text{-}S_C f)\cup(S\text{-}S_C g)$$

# 才III章　　層係数 cohomology，多変数函数論

多変数超函数の本質を明確に表現するためには，層係数 cohomology 論が必要不可欠であり，又理論構成上，多変数函数論を駆使せねばならない．この§においてその2つの必要な諸定理を，多くは証明なしに列挙する．一変数の場合との関連などはその都度指摘するが詳細については引用文献を参照されたい．

## §1．層係数 cohomology

### I. Resolution による cohomology

1）層はすでに§2 1）において定義したがいくつかの補足を行う．

（アーベル群の）presheaf $\mathcal{F}$ から次のように位相空間 $\mathcal{F}'$ を構成する．stalk の直和集合 $\mathcal{F}' = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$ に位相を次のように定める．$X \supset U$ open set と $\mathcal{F}(U) \ni s$ をとり，$U$, $s$ を動かして $M_{U,s} = \{s_x \mid x \in U\}$ なるもの全体を開集合の基とする．$\mathcal{F}_x$ の点を $x$ に写す写像を $p: \mathcal{F}' \to X$ とすれば，$p$ は連続であり，$p^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$ はアーベル群の構造をもっている．そこで一般に次の定義をおく．

Def. 3.1　位相空間 $X$ に対し，$X$ 上の層空間（*sheaf space*）

（$\mathcal{F}'$, $p$）とは，$\mathcal{F}'$ が位相空間であり，

1）$p: \mathcal{F}' \to X$ は連続で局所同相写像を与えているものをいう。

（$\mathcal{F}'$, $p$）がアーベル群（環 etc.）の *sheaf space* であるとは，さらに

2）各 $p^{-1}(x)$ がアーベル群（環 etc.）の構造をもち，$\mathcal{F}' \times_X \mathcal{F}' = \{(a,b) \in \mathcal{F}' \times \mathcal{F}' \mid p(a) = p(b)\}$ とおくとき，

$\mathcal{F}' \times_X \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'$　が連続写像であること．

$(a,b) \longmapsto a \pm b$

$\left((a,b) \begin{array}{l} \longmapsto a \pm b \\ \longmapsto a \cdot b \end{array}\right)$

（$\mathcal{F}'$, $p$）を省略して $\mathcal{F}'$ とかく．

直前に作った $\mathcal{F}' = \coprod \mathcal{F}_x$ は *sheaf space* である。

これを *presheaf* $\mathcal{F}$ から作った *sheaf space* とよぶ。

アーベル群の *sheaf space* $\mathcal{F}'$ が与えられたとき，$X$ の部分空間 $A$ から $\mathcal{F}'$ への連続写像 $s$ で，$p \circ s = id_A$ となるものを $A$ 上の $\mathcal{F}'$ の断面（*section*，切断）であるといい，$A$ 上の *section* の全体を $\Gamma(A, \mathcal{F}')$ で表わす。それは自然な方法で和を定めてアーベル群になる。$U$ *open* に $\Gamma(U, \mathcal{F}')$ を対応

させ $r^U_V(s)=s|_V$ により $r^U_V:\Gamma(U,\mathcal{F}')\to\Gamma(V,\mathcal{F}')$ を定めれば $(\Gamma(U,\mathcal{F}');r^U_V)$ は *presheaf* であるが，実は常に *sheaf* になる．それを $\mathcal{F}''$ とおく．$\mathcal{F}'$ が *presheaf* $\mathcal{F}$ から作った *sheaf space* であるとき，$\mathcal{F}''$ を $\mathcal{F}$ から誘導された層（*induced sheaf*）又は $\mathcal{F}$ の *sheafification* とよぶ．特に *sheaf* $\mathcal{F}$ から *sheaf space* $\mathcal{F}'$ を作り，*section* をとれば自然な意味で $\mathcal{F}''\approx\mathcal{F}$ である。逆に *sheafspace* $\mathcal{F}'$ から *section* をとり，*sheaf* $\mathcal{F}''$ を作り，それから *sheaf space* $\mathcal{F}'''$ を作れば自然な意味で $\mathcal{F}'''\approx\mathcal{F}'$．よってこのように対応する層と層空間を同じものの2つの表現とみて，普通同じ記号で表わす．

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ が X 上の *sheaf* $\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ が準同型であるとする。$(\mathrm{Ker}\,\varphi)(U)\equiv\mathrm{Ker}\,\varphi_U$ と定めれば，これは *sheaf* になる。しかし *presheaf* $U\mapsto\mathrm{Coker}\,\varphi_U$ は必らずしも *sheaf* ではなく，これの *sheafification* を $\mathrm{Coker}\,\varphi$ とよぶ。$\varphi$ は各点 $x$ において $\varphi_x:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ を誘導し，$(\mathrm{Ker}\,\varphi)_x=\ker\varphi_x$, $(\mathrm{Im}\,\varphi)_x=\mathrm{Im}\,\varphi_x$, $(\mathrm{Im}\,\varphi)_x=\mathrm{Im}\,\varphi_x$, $(\mathrm{Coker}\,\varphi)_x=\mathrm{Coker}\,\varphi_x$ となり *sheaf space* で見た方が都合のよいことがある。*sheaf* の完全系列 $0\to\mathcal{F}\xrightarrow{f}\mathcal{G}\xrightarrow{g}\mathcal{H}\to 0$ は $\forall x\in X$, $0\to\mathcal{F}_x\xrightarrow{f_x}\mathcal{G}_x\xrightarrow{g_x}\mathcal{H}_x\to 0$ *exact* と同値．

$\varphi$ が *injective*（*surjective*）であることと $\varphi_x$ が *injective* (*surjective*) とは同値になるが、注意すべきことは $\varphi$ が *surjective* であっても，$\varphi_U$ が任意の $U$ について *surjective* であるとはかぎらないことである。(*injective* については成立)

Def. 3.2 位相空間 $X$ の部分集合族 $\Phi$ が *family of supports* であるとは次の条件をみたすものをいう。

(i) $F \in \Phi \Rightarrow F$ *closed*

(ii) $F \in \Phi$, $F \supset F_1$ *closed set* $\Rightarrow F_1 \in \Phi$

(iii) $F, F_1 \in \Phi \Rightarrow F_1 \cup F \in \Phi$

例えば $X \supset S$ *subset* に対して $\{S$ に含まれる *closed set* 全体あるいは $\{$*compact set* 全体$\}$ $\Phi$ を *family of support* とし $\Gamma_\Phi(X; \mathcal{F}) \coloneqq \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid supp\ s \in \Phi\}$ を $\Phi$ に *support* をもつ *section group* という。

Prof. 3.3 $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ *exact*

$$\Rightarrow 0 \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}') \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}) \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}'') \quad exact$$

Prof. 3.4 $\mathcal{F}'$ : *flabby*, $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *exact*

$$\Rightarrow 0 \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}') \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}) \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}'') \to 0 \quad exact$$

($\mathcal{F}'$ が flabby でないと，右端の exactness がこわれるおそれがある.)

Cor. 3.5　$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$　exact

$\mathcal{F}', \mathcal{F}$ ; flabby $\Rightarrow \mathcal{F}''$ flabby

Cor. 3.6　$0 \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^2 \to \cdots$ exact

$\mathcal{F}^i$ $(i = 0, 1, 2 \cdots)$ flabby

$\Rightarrow 0 \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}^0) \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}^1) \to \cdots$ exact

Cor. 3.5, 3.6 の証明)

3.5　右の図式よりただちに従う

第2行の exactness が Prof. 3.4

第1列の exactness は $\mathcal{F}$: flabby より

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathcal{F}'') \arrow[d, dashed] & \\
\Gamma(U, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U, \mathcal{F}'') \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \quad \text{exact} \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

exact

3.6

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
 & & & & & Z^1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & Z^3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[rr] & & \mathcal{F}^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{F}^1 \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathcal{F}^2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{F}^3 \arrow[rr] \arrow[ur] & & \cdots \\
 & & & \mathcal{F}^0 \arrow[ur] & & & & Z_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

と short exact seq に分解して，Cor. 3.5, Prop. 3.4 と用いればよい。■

Th. 3.7 (Godement) X 上の任意の sheaf $\mathcal{F}$ に対して，flabby sheaves $\{\mathcal{L}^i\}_{i=0,1,\cdots}$ が存在して，

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \cdots \quad \text{exact}.$$

これを $\mathcal{F}$ の flabby resolution という．

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}^* \quad \text{ともかく．}$$

Proof) canonical flabby resolution と呼ばれるものを構成する．

$\mathcal{C}^0(U, \mathcal{F}) = \{s \mid X \supset U$ から sheaf space $\mathcal{F}$ への（連続性を考慮しない）map であって $p \circ s = id\}$

presheaf $U \mapsto \mathcal{C}^0(U, \mathcal{F})$ は sheaf である．これを $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ とかく．$\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ が flabby であることは明らか。

定義によって $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ exact

$\mathcal{Z}^0(\mathcal{F}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}$ とおき，同様にして

$0 \to \mathcal{Z}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{Z}^0(\mathcal{F})) \to \mathcal{Z}^1(\mathcal{F}) \to 0$ exact

$\mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{F}) \equiv \mathcal{C}^0(\mathcal{Z}^n(\mathcal{F}))$

$\mathcal{Z}^{n+1}(\mathcal{F}) \equiv \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{F})/\mathcal{Z}^n(\mathcal{F})$ とおけば

$\mathcal{C}^n(\mathcal{F})$ はすべて flabby であり，

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) \to \cdots$ exact ∎

2) cohomology の定義

以下 X はすべての open subsets が paracompact であるとする。そうすれば，X の任意の部分集合への flabby sheaf の制限は又 flabby であり，局所閉集合[1] への soft sheaf の制

1) 開集合と閉集合の共通部分としてあらわされるような集合

限は又 soft である。

Def. 3.8　$\Phi$ を family of supports, $\mathcal{F}$ を $X$ 上の sheaf とする。
$0 \to \mathcal{F} \to C^*(\mathcal{F})$ を canonical flabby resolution とする。

$$H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) \equiv H^p(\Gamma_\Phi(X, C^*(\mathcal{F}))) = \frac{\mathrm{Ker}(\Gamma_\Phi(X, C^p(\mathcal{F})) \to \Gamma_\Phi(X, C^{p+1}(\mathcal{F})))}{\mathrm{Im}(\Gamma_\Phi(X, C^{p-1}(\mathcal{F})) \to \Gamma_\Phi(X, C^p(\mathcal{F})))}$$

と定義し, <u>$\mathcal{F}$ を係数とし $\Phi$ に台をもつ p-th cohomology group</u> という。特に $\Phi = \{S$ に含まれる closed set 全体$\}$ のとき, $H^p_S(X, \mathcal{F}) \equiv H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ を $S$ に台をもつ p-th relative cohomology group といい, $H^p(X, X \setminus S, \mathcal{F})$, $H^p(X \operatorname{mod} X \setminus S, \mathcal{F})$ とも表記する. 又, $H^p_X(X, \mathcal{F})$ は $H^p(X, \mathcal{F})$ とかく。

Th. 3.9　1)　$H^0_\Phi(X, \mathcal{F}) = \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$

2)　$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$　(exact)

$$\Rightarrow 0 \to H^0_\Phi(X, \mathcal{F}') \to H^0_\Phi(X, \mathcal{F}) \to H^0_\Phi(X, \mathcal{F}'')$$
$$\to H^1_\Phi(X, \mathcal{F}') \to H^1_\Phi(X, \mathcal{F}) \to H^1_\Phi(X, \mathcal{F}'')$$
$$\to H^2_\Phi(X, \mathcal{F}') \to \cdots \quad (\text{exact})$$

3)　$\forall S \subset X$　$0 \to H^0_S(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X \setminus S, \mathcal{F})$

$$\to H^1_S(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \cdots \quad (\text{exact})$$

4)　$X \supset Y \supset Z$ とすると、

$$0 \to H^0_{X \setminus Y}(X, \mathcal{F}) \to H^0_{X \setminus Z}(X, \mathcal{F}) \to H_{Y \setminus Z}(Y, \mathcal{F}) \to$$
$$\to H^1_{X \setminus Y}(X, \mathcal{F}) \to \cdots \qquad (exact)$$

5) (*Excision theorem*) $S \subset Y \subset X$, $S \supset F$, $F$ *closed in* $Y$ なら $F$ *closed in* $X$ かつ $F \cap \overline{(X \setminus Y)} = \phi \Rightarrow H^p_S(X, \mathcal{F}) = H^p_S(Y, \mathcal{F}|_Y)$. / *cohomology group* は、*canonical flabby resolution* により定義された。しかし, *cohomology* が消えるような *sheaf* による *resolution* を用いればそれで計算できる。

即ち

Th. 3.10 $\quad 0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \cdots \quad (exact)$

$$H^p_\Phi(X, \mathcal{L}^q) = 0 \qquad (p > 0,\ q = 0, 1, 2 \cdots)$$
$$\Rightarrow H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) = H^p(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{L}^*))$$

このような計算に用いうるのが, *flabby sheaf* あるいは *soft sheaf* による *resolution* である。それらの定義は, §2.1) でのべた。*soft sheaf* に関連して一つ定義をおく。

Def. 3.11 *family of supports* $\Phi$ が PF (*paracompactifying*) であるとは, Def. 3.2 の 3 条件に加えて,

(iv) $F \in \Phi \Rightarrow F$ *paracompact*

(v) $F \in \Phi \Rightarrow F$ のある近傍は $\Phi$ の元である。

をみたすものをいう。

たとえば X が *paracompact* のとき {X の閉集合全体}

X が *locally compact* のとき {X の compact set 全体}

Th. 3.12 (1) $\mathcal{F}$; *flabby* $\Phi$: *family of support*

$$\Rightarrow H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) = 0 \quad p > 0$$

(2) $\mathcal{F}$: *soft* $\Phi$: PF

$$\Rightarrow H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) = 0 \quad p > 0$$

Proof. (1) $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}(\mathcal{F}) \to \cdots$ *exact* であるが更にすべての *sheaf* が *flabby*. Cor. 3.6 より

$$0 \to \Gamma_\Phi(\mathcal{F}) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{C}^0(\mathcal{F})) \to \cdots \quad exact$$

$$\therefore H^0_\Phi(X, \mathcal{F}) = \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}), \quad H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) = 0 \quad p > 0.$$

(2) も Prop. 3.4 において $\mathcal{F}'$: *flabby* を *soft* におきかえたとき同じ結論が従うことより出る. ∎

*soft resolution* として知られているものに, $C^\infty$ p 次微分形式の *sheaf* $\mathcal{E}^p$ による $\mathbb{C}$ の *resolution* (Poincaré の *lemma* による)

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^1 \to \cdots \to \mathcal{E}^n \to 0 \text{ がある.}$$

$\mathcal{D}'$ 値微分形式でも同様に

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{D}'^0 \to \mathcal{D}'^1 \to \cdots \mathcal{D}'^n \to 0$$

又, $\mathcal{O}$ の *resolution* としては

Dolbeault による

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E}^{(0,0)} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{(0,1)} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{(0,n)} \to 0$$

Ehrenpreis による

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{D}'^{(0,0)} \xrightarrow{-\bar\partial} \mathcal{D}'^{(0,1)} \xrightarrow{-\bar\partial} \cdots \xrightarrow{-\bar\partial} \mathcal{D}'^{(0,n)} \to 0$$

などが soft resolution をあたえる。

もう一つの計算法として，covering による cohomology を用いる方法がある。次にそれを述べる。

## 2. Covering Cohomology

$S$: closed (open) $\subset X$ であるとき，

pair $(X, X\setminus S)$ の covering $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ とは

$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ は $X$ の open (closed かつ locally finite) covering

$\mathcal{V}' = \{V_i\}_{i\in I'}$ $(I'\subset I)$ は $X\setminus S$ の covering

となるものをいう。

Def. 3.13 $\mathcal{F}$: sheaf として，$\mathcal{F}$ を係数とする $p$-th oriented relative cochain group $\underline{C^p(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{F})}$ を次のように定義する。

$$C^p(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathcal{F}) \equiv \bigoplus_{(i_0\cdots i_p)}{}' \Gamma(V_{i_0\cdots i_p}, \mathcal{F})$$

$$= \{\varphi = \bigoplus_{(i_0\cdots i_p)} \varphi_{i_0\cdots i_p} \mid ① \ \varphi_{i_0\cdots i_p} \in \Gamma(V_{i_0\cdots i_p}, \mathcal{F})$$

② index に対し交代的 $\varphi_{\cdots i \cdots i \cdots} = 0$

$$\varphi_{\cdots i \cdots j \cdots} + \varphi_{\cdots j \cdots i \cdots} = 0$$

$$③ \ \{i_0, \cdots, i_p\} \subset I' \Rightarrow \varphi_{i_0 \cdots i_p} = 0 \}$$

ここに $V_{i_0 \cdots i_p} = V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_p}$ である.

*coboundary operator* $\delta^p : C^p \to C^{p+1}$ を $\varphi \in C^p(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{F})$ に対し

$$(\delta^p \varphi)_{i_0 \cdots i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \rho^{V_{i_0 \cdots \hat{i_j} \cdots i_{p+1}}}_{V_{i_0 \cdots i_j \cdots i_{p+1}}} \varphi_{i_0 \cdots \hat{i_j} \cdots i_{p+1}}$$ と定める。

$\delta^p$ は *well-defined* であり, $\delta^p \circ \delta^{p-1} = 0$ をみたす *complex* $0 \to C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots$ の *cohomology group* を *relative cohomology of coverings* という

$$H^p(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{F}) \equiv \frac{Ker\, \delta^p}{Im\, \delta^{p-1}}$$

$\mathcal{V}' = \phi$ の場合 $H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ とかく.

$$H^0(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{F}) = \Gamma_S(X, \mathcal{F}) = H^0_S(X, \mathcal{F})$$

$$H^1(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{F}) \subset H^1_S(X, \mathcal{F})$$ がわかる.

これは適当な条件のもとで, *resolution* による *cohomology* と一致する。たとえば,

Th. 3.14 (Leray)

$$H^p(V_{i_0 \cdots i_q}, \mathcal{F}) = 0 \quad {}^\forall p > 0, \ {}^\forall q$$

$$\Rightarrow H^p(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{F}) = H^p_S(X, \mathcal{F})$$

covering $\mathcal{W}$ が $\mathcal{V}$ の細分であるなら，標準的準同型
$H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ が定義され，細分していくときの
帰納的極限が考えられる。
$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) \equiv \varinjlim_{\mathcal{V}} H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ とおき
$\mathcal{F}$ 係数の p-th Čech cohomology group という。

Th. 3.15. (1) $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F}) \quad p = 0, 1$

(2) X が paracompact $\Rightarrow \check{H}^p(X, \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F}) \quad p \geq 0$

X が paracompact という仮定は，不便なものではなく，この
定理により，$H^p(X, \mathcal{F})$ を計算することができる。

## §2. 多変数函数論

第I章における定理を多変数の場合にも拡張したものを，以下にのべる。Th.(A)(B)などは本来多変数の定理であるTh. A, B（下記）を一変数にかきなおしたものである。

1. 諸定理

$\mathbb{C}^n \supset V_{open} \supset K_{compact}$ とする。

$$\hat{K}_V = \{ z \in V \mid |f(z)| \leq \sup_K |f| \quad {}^\forall f \in \mathcal{O}(V) \}$$ を

Kの<u>$\mathcal{O}(V)$-包</u>とよぶ。

$\mathbb{C}^n \supset V_{open}$ であり，$\mathcal{O}(V)$のある元 $f$ が存在し，$f$ は $V$ より真に大きい領域へ解析接続できないとき，$V$ は<u>Stein開集合</u>であるとよぶ。二つのStein開集合の共通部分はSteinである。

Th. A (Cartan)[1)]

$V$ : Stein, $V \supset K_{compact}$

$\Rightarrow \hat{K}_V$ : compact ; $\mathcal{O}(V)$ dense in $\mathcal{O}(\hat{K}_V)$.

Th. B (Cartan)[1)]

$V$ : Stein $\Rightarrow H^p(V, \mathcal{O}) = 0 \quad p > 0$.

---

1) これらは通常Th. A, Bといわれるものより弱い。

一変数の場合との関連をのべておこう。$\mathbb{C} \supset V_{open}$ のとき，$f \in \mathcal{O}(V)$ であって，V より真に大きい領域へは meromorphic function としてすら接続できないような $f$ が必らず存在する。従って一次元の場合，すべての open set は Stein である。Th. A は Th. $(A)_{bis}$ に対応している。Th.(B) は，covering cohomology の言葉でいえば，$H^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}) = 0$ $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_\alpha$ を意味し，Th. 3.15 より $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$。$H^p(V, \mathcal{O}) = 0$ $p \geq 2$ はたとえば soft resolution $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E} \to 0$ によればよい。$\mathbb{C}^n$ の open set の $\mathcal{O}$ 係数の cohomology も $n$ 以上では消えている。

Th. 3.16 (Malgrange) $V_{open} \subset \mathbb{C}^n$

$$\Rightarrow H^p(V, \mathcal{O}) = 0 \qquad p \geq n$$

$\mathbb{C}^n$ では，すべての open set が Stein というわけにはいかないが，適当な部分集合の基本近傍系に Stein であるものをとれるときがある。たとえば

Th. 3.17 (Grauert)

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n & \mathbb{C}^n \\ \cup & \cup \\ S \subset & U_{open} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} {}^{\exists}V : \text{Stein} \\ \\ \text{s.t. } S \subset V \subset U \end{matrix}$$

これにより，Sの近傍系として Stein であるものをとり，

$S = \bigcap_{V:\,\mathrm{Stein}} V$ とおき，Čech cohomology の continuity を用いれば

$$H^p(S, \mathcal{A}) = \varinjlim H^p(V, \mathcal{O}) = 0$$

Cor. 3.18. (Malgrange)

$$^\forall S \subset \mathbb{R}^n \text{ に対して}, \quad H^p(S, \mathcal{A}) = 0 \qquad p > 0$$

2. Martineau - Harvey duality.

さて，Th. 2.2 を cohomology の言葉にいいなおそう。

$\mathbb{C} \supset \underset{\mathrm{open}}{V} \supset \underset{\mathrm{compact}}{K}$ とする。 $\mathcal{V} = \{V_0, V_1\}$ $V_0 = V$

$\mathcal{V}' = \{V_1\}$ $V_1 = V \setminus K$

とすれば，$H^p(V_i, \mathcal{O}) = 0$，$p > 0$ $(i = 0, 1)$ であるから

Th. 3.14 (Leray) の条件でみたされ

$$H^1_K(V, \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O})$$

$C^1(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O})$ の元は一つの成分 $\varphi_{01} \in \Gamma(V_1, \mathcal{O})$ のみをもつ。

$C^2(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) = 0$ より $\mathrm{Ker}\,\delta^1 \simeq \mathcal{O}(V_1)$

$\mathrm{Im}\,\delta^0$ は $^\exists \psi_0 \in \Gamma(V_0, \mathcal{O})$ により

$$\varphi_{01} = (\delta \psi_0)_{01} = -\psi_0 |_{V_1}$$

となるものである。

$H_K^0(V_0, \mathcal{O}) = 0$ より $\rho_{V_1}^{V_0}$ は 1−1 従って $\varphi_{01}$ と $\psi_0$ を同一視すれば $\mathrm{Im}\, \delta^0 = \mathcal{O}(V_0)$

$$\therefore \quad H^1(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) = \mathcal{O}(V \setminus K) / \mathcal{O}(V)$$

即ち Th. 2.2 は

$$\mathcal{O}(K)' = H_K^1(V, \mathcal{O})$$

を示している。これの多変数での定理は次のものである。

Th. 3.19 (Martineau-Harvey)

$$\mathbb{C}^n \supset \underset{\text{open}}{V} \supset \underset{\text{compact}}{K} \qquad H^p(K, \mathcal{O}) = 0 \quad p \geq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_K^p(V, \mathcal{O}) = 0 & p \neq n \\ H_K^n(V, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(K)' \end{cases}$$

Th. 3.20 (Sato, Martineau, Harvey)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{C}^n \\ \text{open} \ \cup & & \cup \ \text{open} \\ \Omega & \subset & V \\ & \text{closed} & \end{array} \Rightarrow H^p_\Omega(V, \mathcal{O}) = 0 \quad (p \neq n)$$

Proof)

$\Omega$ は bounded としてよい

Excision theorem より、$V'$ が $\Omega$ を closed subset とする $\mathbb{C}^n$ の open set ならば、$H^p_\Omega(V', \mathcal{O}) = H^p_\Omega(V, \mathcal{O})$

よって $V' = \mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega$ (ここに $\partial\Omega$ は $\Omega$ の $\mathbb{R}^n$ での境界)

として証明する。$\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega} \subset \mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$

の3つ組の exact sequence ($\mathcal{O}$ は省略する)

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) \to H^0_{\bar{\Omega}}(\mathbb{C}^n) \to H^0_\Omega(\mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega) \to \\ &\to H^1_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) \to \cdots \qquad \cdots \\ &\qquad \cdots \to H^{n-1}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{C}^n) \to H^{n-1}_\Omega(\mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega) \to \\ &\to H^n_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) \to H^n_{\bar{\Omega}}(\mathbb{C}^n) \to H^n_\Omega(\mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega) \to \\ &\to H^{n+1}_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) \to \cdots \end{aligned}$$

Cor. 3.18 より $H^p(\partial\Omega) = H^p(\bar{\Omega}) = 0 \quad p > 0$

であるから、Th. 3.19 を適用して、

$$H^p_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) = H^p_{\bar\Omega}(\mathbb{C}^n) = 0 \qquad p \neq n,$$

$$H^n_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{O}(\partial\Omega)', \quad H^n_{\bar\Omega}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{O}(\bar\Omega)'.$$

上の図式より

$$H^p_{\Omega}(\mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega) = 0 \qquad p \neq n-1, n$$

$p = n-1$ に対しては

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & H^{n-1}_{\Omega}(\mathbb{C}^n\setminus\partial\Omega) & \to & H^n_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) & \to & H^n_{\bar\Omega}(\mathbb{C}^n) \\ & & & & & \updownarrow \text{dual} \\ & & & \mathcal{O}(\partial\Omega) & \longleftarrow & \mathcal{O}(\bar\Omega) \\ & & & & (\text{restriction}) & \end{array}$$

直前にのべたように「$\mathbb{R}^n \supset K$ compact $\Rightarrow \hat{K}_{\mathbb{C}^n} = K$」であり.
従って Th. A より $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ は $\mathcal{O}(K)$ で dense。よって,
$\mathcal{O}(\bar\Omega)$ ($\supset \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$) の $\mathcal{O}(\partial\Omega)$ における image は dense.
従って $H^n_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) \to H^n_{\bar\Omega}(\mathbb{C}^n)$ は injective.

$\therefore\ H^{n-1}_{\Omega}(\mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega) = 0.$ ∎

従って唯一残っている $H^n_\Omega(V, \mathcal{O})$ に意味がありそうにおもわれる。実際それが $\Omega$ 上の hyperfunction である。以上の準備のもとに、次§で多変数超函数の基本的性質をのべる。

# 第IV章　多変数超函数

まず、cohomology を用いて定義し、その後で、正則函数の境界値としての見方を説明する。

## §1. 定義と基本的性質

$\mathbb{R}^n \supset \Omega$ open, $\mathbb{C}^n \supset V$ open は $\Omega$ の複素近傍で、$\Omega$ を closed set として含むとする。

Def. 4.1　$\mathcal{B}(\Omega) \equiv H^n_\Omega(V, \mathcal{O})$ を $\Omega$ 上の超函数の空間といい、その元を超函数（hyperfunction）と呼ぶ。

切除定理（Th. 3.9　5)）によれば、$\mathcal{B}(\Omega)$ は $V$ の選び方にはよらない。$\mathcal{B} : \Omega \longmapsto \mathcal{B}(\Omega)$ は presheaf をなす。

Th. 4.2　$\mathcal{B}$ は sheaf である。

証明はしないが、Th. 3.20 が $p = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ について成立することが本質的であることを注意しておく。

Th. 4.3　$\mathcal{B}$ は flabby である。

これは重要であるから、後に証明をあたえる。

Def. 4.4　$\Omega \supset K$ compact　$\mathcal{B}(\Omega)$ の元で、support が $K$

に入るもの全体のなす空間を $\mathcal{B}_K(\Omega)$ とかく.

$$0 \to \mathcal{B}_K(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega \setminus K) \longrightarrow 0 \quad \text{exact}$$

は明らか.

次の定理は Th. 2.16 に相当する.

Th. 4.5 $\quad \mathcal{B}_K(\Omega) = H^n_K(V, \mathcal{O}) = \mathcal{A}(K)'$

Proof) triple $V \setminus \Omega \subset V \setminus K \subset V$ の exact seq.

(Th. 3.9 4)) $H^{n-1}_{\Omega-K}(V\setminus K, \mathcal{O}) \longrightarrow H^n_K(V, \mathcal{O}) \longrightarrow H^n_\Omega(V, \mathcal{O})$

$\longrightarrow H^n_{\Omega-K}(V \setminus K, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{n+1}_K(V, \mathcal{O})$ において.

$$H^{n-1}_{\Omega-K}(V\setminus K, \mathcal{O}) = 0 \quad (\because \text{Th. 3.20})$$

$$H^{n+1}_K(V, \mathcal{O}) = 0 \quad (\because \text{Th. 3.19})$$

$H^n_\Omega(V, \mathcal{O}) = \mathcal{B}(\Omega)$, $\quad H^n_{\Omega-K}(V\setminus K, \mathcal{O}) = \mathcal{B}(\Omega \setminus K)$

$\therefore \mathcal{B}_K(\Omega) \simeq H^n_K(V, \mathcal{O}) = \mathcal{A}(K)'$ (Th. 3.19) ■

これにより, $\mathcal{B}_K(\Omega)$は (FS)-space になっている. さて, Th. 4.3 の証明を与える.

$\Omega$を$\mathbb{R}^n$ の bdd open set とする. $\partial\Omega$ compact $\subset \mathbb{R}^n$

Proof of Th. 4.3) triple $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega} \subset \mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega \subset \mathbb{C}^n$ に関する exact seq より

$$H^n_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^n_\Omega(\mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{n+1}_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \text{ (exact)}$$

Th. 3.19 より $\quad H^{n+1}_{\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$

Th. 4.5 より $\quad H^n_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = \mathcal{B}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$

定義より　　$H^n_\Omega(\mathbb{C}^n \setminus \partial\Omega, \mathcal{O}) = \mathcal{B}(\Omega)$

$\therefore \quad \mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow 0$　　exact.

flabbiness は局所的に決定されるから、$\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}^n$ 上 flabby である。■

尚、一変数のときと同じく、

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{\partial\Omega}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow 0 \quad \text{exact}$$

より、代数的には $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}_{\bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n) / \mathcal{B}_{\partial\Omega}(\mathbb{R}^n)$ であっても、右辺に誘導される商位相は密着である。

微分作用素についても、一変数と同様のことが成立する。

$$P(x, D_x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)^\alpha \qquad \begin{array}{l}\alpha : \text{multi index} \\ a_\alpha(x) \in \mathcal{A}(\Omega)\end{array}$$

$P(z, D_z) = \sum a_\alpha(z)\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha$ を $P(x, D_x)$ の $\mathcal{O}(V)$ $(\mathbb{C}^n \supset V \supset \Omega)$ への拡張とする。

$P(z, D)$ は sheaf hom $P : \mathcal{O}|_V \longrightarrow \mathcal{O}|_V$ をひきおこす。

それが induce した homomorphism

$$P : H^n_\Omega(V, \mathcal{O}) \longrightarrow H^n_\Omega(V, \mathcal{O})$$

は、$P(x, D)$ の拡張のしかたによらず決定する。局所化すれば、sheaf hom $P : \mathcal{B}|_\Omega \to \mathcal{B}|_\Omega$ をうる。

Th. 4.6　　$\mathbb{R}^n \supset \Omega$ open $\supset K$ compact とする。

$$P(x, D) : \mathcal{B}_K(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}_K(\Omega)$$

は連続であり、$P'(x, D)$ を $P(x, D)$ の formal adjoint とすれば $P'(x, D) : \mathcal{a}(K) \longrightarrow \mathcal{a}(K)$ の dual map と一致している。

$\mathcal{D}'$ の $\mathcal{B}$ への embedding も一変数と同様になされる。$K$ compact $\subset \Omega$ のとき、

$$\iota : \mathcal{D}'_K(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}_K(\Omega) \text{ を、}$$

$f \in \mathcal{D}'_K(\Omega)$ を自然に $\mathcal{a}(K)'$ とみなす写像とし、それにより

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{となる。}$$

## §2. 正則函数の類としての超函数

1. 一変数の場合、hyperfunction を正則函数の境界値としてとらえ解釈した。これは応用においても、又 $\mathcal{B}$ の構造をみきわめるにも有効な立場である。多変数の場合の、それに相当するものをみよう。

$\mathbb{R}^n \supset \Omega$ open　$V$ を $\Omega$ の Stein 近傍で $V \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ とする。$\mathbb{C}^n \ni z = (z_1, \cdots, z_n)$ とかく。$V_0 = V$,
$V_j = \{ z \in V \mid \mathrm{Im}\, z_j \neq 0 \}$,　$\hat{V}_j = \bigcap_{i \neq j} V_i$,
$V \# \Omega = V \cap (\mathbb{C} - \mathbb{R})^n$ と定める。$\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \cdots V_n\}$
$\mathcal{V}' = \{V_1, \cdots, V_n\}$ とすれば $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ は $(V, V \setminus \Omega)$ を cover する。$V_j$ およびそれらの交わりは Stein.
$V \# \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} V_i = \bigcap_{i=1}^{n} \hat{V}_i$ である。

Th. 4.7
$$\mathcal{B}(\Omega) = H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) = \mathcal{O}(V \# \Omega) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(\hat{V}_j)$$

これは Def. 2.7 に相当する。

Proof) $V_{i_0 \cdots i_q}$ が Stein であることより Th. 3.14 (Leray) によって初めの同型が従う。

$V_j$ が $n+1$ 個しかないから、$\mathrm{Ker}\, \delta^n = C^n$ であり.

$$H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) = C^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) / \delta C^{n-1}(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O})$$

$C^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) \ni \varphi_{01\cdots\cdots n} \in \mathcal{O}(V_{01\cdots\cdots n}) = \mathcal{O}(V \# \Omega)$.

一方、$C^{n-1}(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) \ni \varphi$ は$n$個の成分

$\varphi_{01\cdots\hat{j}\cdots n} \in \mathcal{O}(\hat{V}_j) \quad j = 1, \cdots\cdots n$ と

$\varphi_{12\cdots\cdots n} = 0$ をもつ、つまり

$$C^{n-1}(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{O}(\hat{V}_j)$$

$$(\delta\varphi)_{01\cdots\cdots n} = -\varphi_{02\cdots\cdots n} + \varphi_{013\cdots\cdots n} + \cdots\cdots + (-1)^n \varphi_{01\cdots n-1}$$

$$\therefore \delta' C^{n-1}(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{O}) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(\hat{V}_j) \quad \blacksquare$$

Def. 4.8 Th. 4.7 の同型において、$\varphi \in \mathcal{O}(V \# \Omega)$ に対応する $\mathcal{B}(\Omega)$ の元を $[\varphi]$ とかき、$\varphi$ を $[\varphi]$ の定義函数と呼ぶ。

このとき Th. 2.16 の積分表示に対応して次の定理がある。

Th. 4.9 (Harvey) $\mathbb{R}^n \supset K$ compact $K = K_1 \times \cdots\cdots \times K_n$ (直積) のとき

$$\mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n) = \mathcal{O}\left(\prod_{j=1}^{n} (\mathbb{C} \setminus K_j)\right) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}\left((\mathbb{C} \setminus K_1) \times \cdots \times \overset{j}{\mathbb{C}} \times \cdots \times (\mathbb{C} \setminus K_n)\right)$$

$D_j$ をなめらかな境界をもつ $\mathbb{C}$ の領域で $D_j \supset K_j$ とする。

$\varphi \in \mathcal{O}(\pi(\mathbb{C} \setminus K_j))$ $\quad f \in \mathcal{O}(D_1 \times \cdots\cdots \times D_j)$ に対し

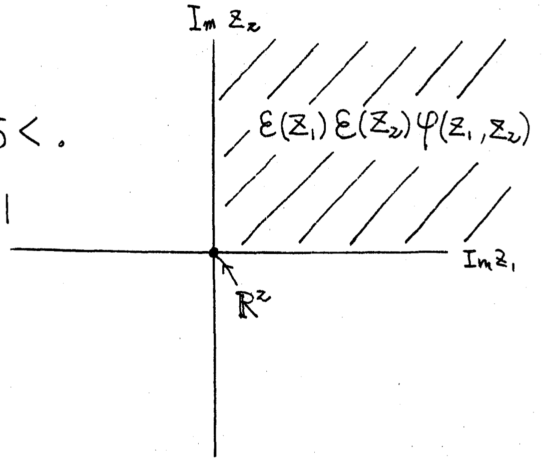
$$\langle [\varphi], f \rangle = (-1)^n \int_{\partial D_1 \times \cdots \times \partial D_n} \varphi(z) f(z)\, dz_1 \cdots\cdots dz_n$$

2. 1において、hyperfunction を正則函数の境界値とみる方法を説明したが、ここではそれを押しすすめ、又 hyperfunction の特異性と定義関数の関係、積についての説明を与える。

Th.4.7 より

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{O}((\mathbb{C}-\mathbb{R})^n) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}((\mathbb{C}-\mathbb{R})^{j-1} \times \mathbb{C} \times (\mathbb{C}-\mathbb{R})^{n-j})$$

である。




$\Theta : \mathcal{O}((\mathbb{C}-\mathbb{R})^n) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ とおく。

$\forall \varphi \in \mathcal{O}((\mathbb{C}-\mathbb{R})^n)$ と $+1$, $-1$ の $n$ 個の順列, $2^n$ 個の各々 $(\sigma_1, \cdots\cdots \sigma_n)$ に対して各象限からの"境界値"を次のように定義する。

$$\varphi(x_1 + i\sigma_1 0, \cdots\cdots, x_n + i\sigma_n 0) = \left[\left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j \varepsilon(\sigma_j z_j)\right) \varphi(z_1, \cdots, z_n)\right]$$

そうすれば,

$$[\varphi](x_1, \cdots x_n) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \, \varphi(x_j + i\sigma_j 0)$$

とあらわせ、これが各方向からの境界値の和としての表示を与えている。

---

1) $\varepsilon(z) = \begin{cases} 1 & \mathrm{Im}\, z > 0 \\ 0 & \mathrm{Im}\, z < 0 \end{cases}$

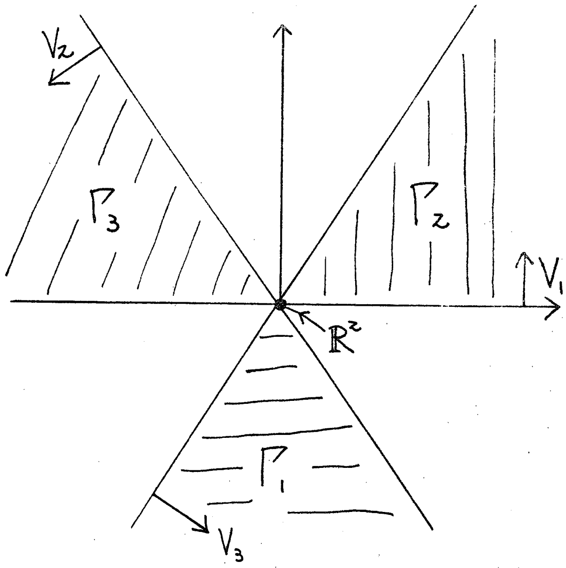
2) $\operatorname{sgn} \sigma = \prod \sigma_j$

又、右図のように3つの半空間からなる covering をとれば

$\mathcal{U} = \{\mathbb{C}^2, V_1, V_2, V_3\}$

$\mathcal{U}' = \{V_1, V_2, V_3\}$

として $H^2(\mathcal{U}, \mathrm{mod}\,\mathcal{U}', \mathcal{O})$ を計算すればわかるように




$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \frac{\mathcal{O}(T(\Gamma_1)) \oplus \mathcal{O}(T(\Gamma_2)) \oplus \mathcal{O}(T(\Gamma_3))}{(\mathcal{O}(V_1) \oplus \mathcal{O}(V_2) \oplus \mathcal{O}(V_3)) / \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{O}(V_1) \oplus \mathcal{O}(V_2) \oplus \mathcal{O}(V_3) \longrightarrow \mathcal{O}(T(\Gamma_1)) \oplus \mathcal{O}(T(\Gamma_2)) \oplus \mathcal{O}(T(\Gamma_3))$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi, \varphi, \varphi)$$

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \longmapsto (\varphi_2 - \varphi_3, \varphi_3 - \varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2)$$

ここで $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}^n) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ を用いた。

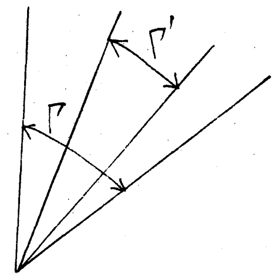
(ただし $T(\Gamma_j) = \mathbb{R}^2 \times i\Gamma_j = V_k \cap V_l$, $j, k, l$ すべて異なる)

この式をみれば、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ の元は $\varphi_j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2 \times i\Gamma_j)$ によって、あたかも $\varphi_1(x + i\Gamma_1 0) + \varphi_2(x + i\Gamma_2 0) + \varphi_3(x + i\Gamma_3 0)$ とかけていることがわかる。$n$次元の場合も、$\mathbb{C}^n - \mathbb{R}^n$ を $n+1$ 個の半空間で cover して、同様のことが成立する。

さて、もっと一般に、任意に open convex cone $\Gamma$ が与えられたとき、$\mathcal{O}(T(\Gamma))$ の元 $\varphi$ [1] の、$\Gamma$ にそっての

[1] $T(\Gamma) = \mathbb{R}^n \times i\Gamma \subset \mathbb{C}^n$

境界値　$\varphi(x+i\Gamma 0)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$　が定義される．
それには．与えられたcone を affine transform して．たとえば前の場合に帰着させる．すなわち $\Gamma$ を $\Gamma_1$ に変換し $\varphi(z)$ がその変換に応じて $\psi(z')$ になるとし．$\Gamma_2$ と $\Gamma_3$ では $0$．$\Gamma_1$ において $\psi(z')$ とおいた $n$-class をもとにもどせばよい．
ここで $\Gamma\supset\Gamma'$ として $\varphi|_{T(\Gamma')}$ の境界値を考えても、cohomology class としてはかわらない




$$\varphi(x+i\Gamma 0)=\varphi(x+i\Gamma' 0)$$

これは《 the Edge of the Wedge theorem 》からの帰結である．
そして、任意の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の元を表現するためには、cones $\Gamma_1,\cdots\cdots,\Gamma_m$ を $\Gamma_1^*\cup\cdots\cdots\cup\Gamma_m^*=\mathbb{R}^n$ となるようにすればいいことがわかっており．[1]

（ここに $\Gamma^*$ は dual cone : $\Gamma^*=\{\xi\in\mathbb{R}^n\,|\,\langle x,\xi\rangle\geqq 0,\ {}^\forall x\in\Gamma\}$ ）

---

(1)　これらの境界値としての表示に関係する．《 the Edge of the Wedge theorem》について．詳細はたとえば Morimoto [1:36] をみよ．

そのとき、 $$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{O}(T(\Gamma_1)) \oplus \cdots\cdots \oplus \mathcal{O}(T(\Gamma_m))/\sim$$

とかける。ただし $/\sim$ は適当な equivalence relation である。即ち、直観的には、"境界値の和"

$$f(x) = \varphi_1(x+i\Gamma_1 0) + \cdots\cdots + \varphi_m(x+i\Gamma_m 0)$$

とあらわされるのである。[1]

ところで個々の hyperfunction に対しては、上に述べたようなすべての $\{\Gamma_j\}$ が必要なわけでなく、適当な方向からの境界値として表示されることがある。そこで hyperfunction の singular support を次のように定義しよう。

まず、$V$ を $x\in\mathbb{R}^n$ の nbd. $K$ を $S^*$[2] の closed set とし、

$$S\text{-}S(f|_V) \subset V\times K$$ ということを、

「$K$を含む任意の open set $\mathcal{N}\subset S^*$ に対して、$f(x)|_V$ は先に述べたような cones $\{\Gamma_1,\cdots\cdots,\Gamma_m\}$ による cohomology class $\Sigma\varphi_j(x+i\Gamma_j 0)$ として表わされ、

---

1) $\mathcal{D}'$ においては A.Martineau が行ない [1; 7, 8, 17] Morimoto はそれを整理し $\mathcal{B}$ にまでおしすすめた。

2) sphere $S^{n-1}$ であるのが、cotangential なので $*$ によりあらわす。

$(\varphi_j \in \mathcal{O}(V \times i\Gamma_j))$, $\varphi_k = 0$ $\exists l < k \leq m$,
$\Gamma_1^* \cup \cdots\cdots \cup \Gamma_l^* \subset \tilde{\mathcal{N}} = \bigcup_{t>0} t\mathcal{N}$ となること」
と定める。

$$(S-Sf)_x = \bigcap_{\substack{V \text{nbd} \\ \text{of } x}} \Big( \bigcap_{\substack{\text{such} \\ K}} V \times K \Big) \subset \{x\} \times S^*$$

とおき、
$(S-Sf)_x$ をつなぎあわせた $\mathbb{R}^n \times S^*$ の部分集合を
$S-Sf$ と定義する。 $\Omega$ open $\subset \mathbb{R}^n$ において $\mathcal{B}(\Omega) \ni f(x)$
が $f(x) = \varphi(x + i\Gamma 0)$ とかけるのなら $S-Sf \subset \Omega \times \Gamma^*$
であるが、実は次の定理が成りたつ。

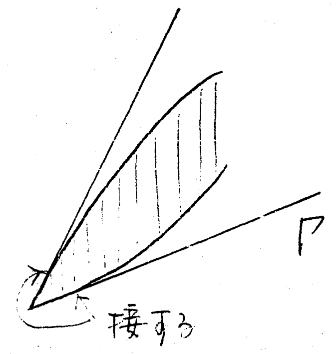
Th. 4.10 $\quad f \in \mathcal{B}(\Omega)$ のとき、

$$S-Sf \subset \Omega \times \Gamma^*$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \varphi \in \varprojlim_{\Gamma' \ll \Gamma} \varinjlim_{V \supset \Omega} \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma')) \quad V \cap \mathbb{R}^n = \Omega$$

$$f(x) = \varphi(x + i\Gamma 0)$$

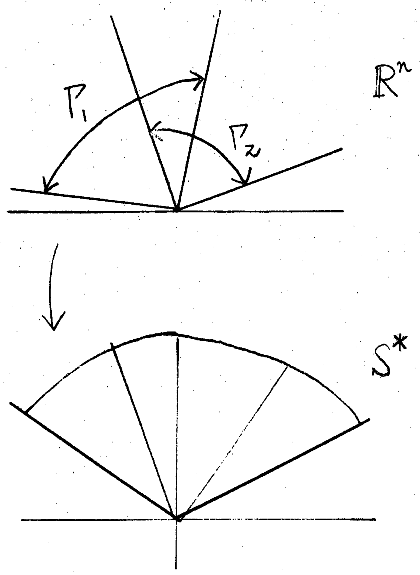
$\varinjlim$ をとるのは、境界値をとるのだから $\Omega$ のある近傍で定義されていればよいからであり、
$\varprojlim$ をとるのは 右図のような領域からの境界値でもよいからである。



$\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ とあらわされ、$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ が proper convex cone であるとき exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(T(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) \longrightarrow \mathcal{O}(T(\Gamma_1)) \oplus \mathcal{O}(T(\Gamma_2)) \longrightarrow \mathcal{O}(T(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)) \longrightarrow 0$$
$$\varphi \longmapsto (\varphi, \ -\varphi)$$
$$(\varphi_1, \ \varphi_2) \longmapsto \varphi_1 + \varphi_2$$

により、




$\mathcal{O}(T(\Gamma))$ の函数の境界値として表わされる hyperfunction は $\mathcal{O}(T(\Gamma_1))$ ならびに $\mathcal{O}(T(\Gamma_2))$ のそれの和としてあらわされる. つまり singular-support は "分解可能" なものであり、これらのことを深めれば、実は $S - S\mathfrak{f}$ は ある sheaf の section の support となるのである。実際, $S^*\mathbb{R}^n$ 上に hyperfunction の "特異性" を表現する佐藤の sheaf $\mathcal{C}$ が構成され、projection $\pi : S^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ の direct image により

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \pi_* \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

という exact sequence が成立することを注意しておく[1]

---

1) Morimoto [1; 36], [1; 47] の柏原記 [1; 63] および [1; 81] の 11 などをみよ。

従って $\pi_* \mathcal{C}$ は flabby であるが、実は $\mathcal{C}$ 自身 flabby であることが 柏原正樹により証明されている。

さて、積について述べておこう。

$S^*$ の subset $A$ に対し、$D(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle x,\xi\rangle \geq 0 \quad \forall\xi\in A\}$ とおく。

$a: S^* \longrightarrow S^* \qquad a(\xi)=-\xi$ と定める。

$I, J$ を $S^*$ の convex open sets とする。

$I\cap J^a \neq \phi$ とする。そのとき、$D(I)\cap D(J)\ni x$ とすれば $\langle x,\xi\rangle=0 \quad \forall\xi\in I\cap J^a$ となり $x=0$。

逆に $D(I)\cap D(J)=\{0\}$ とすれば、$D(I\cup J)=\{0\}$ となり、$^\exists\xi\in I\cup J$, $\quad$ s.t. $-\xi\in I\cup J$. $I, J$ はともに convex だから $I\cap J^a\neq\phi$.

従って

$$I\cap J^a=\phi \iff D(I)\cap D(J) \text{ は cone である.}$$
(i.e. $=\{0\}$ でない)

$S^*$ の closed subsets $A$, $B$ があり、$A\cap B^a=\phi$ であれば、$A$, $B$ ともに適当に convex open sets で cover することにより、上のことから、それら $A$ の covering dual cones は $B$ の covering の どの dual cones とも cone で交わるようにできる。

従って、特に Th. 4.10 より

$S-Sf \cap (S-Sg)^a = \phi$ ならば[1] localに

$$\begin{cases} f(x) = \sum \varphi_j (x + i\Gamma_j 0) \\ g(x) = \sum \psi_k (x + i\Gamma'_k 0) \end{cases}$$

かつ $\Gamma_j \cap \Gamma'_k \neq \phi$ とできる．

そこで

$$(fg)(x) = \sum \varphi_j \psi_k (x + i(\Gamma_j \cap \Gamma'_k) 0)$$

とおくと，これが well-defined である．即ち，これは $\{\Gamma_j\}$ $\{\Gamma'_k\}$ などのとり方，$\{\varphi_j\}$ $\{\psi_k\}$ などのとり方によらないことがわかる．又，$S-S$ についても状況がわかる．即ち，$x^*, y^* \in S^*\mathbb{R}^n$ のとき $\langle x^*, y^* \rangle$ を $x^*$ と $y^*$ を結ぶ劣弧[2]．$A, B \subset S^*\mathbb{R}^n$ に対し

$$\langle A, B \rangle = \bigcup \{ \langle x^*, y^* \rangle \mid (x^*, y^*) \in A \underset{\mathbb{R}^n}{\times} B \}$$

とする．

**Th. 4.11** $S-Sf \cap (S-Sg)^a = \phi$ ならば，$f \cdot g$ は定義され，
$$S-S(fg) \subset \langle S-S(f), S-S(g) \rangle$$
である。

---

1) $a$; $S^*\mathbb{R}^n \longrightarrow S^*\mathbb{R}^n$, $(x, \xi) \longmapsto (x, -\xi)$

2) $x^* = -y^*$ のときは $\langle x^*, y^* \rangle = S^*$ とする．

# §3. 偏微分方程式

## 1. 定数係数偏微分方程式

### 1) 基本定理

sheaf $\mathcal{F}$ を $\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{O}$ のいずれかとする

$$P(D) = \sum a_\alpha D^\alpha \quad (a_\alpha : (r_1 \times r_0)\ \text{matrix})$$

$$D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \quad \alpha : \text{multiindex}$$

を定数係数微分作用素，

$P'(D) = {}^tP(-D)$ （従って $P''(x) = P(x)$）をその転置作用素とする。 $P(D) : \mathcal{F}(\Omega)^{r_0} \to \mathcal{F}(\Omega)^{r_1}$ は $\mathcal{F}^{r_0} \to \mathcal{F}^{r_1}$ なる sheaf hom を induce する。 その Kernel を $\mathcal{F}^P$ とかくことにする。

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^P \longrightarrow \mathcal{F}^{r_0} \xrightarrow{P(D)} \mathcal{F}^{r_1} \qquad \text{exact}.$$

$P'(x)$ は $\mathbb{C}[x]^{r_1} \longrightarrow \mathbb{C}[x]^{r_0}$ なる ring hom を与えるが，（$\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$） $\mathrm{Ker}\, P'(x)$ は $\mathbb{C}[x]$ 上 有限生成加群であるから，$\exists r_2, Q'(x)$ s.t.[1)]

$$\mathbb{C}[x]^{r_2} \xrightarrow{Q'(x)} \mathbb{C}[x]^{r_1} \xrightarrow{P'(x)} \mathbb{C}[x]^{r_0} \qquad \text{exact}$$

$Q(D)$ （$= {}^tQ'(-D)$）を $P(D)$ の compatibility system と呼ぶ。

1) $\mathrm{Ker}\, P'(x) = \sum_{i=1}^{r_2} Q_i(x)\mathbb{C}[x]$ 　$Q_i(x) \in \mathbb{C}[x]^{r_1}$ のとき，$Q'(x) = (Q_1, \cdots, Q_{r_2}) \in (r_1 \times r_2)$ matrix とすればよい。

次の2つの定理が知られている。

Th. 4. 12. (Malgrange, Ehrenpreis, Hörmander, Komatsu)

$\Omega$: convex open set

$\mathcal{F} = \mathcal{E}, \mathcal{D}', \mathcal{O}, \mathcal{B}$ のとき,

$$\mathcal{F}(\Omega)^{r_0} \xrightarrow{P(D)} \mathcal{F}(\Omega)^{r_1} \xrightarrow{Q(D)} \mathcal{F}(\Omega)^{r_2} \text{ exact}$$

即ち, $P(D)u = f$ は, $Q(D)f = 0$ のとき, そのときに限り解をもつ。

Remark: $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ に対しては不明である。[1) ] というのは, dual をとり, compact support の場合へ帰着させて, $Q'(D)$ が closed range であることをいう従来の方針では, closed range theorem が $\mathcal{A}$-category で示されていないためあつかえないのである。 $K$ が convex compact の時, $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ とし, $\Omega$ を $K$ におきかえれば成立する。

Th. 4. 13. (Petrowsky, Hörmander, Harvey, Bengel)

$$\mathcal{A}^P = \mathcal{B}^P \Leftrightarrow P: \text{elliptic}$$

ここに $P(D)$ elliptic $\equiv$ $r_1 \geq r_0$ ;

$$V \equiv \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{rank} P(\zeta) < r_0\}$$

$$\exists C, \quad |\operatorname{Re}\zeta| \leq C(1 + |\operatorname{Im}\zeta|), \ \zeta \in V.$$

1) 特別の場合については 河合 [1; 52, 81の4, および 75] が肯定的に解いた。Hörmander [3, 56] は肯定的であるための必要十分条件を与えた。

$P(D)$ not elliptic $\Rightarrow$ $\mathcal{B}^P \neq \mathcal{D}'^P$ が知られている
(Harvey)

Th. 4. 14 (Harvey)

$P(D)$ が single operator なら 任意の open set $\Omega$ に対し

$$\mathcal{B}(\Omega) \xrightarrow{P(D)} \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow 0 \qquad \text{exact}$$

Proof. $P(D)$ の compatibility system として 0 がとれる.

$\mathbb{R}^n$ は convex set であるから Th. 4. 12 を適用して

下の図式

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{P(D)} & \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{B}(\Omega) & \xrightarrow{P(D)} & \mathcal{B}(\Omega) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & &
\end{array}$$

で第一行は exact. 列は flabbiness より exact.

よって第二行は exact.

Remark. 任意の single operator $P(D)$ に対して

$P(D)\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ 又は

$P(D)\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$ ならば,

$\Omega$ は convex になることが知られている。

これは $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'$ と $\mathcal{B}$ の解の差を顕著にあらわしている。[1)]

1) 大島[1; 88]も参照せよ.

次に　$P(D)$を single elliptic operator とする　$(P'(D)=P(-D))$

Th. 4.15　(Grothendieck, Bengel)

$\mathbb{R}^n \supset V$ open $\supset K$ compact

$\Rightarrow$ $H^0_K(V, \mathcal{B}^P) = 0$,

$H^1_K(V, \mathcal{B}^P) = (\mathcal{a}^{P'}(K))' = \mathcal{B}^P(V \setminus K) / \mathcal{B}^P(V)$.

Proof)　Resolutions

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}^P \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{P} \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow \mathcal{a} \xleftarrow{P'} \mathcal{a} \longleftarrow \mathcal{a}^{P'} \longleftarrow 0$$

を考える。第一行は flabby resolution 第二行は flabby ではないが，　$H^p(K, \mathcal{a}) = 0$　$p \geq 1$ (Cor. 3.18) に注意．　これより

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_K(V) \xrightarrow{P(D)} \mathcal{B}_K(V) \longrightarrow 0 \quad \text{(FS)-sps.}$$

$$0 \longleftarrow \mathcal{a}(K) \xleftarrow{P'(D)} \mathcal{a}(K) \longleftarrow 0 \quad \text{(DFS)-sps.}$$

なる complexes を得，上下たがいに dual である。$P(D)$, $P'(D)$ のどちらかが closed range なら他方もそうであり，cohomology groups は dual になる (Ap. 1)

$P$ : elliptic $\Rightarrow$ $P'$ : elliptic $\Rightarrow$ $\mathcal{B}^{P'}(K) = \mathcal{a}^{P'}(K)$ (Th 4.13)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^{P'}(K) & \longrightarrow & \mathcal{B}(K) & \xrightarrow{P'} & \mathcal{B}(K) & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\ & & \| & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{a}^{P'}(K) & \longrightarrow & \mathcal{a}(K) & \xrightarrow{P'} & \mathcal{a}(K) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

どちらで 1ー cohomology を計算しても同じであるから
上で計算すれば, $H^1(K, \mathcal{a}^{P'}) = 0$ よって 下も exactであり
$P' : \mathcal{a}(K) \longrightarrow \mathcal{a}(K)$ は onto 故閉値域. 従って,

$$H^0_K(V, \mathcal{B}^P) = 0' = 0,$$

$$H^1_K(V, \mathcal{B}^P) = (\mathcal{a}^{P'}(K))'.$$

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^0_K(V, \mathcal{B}^P) \longrightarrow H^0(V, \mathcal{B}^P) \longrightarrow H^0(V \setminus K, \mathcal{B}^P) \\ \qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad 0 \\ \longrightarrow H^1_K(V, \mathcal{B}^P) \longrightarrow H^1(V, \mathcal{B}^P) \longrightarrow \cdots\cdots \end{array}$$

再び exactな $0 \longrightarrow \mathcal{B}^P(V) \longrightarrow \mathcal{B}(V) \xrightarrow{P} \mathcal{B}(V) \longrightarrow 0$ より

$H^1(V, \mathcal{B}^P) = 0$ であり,

$$H^1_K(V, \mathcal{B}^P) = \mathcal{B}^P(V \setminus K)/\mathcal{B}^P(V) = \mathcal{a}^P(V \setminus K)/\mathcal{a}^P(V).$$

Remark. 上の証明では $H^1(V, \mathcal{B}^P) = 0$ と $H^1(K, \mathcal{a}^{P'}) = 0$ が本質的であった。 従って 仮定は

$P$ : (single or compatibility system $Q = 0$)
かつ (elliptic or $H^1(K, \mathcal{a}^{P'}) = 0$)

として 定理は成立する.

2) Alexander-Pontrjagin's th.

Th. 4.16 (Alexander-Pontrjagin)

$\mathbb{R}^n \supset V$ open $\supset K$ compact

$$\Rightarrow \underset{(D.F.S)}{H^p(K, \mathbb{C})} \underset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} \underset{(F.S)}{H_K^{n-p}(V, \mathbb{C})}$$

Proof ).
$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B}^{(0)} \xrightarrow{d} \mathcal{B}^{(1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{B}^{(n)} \longrightarrow 0$$
(flabby res.)
$$0 \longleftarrow \mathcal{a}^{(n)} \xleftarrow{-d} \mathcal{a}^{(n-1)} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathcal{a}^{(0)} \xleftarrow{-d} \mathbb{C} \longleftarrow 0$$

($d$: exterior differentiation, $\mathcal{a}^{(m)}$: $\mathcal{a}$係数 $m$-form の sheaf)

上に $\Gamma_K(V, \cdot)$ 下に $\Gamma(K, \cdot)$ を作用させて complexs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_K^{(0)}(V) \xrightarrow{d_0} \mathcal{B}_K^{(1)}(V) \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow \mathcal{B}_K^{(n)}(V) \longrightarrow 0$$
$$0 \longleftarrow \mathcal{a}^{(n)}(K) \xleftarrow{-d_{n-1}} \mathcal{a}^{(n-1)}(K) \xleftarrow{-d_{n-2}} \cdots \longleftarrow \mathcal{a}^{(0)}(K) \longleftarrow 0$$

を得る。 第一行より $H_K^{n-p}(V, \mathbb{C})$ を得，第二行では $H^p(K, \mathcal{a}^{(q)}) = 0$ for $p>0, q=0, \cdots, n$ より $H^p(K, \mathbb{C})$ を得る。 $\dim H^p(K, \mathbb{C}) \leq \aleph_0$ $1 \leq p \leq n-1$ が知られている[1]から，あと $-d_{n-1}$ が closed range であることのみ示せれば，Schwartz の lemma と Serre の lemma により (Ap. 1) 定理が従う。 実は Cor. 3.18 と同様に，

1) H. Komatsu [1 ; 20]

$\mathbb{R}^n \supset {}^{\forall} V_{open} \Rightarrow H^n(V, \mathbb{C}) = 0$ が知られており，それは $-d_{n-1}$ が onto であること，特に closed range であることを示す． ∎

Th. 4.17 (Jordan − Brouwer)

$\mathbb{R}^n \supset V_{open} \supset K$ compact のとき

(V\K の連結成分の数) = $\dim H^{n-1}(K, \mathbb{C})$ + (Vの連結成分の数)

Proof) Th. 4.16 により

$$H^1_K(V, \mathbb{C}) \simeq (H^{n-1}(K, \mathbb{C}))'.$$

また，相対コホモロジーの exact sequence

$$0 \to H^0_K(V, \mathbb{C}) \to H^0(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^0(V \setminus K, \mathbb{C})$$
$$\to H^1_K(V, \mathbb{C}) \to H^1(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(V \setminus K, \mathbb{C})$$

において，$H^0_K(V, \mathbb{C}) = 0$ かつ，$H^1(V, \mathbb{C}) \to H^1(V \setminus K, \mathbb{C})$ は1対1である，故に

$$\dim H^0(V \setminus K, \mathbb{C}) = \dim H^0(V, \mathbb{C}) + \dim H^1_K(V, \mathbb{C})$$
$$= \dim H^0(V, \mathbb{C}) + \dim H^{n-1}(K, \mathbb{C}).$$

∎

Th. 4.18 (Komatsu)

$\mathbb{C}^n \supset V_{open} \supset K$ compact

$$\dim H^p(K, \mathcal{O}) \leq \aleph_0 \qquad 1 \leq p \leq n-1$$

$$\Rightarrow \underset{(DFS)}{H^p(K, \mathcal{O})} \underset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} \underset{(FS)}{H_K^{n-p}(V, \mathcal{O})}$$

これは Th. 4.5 の拡張である。

証明には resolutions

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{B}^{(0)} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{B}^{(1)} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{B}^{(n)} \to 0$$

$$0 \leftarrow \mathcal{A}^{(n)}_{(n)} \xleftarrow{-\bar\partial} \mathcal{A}^{(n)}_{(n-1)} \xleftarrow{-\bar\partial} \cdots \xleftarrow{-\bar\partial} \mathcal{A}^{(n)}_{(0)} \leftarrow \mathcal{O} \leftarrow 0$$

を用いて同様に行う。

2. 変数係数単独偏微分方程式の解の境界値

1). $P(x, D)$ を real analytic 係数の $m$ 階線型単独偏微分作用素で，$V(\subset \mathbb{R}^{n+1})$ で定義され $S(\subset V)$ は向きづけられた real analytic hypersurface で $P(x, D)$ に関し non-characteristic であるとする。$'\mathcal{A}$, $'\mathcal{B}$ により，$S$ 上の real analytic function, hyperfunction の sheaf をあらわす。

$P'(x, D)$ を $P(x, D)$ の formal dual operator とすれば complexes

$$0 \to \mathcal{B}_K(V) \xrightarrow{P(x,D)} \mathcal{B}_K(V) \to 0 \qquad (FS)$$

$$\text{dual}$$

$$0 \leftarrow \mathcal{A}(K) \xleftarrow{P'(x,D)} \mathcal{A}(K) \leftarrow 0 \qquad (DFS)$$

において，第二行の 0-cohomology は $\mathcal{a}^{P'}(K)$，1-cohomology は Cauchy−kovalevskaja の定理[1] より消える。よって特に $P'$ は閉値域であり従って $P$ が閉値域となり，Serre の lemma により

$$\mathcal{B}_K(V)/P\mathcal{B}_K(V) \simeq (\mathcal{a}^{P'}(K))' \quad ①$$

$$\mathcal{B}_K^P(V) = \mathrm{Ker}(P : \mathcal{B}_K \to \mathcal{B}_K) = 0 \quad ②$$

さて，$C_j(x, D)$ $j=1, \cdots, m$，を $S$ の近傍で定義された $m-j$ 階 real analytic 係数線型偏微分作用素で，$S$ を non−characteristic とするものとする（e.g. $C_j = (\partial/\partial n)^{m-j}$）

$$\rho(\varphi) = (C_j(x, D)\varphi|_S)_j, \quad \varphi \in \mathcal{a}^{P'}(K) \quad ③$$

とすれば C−K により $\rho$ は位相同型

$$\rho : \mathcal{a}^{P'}(K) \simeq {}'\mathcal{a}(K)^m \quad ④$$

を与え，その拡張としてさらに

$$\tilde{\rho} : \mathcal{a}(K) \longrightarrow {}'\mathcal{a}(K)^m \quad ⑤$$

を得る。

<u>(DFS)−space では閉写像定理が</u>成立する故，exact sequence

1) 以下 C−K と略する

$$0 \longrightarrow {}'\mathcal{a}(K)^m \xrightarrow{p^{-1}} \mathcal{a}(K) \xrightarrow{p'} \mathcal{a}(K) \longrightarrow 0 \qquad ⑥$$

は位相をこめて split し，次の位相同型を得る.

$$\mathcal{a}(K) \approx {}'\mathcal{a}(K)^m \oplus \mathcal{a}(K) \qquad ⑦$$

$$\varphi \longmapsto (C_j(x,D)\varphi|_S) \oplus P'(x,D)\varphi$$

④，⑦を①をもとに dual にうつせば

$$p' : {}'\mathcal{B}_K(S)^m \simeq \mathcal{B}_K(V)/P\mathcal{B}_K(V), \qquad ⑧$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{B}_K(V) \approx {}'\mathcal{B}_K(S)^m \oplus \mathcal{B}_K(V), \\ \sum_{j=1}^{m} C_j(f_j \otimes \delta_S) + P\cdot g \longleftarrow ((f_j), g). \end{array}\right\} ⑨^{1)}$$

ここで ⑧の逆写像 $(p')^{-1}$ は，$\mathcal{B}_K(V) \ni f$ の class を ⑨の分解における $(f_j)$ へ写像するものである. $f_j$ は $C_j$ の選び方にかかわるが，$\operatorname{Im} p^{-1} = \mathcal{a}^{P'}(K)$, $\operatorname{Ker} \tilde{p}$ が $C_j$ にかかわっていないことをおもえば，⑨における $\Sigma C'_j(x,D)(f_j \otimes \delta_S)$ と $P(x,D)g$ は $f$ のみにより一意的に定まる. 従ってさらに，$f_j$ と $g$ とが $f$ の support を含む compact set $K$ のとり方によらないことがわかる. 即ち，$\mathcal{B}_S = \mathcal{H}^0_S(\mathcal{B})$ とおいて，

---

1) $f \otimes \delta_S \in \mathcal{B}(V)$ は，$f \in {}'\mathcal{B}_K(S)$ のときに

$$\langle f \otimes \delta_S, \varphi \rangle = \int_S f(x')\varphi(x')\,d\omega \quad \varphi \in \mathcal{a}(K)$$

により定義されるものである.

$$\Gamma_*(\mathcal{B}_S, S) \simeq \Gamma_*('\mathcal{B}, S)^m \oplus \Gamma_*(\mathcal{B}_S, S) \quad ⑩[1]$$

$'\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_S$ の flabbiness より ⑩は sheaf isomorphism に extend される. これをまとめて,

Th. 4.19　$C_j'(x, D)$ $(j=1\cdots m)$ が $S$ の近傍で定義された $m-j$ 階実解析的係数線型偏微分作用素で $S$ を non-characteristic としているならば, 次の sheaf isomorphism が成立する.

$$\mathcal{B}_S \approx '\mathcal{B}^m \oplus \mathcal{B}_S$$
$$f = \sum_{j=1}^{m} C_j'(x, D)(f_j \otimes \delta_S) + P(x, D)g$$

$g$ は $C_j'(x, D)$ のとり方によらず, 特に

$$\mathcal{B}_S^P(V) = 0 .$$

2) $W$ open $\subset V$ のとき, 次の可換図式を考えよう.

---

1) $P_*$ は compact support の section のなす module

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}^P(W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}^P(W\backslash S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B}_{S\cap W}(W) \arrow[r] \arrow[d, "P"] & \mathcal{B}(W) \arrow[r] \arrow[d, "P"] & \mathcal{B}(W\backslash S) \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B}_{S\cap W}(W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}(W) \arrow[r] & \mathcal{B}(W\backslash S) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{B}$の flabbiness より下の2行は exact, 定義により
より右の2列は exact, 第1行, 第1列の 0-cohomology
は Th. 4.19 より消える. 1-cohomology に関して, 次の
自然準同型が存在する.

$$b: \ \mathcal{B}^P(W\backslash S)/\mathcal{B}^P(W) \longrightarrow \mathcal{B}_{S\cap W}(W)/P(x,D)\mathcal{B}_{S\cap W}(W)$$

実際, $u \in \mathcal{B}^P(W\backslash S)$, $\tilde{u}$ を$\mathcal{B}(W)$への拡張とすれば, 上の図式をたどってみればわかるように $P\tilde{u} \in \mathcal{B}_{S\cap W}(W)$の類は拡張の仕方によらず定まり, 又 $u = v|_{W\backslash S}$, $v \in \mathcal{B}^P(W)$ なら $P\tilde{u} = 0$ とすることができる。$P\tilde{u} = Pu_1$, $u_1 \in \mathcal{B}_{S\cap W}(W)$と

---

1) Th. 4.19 より $\mathcal{B}^P_{S\cap W}(W) = 0$ であることを用いた

なるならば，　$\tilde{u}-u_1 \in \mathcal{B}^P(W)$, $(\tilde{u}-u_1)|_{W\setminus S} = u$ より，
$b$ は injective である．$b$ が特に bijective であれば

$$\forall g \in \mathcal{B}_{S\cap W}(W), \quad \exists h \in \mathcal{B}_{S\cap W}(W), \ \exists \tilde{u} \in \mathcal{B}(W)$$

$$\text{s.t.} \quad g + Ph = P\tilde{u} \quad \therefore \mathcal{B}_{S\cap W}(W) \subset P\mathcal{B}(W)$$

逆にこの最後の包含関係が成立していれば，

$g \in \mathcal{B}_{S\cap W}(W)$, $\tilde{u} = \mathcal{B}(W)$　$g = P\tilde{u}$ とおくとき，

$u = \tilde{u}|_{W\setminus S} \in \mathcal{B}^P(W\setminus S)$　　従って $b$ は bijective.

これをまとめて，

Th. 4. 20　homomorphism

$$b_W : \mathcal{B}^P(W\setminus S)/\mathcal{B}^P(W) \longrightarrow \mathcal{B}_{S\cap W}(W)/P(x,D)\mathcal{B}_{S\cap W}(W)$$

は injective for $\forall W$ open $\subset V$ であり restriction と可換である。

$$b_W : \text{surjective} \iff P(x,D)\mathcal{B}(W) \supset \mathcal{B}_{S\cap W}(W)^{1)}$$

---

1) この包含関係は，$P$ が定数係数であるとき(Th. 4.14), 又は $P$ が elliptic の時　成立する．

$\omega$ open $\subset S$ , $W$ open $\subset V$ $W \cap S = \omega$ とし
そのような $W$ について indrictive limit をとれば

$$b : \left(\mathcal{B}_+^p(\omega) \oplus \mathcal{B}_-^p(\omega)\right) / \mathcal{B}^p(\omega) \longrightarrow \mathcal{B}_S(\omega) / P(x,D)\mathcal{B}_S(\omega)$$

を得る。ここに $\mathcal{B}_+^p(\omega)$ ($\mathcal{B}_-^p(\omega)$) は $S$ の負(正)の側で
0であるような $W \setminus S$ 上の解の芽の層である.
Th. 4.20 より　$b$ : surjective $\Leftrightarrow$ $P(x,D)\mathcal{B}(\omega) \supset \mathcal{B}_S(\omega)$

$W_+$ を $W \setminus S$ の 正の側とすれば[1] 自然な写像

$\mathcal{B}^p(W_+) \longrightarrow \mathcal{B}_+^p(\omega)$ が存在する

これらの写像を結合して

$$\mathcal{B}^p(W_+) \longrightarrow \mathcal{B}_+^p(\omega) \longrightarrow \mathcal{B}_+^p(\omega) \oplus \mathcal{B}_-^p(\omega) / \mathcal{B}^p(\omega) \xrightarrow{b}$$

$$\xrightarrow{b} \mathcal{B}_S(\omega) / P\mathcal{B}_S(\omega) \xrightarrow{(\rho')^{-1}} {}'\mathcal{B}(\omega)^m$$

Def. 4.21　$u \in \mathcal{B}^p(W_+)$ のとき 上の写像をたどって
$(f_j) \in {}'\mathcal{B}(\omega)^m$ に達したとき, それを $u$ の <u>境界値</u>
とよぶ 即ち $u$ の拡張 $\tilde{u} \in \mathcal{B}(W)$, $\tilde{u}|_{W_-} = 0$ を適当にとって

$$P(x,D)\tilde{u} = \sum_{j=1}^{m} C_j'(x,D)(f_j \otimes \delta_S)$$

---

1) 同様に $W_-$ を $W \setminus S$ の負の側とする。

と表わされる唯一通りに定まる $f_j \in {}'\mathcal{B}(\omega)$ の組が $u$ の境界値である。

$\theta_S$ を $W$ における $W_+$ の定義函数とすれば，$j-1$ 階の微分作用素 $B_j(X, D)$, $j=1, \ldots, m$, が存在して，$u \in \mathcal{A}(W)$ または $C^\infty(W)$ に対して

$$\begin{aligned} & P(x, D)(\theta_S(x)u(x)) - \theta_S(x)(P(x, D)u(x)) \\ & = \sum_{j=1}^{m} C_j'(x, D)((B_j(x, D)u(x))|_S \otimes \delta_S] \end{aligned}$$

が成立する．従って $u \in \mathcal{A}^P(W)|_{W_+}$ のとき，上で定義した $u \in \mathcal{B}^P(W_+)$ の境界値 $f_j$ は

$$f_j = B_j(x, D)u|_S, \quad j = 1, \ldots, m$$

で与えられる．

さらに，河合 [1; 33] および Schapira [1; 67] の Holmgren の一意性定理により，$\mathcal{B}^P_+(\omega) \cap \mathcal{B}^P(\omega) = \mathcal{B}^P_-(\omega) \cap \mathcal{B}^P(\omega) = \{0\}$ が成立する．従って $\mathcal{B}^P_+(\omega) \longrightarrow {}'\mathcal{B}(\omega)^m$ は injective. 即ち次の定理を得た．

Th. 4.22　$u \in \mathcal{B}^P(W_+)$ が $\omega = W \cap S$ のある近傍で $0$ であることと，境界値が $0$ であることは同値である。

# Appendix 1.

## (FS)-space, (DFS)-space について

解析学で用いる函数空間は，問題に応じて色々なタイプのものがある。 Hilbert space, Banach space などは従来の函数解析で頻用され，Fréchet space, (DF) space, (LF) space なども用いられる. 応用上有効な命題の成立することも必要であり，その意味において，以下にのべる (FS)-space (DFS)-space は重要なものである。より一般化された (FS*)-space, (DFS*)-space があるが，それはこの lecture note の範囲内では必要としないので省略した。 以下の命題の証明; (FS*), (DFS*) については 小松[1; 11] または [3; 34] を参照のこと.

1] (FS)-space

$$X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \qquad \leftarrow X_j \xleftarrow{u_{j,j+1}} X_{j+1} \leftarrow \cdots$$

なる Banach space の列が与えられ，$u_{j,j+1}$ はすべて continuous linear map であるとする。 このとき $X = \varprojlim X_j$ を，集合としては通常の射影極限，即ちすべての $j$ に対し $u_{j,j+1}(x_{j+1}) = x_j$ をみたす $(x_j)$

$x_j \in X_j$の全体 ($\Pi X_j$ の部分集合）とし，位相は $X \ni x=(x_j)$ のとき $u_j(x) = x_j$ と定義した，linear map $u_j : X \longrightarrow X_j$ すべてを連続にする最弱の局所凸位相を入れたものとする。これは，semi-norm の族，

$$p_j(x) = \| u_j(x) \|_{X_j} \quad (\| \cdot \|_{X_j} \text{ は Banach space } X_j \text{ の norm})$$

により定めた位相になる。これにより $X$ は Fréchet space であるが，又逆に任意の Fréchet space はこのような Banach space の射影極限と表わされる。そこで，もう少し制限したものを考える．

Def. 1　Banach space $X, Y$ と，continuous linear map

$$T : X \longrightarrow Y \text{ があるとき，}$$

$T$ が compact (又は completely continuous (完全連続)) であるとは，$X$ の任意の有界集合が，$T$ によって $Y$ の相対 compact な集合にうつされることである。これは任意の有界点列 $\{x_n\}$ の像 $\{Tx_n\}$ が，強収束部分列を含むといってもよい。

Def. 2.　locally convex space $X$ が (FS) space であるとは，$u_{j,\,j+1} : X_{j+1} \longrightarrow X_j$ が compact であるような，Banach space の列の射影極限 $\varprojlim X_j$ と表わされること

をいう。

Example 1. $\mathcal{E}(\Omega)$ $\quad \Omega$ open $\subset \mathbb{R}^n$

$K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset \cdots$, $\bigcup K_j = \Omega$ なる compact 列により

$\mathcal{E}(\Omega) = \varprojlim C^j(K_j) \qquad \|f\|_j = \sup_{\substack{|k|\leq j \\ x \in K_j}} |\nabla^k f(x)|$

$C^{j+1}(K_{j+1}) \longrightarrow C^j(K_j)$ が compact であることは,

Ascoli — Arzela の定理による.

Exampl 2.

$\mathcal{O}(V) \qquad V$ open $\subset \mathbb{C}^n$

$K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset \cdots$, $\bigcup K_j = V$ とし,

$\mathcal{O}_c(K) \equiv \{f \in C^0(K) \mid f \in \mathcal{O}(K^\circ)\} \quad \|\cdot\| = \sup_{L} |f(z)|$

$\mathcal{O}(V) = \varprojlim \mathcal{O}_c(K_n)$

$\mathcal{O}_c(K_{j+1}) \longrightarrow \mathcal{O}_c(K_j)$ が compact であること

は, Montel の定理による。

Example 3.

$\mathcal{E}^{\infty}_{L^2}(\Omega) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) \quad \mathbb{R}^n \supset \Omega$ は互いに交わらない有限個の $C^\infty$—class の超閉曲面でかこまれた内部領域

$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ とは, distribution の意味での $m$ 階までの導函数が $L^2(\Omega)$ に属するもの norm は

$$\|f\|^2_{m, L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f(x)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

$\mathcal{E}_{L^2}^{m+1}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}_{L^2}^{m}(\Omega)$ がcompactであることは，Rellichの定理の拡張による．

Prop. 1. (FS)-spaceはFréchet, Montel, Separableである。

Prop. 2. $X$が(FS)-space $Y$がclosed subspaceならば，$Y$, $X/Y$ は又 (FS) space である．

$Y = \varprojlim \overline{U_j(Y)}$ 又 $U_j(X)$ が $X_j$ で dense 列ならば

$X/Y = \varprojlim X_j / \overline{U_j(Y)}$

Prop. 3 $X$, $Y$ が (FS) ならば $X \times Y$ も (FS).

$X^{(k)}$ が可算個の (FS)-space ならば $\prod X^{(k)}$ も (FS).

従って Prop. 2 とあわせて 可算個の射影極限も(FS).

これらの証明は省略する．

2] (DFS)-space.

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_j \xrightarrow{u_{j+1,j}} X_{j+1} \longrightarrow \cdots$$

を 1 to 1 continuous linear map. $u_{j+1,j}$ をもつ Banach space の列とする． $X = \varinjlim X_j$ を，集合としては和集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ (ただし $u_{j+1,j}$ により$X_j$ を $X_{j+1}$ の subspace とみる) とし，

$u_j : X_j \longrightarrow X$ という埋め込みの写像が，すべての

$j$ に対して連続となるような最強の局所凸位相を入れたものとする。 この位相は, $X$上の semi-nom $p$ は, すべての $j$ について $p\circ u_j$ が $X_j$ 上の連続な semi-nom となるとき, そのときに限り連続としたものに等しい。 しかし, これでは $X$ の位相は, Hausdorff になるとは限らない。 そこでもっと強い条件を課したものを考える。

Def. 3.

locally convex space $X$ が (DFS)-space であるとは, $u_{j+1,j}: X_j \longrightarrow X_{j+1}$ が injective compact であるような, Banach spaces の列の帰納極限 $\varinjlim X_j$ と表わされることをいう. これならば Hausdorff になる. ( 以下その証明 )

$X_j$ をとりなおして, $u_{j+1,j}$ は有界凸閉集合をコンパクト集合にうつすとしてよい。

$0 \neq x \in X$ をとる. $^{\exists}p;\ x = u_p(x_p)\ x_p \in X_p$.
次の3つの性質をもつ, $X_j$ の 0 の円形凸近傍[1] $V_j$ を構成しよう $(j = p, p+1 \cdots)$

(i) $u_{kj}(V_j) \subset V_k\ (k>j)\ (u_{kj} = u_{k,k-1}\circ\cdots\circ u_{j+1,j})$

(ii) $x_j = u_{jp}(x_p) \notin V_j$

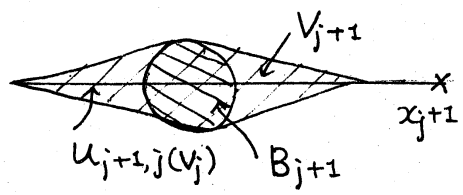
(iii) $u_{kj}(V_j)$ : compact in $X_k\ (k>j)$.

1) E locally convex, $E \supset V$ が円形凸とは $|\alpha|+|\beta| \leq 1,\ x, y \in V \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V$であること. (ここで$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

そうすれば $V = \bigcup_{j \geq p} U_j(V_j)$ は $X$ の $0$ の 凸近傍で，$x$を含まない。 実際，$U_j^{-1}(V)$ は $V_j$ を含み，又(ii)より $x$ は $V$ に含まれない。 まず $V_p$ を，$x_p$ を含まない任意の closed ball とする。 (iii)で $j=p$ としたものは $U_{kp}$ の compact 性より従う。

$V_p, V_{p+1}, \cdots V_j$ がすでに選ばれたとしよう。 $U_{j+1,j}(V_j)$ は compact) 性より (強位相で) 閉集合。

$x_{j+1}$ は $U_{j+1,j}(V_j)$ に含まれないから，適当な closed ball $B_{j+1}$ があって convex hull $Conv(B_{j+1}, U_{j+1,j}(V_j))$ が $x_{j+1}$ を含まないようにできる[2]。 その convex hull を $V_{j+1}$ としよう。




(i)(ii) は 確かにみたされる。 $k>j+1$ とすれば，

$U_{k,j+1}(V_{j+1}) = Conv(U_{k,j+1}(B_{j+1}), U_{k,j}(V_j))$ において 2つの compact set の convex hull は 又 compact であるから (iii)も みたされる。 ∎

Example 4

$\mathcal{O}(K)$ $K$ compact $\subset \mathbb{C}^n$

---

2) たとえば $B_{j+1}$ として 半径 $\frac{1}{2} \mathrm{dist}_{X_{j+1}}(x_{j+1}, U_{j+1,j}(V_j))$ の closed ball をとればよい。

$K_1 \supset\supset K_2 \supset\supset \cdots \supset\supset K$, $\cap K_n = K$, $K_n = \overline{K_n^\circ}$ かつ $K_n^\circ$ の各成分は $K$ と交わるような compact 列をとり、

$\mathcal{O}(K) = \varinjlim \mathcal{O}_c(K_n)$ と定義する。

$u_{j+1,j} : \mathcal{O}_c(K_j) \to \mathcal{O}_c(K_{j+1})$ が compact であることは Montel の定理より。

Prop. 4.

(DFS)-space は (DF)空間 であり, complete, bornologique, tonnelé, separable, Montel である. さらに

(i) countable fundamental system of bounded sets が存在する.
i.e. bounded sets $\{B_j\}_j = 1, 2, \cdots$ があり, 任意の bounded set は ある $B_j$ に含まれる.

(ii) $B$ bdd in $X \Rightarrow \exists j$, $B \subset X_j$ かつ $B$ は $X_j$ 中 relatively compact であり $B$ 上で $X$ からの相対位相と $X_j$ からの相対位相は一致する.

(iii) $\underset{(\text{weakly} \to 0 \text{ in } X)}{x_n \to 0 \text{ in } X} \Leftrightarrow \exists j$, $\{x_n\} \subset X_j$. $x_n \to 0$ in $X_j$

(iv) $X = \varinjlim X_j$ の位相は, 単なる位相空間の帰納極限としての位相と一致する. i.e. 必ずしも凸でない $S \subset X$ は すべての $j$ に関し, $u_j^{-1}(S)$ が $X_j$ で open であるとき, そのときに限り $X$ の open set である.

Prop. 5

$X$ が (DFS) space, $Y$ の closed subspace ならば, $Y$, $X/Y$ は又 (DFS) space である。 $Y = \varinjlim (Y \cap X_j)$
$X/Y = \varinjlim (X_j / Y \cap X_j)$

Prop. 6.

$X$, $Y$ が (DFS) なら $X \times Y$ も (DFS).

$X^{(k)}$ が可算個の (DFS)-spaces ならば $\sum X^{(k)}$ も (DFS). 従って Prop. 5 とあわせて可算個の帰納極限も (DFS).

3]. (FS) と (DFS) の双対性. Serre の lemma

応用上重要なことは, これらの空間が互いに strong dual となり, 後述の Serre's lemma が活用できることである。

局所凸空間 $X$ の strong dual space を $X'_\beta$ とあらわす.

Prop. 7.

$X = \varprojlim X_j$ が (FS)-space ならば $X'_\beta$ は (DFS)-space でありかつ $X = (X'_\beta)'_\beta$. : $U_j(X)$ dense in $X$ ならば $X'_\beta = \varinjlim X'_j$ と表わせる.

Prop. 8.

$X = \varinjlim X_j$ が (DFS)-space ならば
$X'_\beta$ は (FS)-space であって, $X'_\beta = \varprojlim X'_j$

又. $X = (X'_\beta)'_\beta$

局所凸空間 $X$ と部分空間 $Y$ があるとき dual space $X'$ の subspace $Y^\circ$ を $Y^\circ \equiv \{x' \in X' \mid \langle y, x' \rangle = 0,\ \forall y \in Y\}$ で定義する。$X$ が Banach, $Y$ が closed subspace なら位相をこめて

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 0 \arrow[d, dash] \\
Y \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & Y^\circ \arrow[d, dash] \\
0 \arrow[r, dash] & X'
\end{tikzcd}
$$

$$Y_\beta = X'_\beta / Y^\circ$$

$$(X/Y)'_\beta = Y^\circ$$ であり，これと

(FS), (DFS) の表現を用いれば (Prop 2, 5, 7, 8)

Prop. 9.

$X$ が (FS) 又は (DFS) であり，$Y$ が closed subspace ならば
$$\begin{cases} Y'_\beta = X'_\beta / Y^\circ \\ (X/Y)'_\beta = Y^\circ \end{cases}$$
が位相をこめて成立.

さて一般に，

Prop. 10.

$X, Y$ : Fréchet spaces $T : X \to Y$ densely defined closed linear operator とすれば

$$R(T) \text{ closed in } Y \iff R(T') \text{ closed in } X'$$

($D(T)$ は $T$ の定義域. $R(T) = \operatorname{Im} T$, $N(T) = \ker T$.)

とする。

我々にとって重要なのは，次の命題である。

Prop. 11 (Serre)

$X_1, X_2, X_3$ を (FS) spaces $X_i'$ をそれらの strong dual (DFS)-spaces. $T: X_1 \to X_2$, $S: X_2 \to X_3$ を densely defined closed linear maps で $S \cdot T = 0$ をみたすもの $T', S'$ はそれらの dual maps とする.

$$X_1 \xrightarrow{T} X_2 \xrightarrow{S} X_3$$

$$X_1' \xleftarrow{T'} X_2' \xleftarrow{S'} X_3'$$

$B = R(T)$, $R(S)$ closed とする.

$Z = N(S)$, $H = Z/B$.

$B^* = R(S')$. $Z^* = N(T')$

$H^* = Z^*/B^*$ と定める

このとき, $H, H^*$ は互いに strong dual な (FS), (DFS) spaces である.

4] Schwartz の lemma

3] で明らかなように, 応用にあたっては, $R(T)$, $R(S)$ の閉なることを証明するのが重要である. そのため一つの十分条件として Schwartz の lemma がある.

Def. 4

$Z$ が Fréchet space ((DFS)-space) $B$ を subspace とし, $H = Z/B$ とおく.

$P : Z \to Z/B$ を自然写像とする。

$H$ が Fréchet ((DFS)) cross-section $Y$ をもつとは、Fréchet space ((DFS)-space) $Y$ および cont. linear map $f : Y \to Z$ で $P \circ f : Y \to H$ が bijective であるものが存在することをいう。

記号は Prop. 11 と同じとして、

Prop. 12 (Schwartz)

(i) $H = Z/B$ が Fréchet cross-section $Y$ をもつならば $B$ は closed である。特に $\dim H < \infty$ なら Fréchet cross section が存在し $B$ closed. このとき $H \simeq Y$.

(ii) $H^* = Z^*/B^*$ が (DFS) cross-section $Y^*$ をもつならば $B^*$ closed かつ $H^* \simeq Y^*$. 特に $\dim H^* \leq \aleph_0$ ならば $B^*$ closed.

## Appendix 2.

Th. 2.23 で用いた指数定理の証明を与える。$a_m(x) \neq 0$ が成立する区間では任意の解は唯一通りに延長されるから、原点を中心とする十分小さい区間の上に制限して考えればよい。従って、次の定理を証明すれば十分である。

Th. Vを原点を中心とする円板、

$$P(z, D) = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha(z) \frac{d^\alpha}{dz^\alpha}$$

を $a_\alpha(z) \in \mathcal{O}(V)$ を係数とする常微分作用素とする。$a_m(z)$ は原点以外の零点を持たないと仮定する。このとき、$P(z, D)$: $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V)$ の核 $\ker P(z, D)$ も余核 $\operatorname{coker} P(z, D)$ も有限次元であって、指数

$$\begin{aligned}\chi(P(z, D)) &= \dim \ker P(z, D) - \dim \operatorname{coker} P(z, D) \\ &= m - \operatorname{ord}_0 a_m(z) \quad .\end{aligned}$$

Proof) $K_1 \Subset K_2 \Subset \cdots \Subset K_n \Subset \cdots$ をVに収束する閉円板の列とする。$K_n$ の一つをKとし、$\mathcal{O}_c(K)$ における作用素 P を

$$D(P) = \left\{ \varphi \in \mathcal{O}_c(K), \frac{d^m}{dz^m} \varphi \in \mathcal{O}_c(K) \right\},$$

$$Pf = P(z, D)\varphi$$

によって定義する。まず

$$\chi(P) = m - \mathrm{ord}_0 a_m$$

を証明する。

$m=0$ の場合は，$P$ は連続，かつ明らかに $\ker P = \{0\}$ 。任意の $f \in \mathcal{O}_C(K)$ は $\mathrm{ord}_0 a_m$ 次以下の多項式と $\mathrm{im}\, P$ の和として表わされるから，$\dim \mathrm{coker}\, P = \mathrm{ord}_0 a_m$ 。故に $\chi(P) = -\mathrm{ord}_0 a_{m_0}$ ，$P(z,D) = \dfrac{d}{dz}$ の場合は，微分と一様極限の順序交換から示されるように，$P$ は閉作用素であり，$D(P)$ は多項式全体を含むから $\mathcal{O}_C(K)$ において稠密である。明らかに $\ker P = \mathbb{C}$ である。任意の $f \in \mathcal{O}_C(K)$ に対して

$$u(z) = \int_0^z f(\zeta)\, d\zeta$$

とおけば，$u \in D(P)$ かつ $Pu = f$ がなりたつから，$\mathrm{im}\, P = \mathcal{O}_C(K)$. 故に $\chi(P) = 1$.

次に $m > 0$ かつ $a_0(z) \equiv \cdots \equiv a_{m-1}(z) \equiv 0$ の場合は，$P$ は $m$ 個の $\dfrac{d}{dz}$ と $a_m(z)$ を掛ける作用素の積に等しい。これらはいずれも稠密な定義域と有限な指数をもつ閉線型作用素であるから，Gohberg-Krein の指数加法定理[1)]

---

1)* 次頁（P.114）下段．

により，Pもまた稠密な定義域と有限な指数をもつ閉線型作用素であって，その指数は因子の指数の和 $m\text{-}\mathrm{ord}_0 a_m$ に等しい。

一般の P に対しては、$a_{m-1}(z)\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}+\cdots+a_0(z)$ が $a_m(z)\frac{d^m}{dz^m}$ に関して相対的にコンパクトであることを示せば，指数の第2安定定理[2)]により結果を得る。

$\varphi_n\in\mathcal{O}_C(K)$ を $\|\varphi_n\|_{\mathcal{O}_C(K)}\leqq 1$ かつ $\|a_m(z)\frac{d^m}{dz^m}\varphi_n(z)\|_{\mathcal{O}_C(K)}\leqq 1$ をみたす列とする。$M=\max_{z\in\partial K}|a_m(z)|^{-1}$ とすれば最大値の原理により，$\|\frac{d^m}{dz^m}\varphi_n(z)\|_{\mathcal{O}_C(K)}\leqq M$ [3)] がなりたつ。故に，Ascoli - Arzela の定理により $\frac{d^k}{dz^k}\varphi_{n'}(z)$, $k=0,1,\cdots,m-1$,

---

1)* I. C. Gohberg and M. G. Krein, The basic proposition on defect numbers, root numbers and indices of linear operators, Uspehi Mat Nauk, 12(1957), 43-118, Amer. Math. Soc. Translations Ser.2, 13(1960), 185-264 の Theorem 2.1.
$\mathcal{O}_C(K)$ の代りに，K上 $L^2$ かつ K の内部で正則な函数族 $\mathcal{O}_{L^2}(K)$ を用いるならば [1;21] の定理 (IV.2.4) を用いることもできる。

2) Ibid. Theorem 2.6 または [1;21]，定理 (IV.2.9)。

3) $\mathcal{O}_{L^2}(K)$ を用いるときは，ここの議論を少し修正しなければならない。

従って $\left(a_m(z)\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}+\cdots+a_0(z)\right)\varphi_{n'}(z)$ が $\mathcal{O}_c(K)$ において収束するような部分列 $\varphi_{n'}(z)$ をとりだすことができる。

以上によって，$\mathcal{O}_c(K_n)$ においては

$$P_n : D(P_n) \to \mathcal{O}_c(K_n)$$

は有限次元の $\ker P_n$ 及び $\operatorname{coker} P_n$ を持ち，その指数は

$$\chi(P_n) = m - \operatorname{ord}_0 a_m(z)$$

によって与えられることがわかった。

$$P = P(z, D) : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V)$$

とし，exact sequence

(1) $\quad 0 \to \ker P \to \mathcal{O}(V) \xrightarrow{P} \mathcal{O}(V) \to \operatorname{coker} P \to 0$

が exact sequence

(2) $\quad 0 \to \ker P_n \to D(P_n) \xrightarrow{P_n} \mathcal{O}_c(K_n) \to \operatorname{coker} P_n \to 0$

の射影極限であることを証明しよう。

(2)を二つの exact sequence

(3) $\quad 0 \to \ker P_n \to D(P_n) \to \operatorname{im} P_n \to 0$

(4) $\quad 0 \to \operatorname{im} P_n \to \mathcal{O}_c(K_n) \to \operatorname{coker} P_n \to 0$

に分ける。$\operatorname{im} P_n$ には $\mathcal{O}_c(K_n)$ の部分空間としての相対位相を入れる。$\operatorname{coker} P_n$ が有限次元であるから，Appendix 1, Prop. 13 により，$\mathrm{im}\, P_n$ は閉部分空間であって，(3), (4) 共に位相的 exact sequence である。

複素領域での常微分方程式の解の存在定理により，$\ker P_n$ は同型であり，$\varprojlim \ker P_n = \ker P$ がなりたつ。一方 $D(P_{n+1}) \to D(P_n)$ は $D(P_{n+1}) \hookrightarrow \mathcal{O}_C(K_{n+1}) \to D(P_n)$ と分解されるから，$\varprojlim D(P_n) = \varprojlim \mathcal{O}_C(K_{n+1}) = \mathcal{O}(V)$。Mittag-Leffler の論法により

(5) $\quad 0 \to \varprojlim \ker P_n \to \varprojlim D(P_n) \to \varprojlim \mathrm{im}\, P_n \to 0$

が exact となるから，vector space として

$$\mathrm{im}\, P = \varprojlim \mathrm{im}\, P_n$$

が成立する。(5)は位相的にも exact である。

一方，$D(P_{n+2})$ は $\mathcal{O}_C(K_{n+3})$ を含んでいて，$D(P_{n+1})$ の元は $\mathcal{O}_C(K_{n+1})$ の位相に関し $\mathcal{O}_C(K_{n+3})$ の元でいくらでも近似することができる。従って，商位相にうつって，(4) に対しても Mittag-Leffler の論法を適用できる。こうして，位相的 exact sequence

(6) $\quad 0 \to \varprojlim \mathrm{im}\, P_n \to \mathcal{O}(V) \to \varprojlim \mathrm{coker}\, P_n \to 0$

を得る。即ち，$\mathrm{im}\, P$ は $\mathcal{O}(V)$ の閉部分空間であって，

(7) $\quad \operatorname{coker} P = \varprojlim \operatorname{coker} P_n$ 。

ところで，$\operatorname{coker} P_{n+1} \to \operatorname{coker} P_n$ は同一有限次元の空間の間の稠密な値域をもつ写像であるから、実は同型である。故に，$\operatorname{coker} P \cong \operatorname{coker} P_n$ 。従って，$P: \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V)$ は $P_n: D(P_n) \to \mathcal{O}_c(K_n)$ と同じ指数をもつ。

もっと一般に，次の定理が成立する。

Th. $V$を$\mathbb{C}$の領域（またはコンパクト集合で$H^0(V,\mathbb{C})$または$H^1(V,\mathbb{C})$が有限次元のもの），$A_\alpha(z)$を$V$（の近傍）で正則な函数を要素とする $N \times N$ 行列，かつ $\det A_m(z)$ は$V$(の近傍のどの連結成分）の上で恒等的に零ではないとする。このとき

$$P(x,D) = \sum_{\alpha=0}^{m} A_\alpha(z) \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} : \mathcal{O}(V)^N \to \mathcal{O}(V)^N$$

は指数をもつ作用素であって，

$$\chi(P(x,D)) = mN\chi(V) - \sum_{z \in V} \operatorname{ord}_z \det A_m(z).$$

但し，

$$\chi(V) = \dim H^0(V,\mathbb{C}) - \dim H^1(V,\mathbb{C}) \ 。$$

証明は小松[1;65]またはMalgrange[3;51]，[3;54]を

見よ。

Cor.（Perron, Lettenmeyer）. $V$ が単連結の領域ならば

$$\dim \ker P \geqq mN - \sum_{z \in V} \operatorname{ord}_z \det A_m(z).$$

なお，常微分方程式の解の正則性については〔1; 88〕または〔1; 73〕の 9 を見よ。

# Bibliography

I. General References.

A. Homological Algebra, Sheaf theory.

B. Linear Topological Spaces.

C. Complex Analysis.

D. Distribution theory.

E. Linear Partial Differential Equations.

II. Hyperfunction 関係

1. 佐藤論文以後, Hyperfunction に直接関係するもの

2. The boundary value of Analytic function,
Ultradistribution, Analytic functional, etc. 関係の深いもの
(函数概念の一般化にかかわるいくつかの重要な文献を含む)

3. その他関係あるもの

年代順に配列してあるが、IIでは各年内においては必らずしも発行 (or "Received", "Commun.")順というわけではない。各単位内の引用は[47]等により、他の場所あるいは本文中では, [A:4] [2:35]はそれぞれ I,A の No.4, II.2 の No.35をあらわす。注釈 <·····> は講演者による。

A. Homological Algebra, Sheaf theory.

1. H. Cartan-S. Eilenberg: Homological Algebra, Princeton, 1956. <標準的教科書である>
2. 中山正・服部昭： ホモロジー代数学, 共立 1957. <圧縮されており、多少よみづらい>
3. A. Grothendieck: Sur Quelques points d'Algèbre Homologique. Tōhoku Math. J., 9 (1957), 119-221. <初学者向きではない>
4. R. Godement: Topologie Algébrique et Théorie des Faiseaux Hermann, 1958. <層の標準的教科書とされている>
5. S. MacLane: Homology, Springer, 1963. <入門書である>
6. 小松彦三郎：佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式, 東大セミナリーノート22, 1968. <前半にホモロジー代数, 層の解説がある>
7. R. C. Hartshorne: Residues and Duality. Lecture notes in Math., Springer No.20, <入門のためには不要>

B. Linear Topological Spaces.

1. J. Dieudonné-L. Schwartz: La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, Ann. Inst. Fourier, 1 (1950), 61-101.
2. A. Grothendieck: Sur les espaces (F) et (DF). Summa Brasil. Math., 3 (1954), 57-123.

3. A. Grothendieck: Théorie des espaces vectoriels topologiques, Lecture notes, São Paulo, 1954.

4. ________________: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., 1955.

5. A. Pietsch, Nukleare lokalkonvexe Räume, Akademie Verlag, 1965.

C. Complex Analysis.

1. 一松 信：多変数解析函数論、培風館，1960，
< 標準的教科書である >

2. V. S. Vladimirov: Methods of the theory of functions of many complex variables, Nauka, 1964 (in Russian) ( 英訳, MIT Press, 1966) < <<Edge of the Wedge theorem>> 等の物理学への応用 >

3. R. C. Gunning-H. Rossi: Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965 <専門家のための標準的教科書とされている>

4. L. Hörmander, An Introduction to Complex analysis in several variables, van Nostrand, 1966. <偏微分方程式論的とりあつかいがしてある >

D. Distribution theory

1. L. Schwartz: Théorie des distribution, Hermann I 1950,

II 1951; 新版 1966. (新版邦訳 岩波書店 1971)

2. I. M. Gel'fand and G. E. Šilov (N. Ya. Vilenkin, M.I.Graev, I. I. Pjateckiǐ-Šapiro): Generalized Functions, Fizmatgiz, Moskva, vol. I 1958-VI 1966 (in Russian) (英訳; I-V: Academic Press, VI: W. B. Saunders Company, 仏訳; Dunod, 独訳; Deutscher Verlag, 邦訳[IとVの一部]超函数論入門, 1,2, 共立, 1963) < I は必読である >

3. H. J. Bremmermann: Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms, Addison-Wesley, 1965.

< Hyperfunction も扱われている >

E. Linear Partial Differential Equations.

1. L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators, Springer, 1963. Rev. ed. 1969.

<著者の1962年までの結果が集大成されている。論文程読みやすくないという人もある>

2. 溝畑 茂: 偏微分方程式論, 岩波, 1965.

<近代的理論と古典とのつながりが明らかにされている>

[定係数を主とする]

3. V. P. Palamodov: Linear partial differential operators with constant coefficients, Nauka, 1967 (in Russian)

(英訳，Springer 1970，邦訳，吉岡書店 上1972，下1973
<Ehrenpreisの再構成である>

4. L. Ehrenpreis: Fourier Analysis in Several Complex Variables, John Wiley, 1971.

<名著であるが，一章から順次に理解できるわけではない．適当な人に相談してよむこと>

## II. Hyperfunction関係

### 1. 佐藤論文以後.

1958

1. M. Sato: On a generalization of the concept of functions Proc. Japan Acad. 34, 126-130. (Comm. March 12)
2. _______: _______ II, ibid. 604-608. (Comm. Nov. 12).
3. 佐藤幹夫: 超函数の理論 数学, 10, 1-27.

1959

4. M. Sato: Theory of hyperfunctions I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 8, 139-193.

1960

5. ______ : ______ II, ibid. 387-437. (Feb.5)
6. 佐藤幹夫: 線型偏微分方程式について、東大数学教室金曜談話会ノート (1960, 6/24).
7. A. Martineau: Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki, 13 (1960-1961) No.214

1964

8. A. Martineau: Distribution et valeur au bord des fonctions

holomorphes, Proc. Intern. Summer Course on the theory of distribution, 195-326.

1966

9. R. Harvey: Hyperfunction and Partial Differential equations, Thesis Stanford Univ.

10. ______ : ______, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 55, 1042-1046.

11. H. Komatsu: Relative Cohomology of Sheaves of Solutions of Differential Equations., Séminaire Lions-Schwartz (1966/67) (Reprinted in [47])

12. G. Bengel: Sur une extension de la théorie des hyperfonctions, C.R.Acad. Sci. Paris 262, ser.A, 499-501

13. ______ : Régularité des solutions hyperfonctions d'une équation elliptique, ibid, 569-570.

14. 山中 健: 線型位相空間と一般函数, 共立数学講座 16巻, 159-169.

1967

15. 小松彦三郎 : 超函数と定数係数偏微分方程式. RIMS 講究録 22, 127-139.

16. G.Bengel: Das Weyl'sche Lemma in der Theorie der Hyper-

fonctionen. Math. Z., 96, 373-392.

17. A. Martineau: Théorème sur le prolongement analytique du type《Edge of the Wedge theorem》 Séminaire Bourbaki 20$^e$ (1967/68) 340.

18. P. Schapira: Une équation aux dérivées partielles sans solutions dans l'espace des hyperfonctions., C. R. Acad. Sci. Paris 265, 665-667.

1968

19. H. Komatsu: Resolutions by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant coefficients. Math. Ann. 176, 77-86. (Received August 31, 1966).

20. _______ : On the Alexander Pontrjagin duality theorem. Proc. Japan Acad., 41, 489-490

21. 小松彦三郎 : 佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式, 東大セミナリーノート 22.

22. 佐藤幹夫 - 一松信: 線型偏微分方程式系について RIMS 講究録 59, 225-237.

23. P. Schapira: Équations aux dérivées partielles dans l'espace des hyperfonctions. (Séminaire P. Lelong),

Springer Lecture Notes. 71.

1969

24. P. Schapira: Problème de Dirichlet et solutions des hyperfonction d'équation elliptique. Bull. UMI (4) No.3, 367-372.

25. ______ : Solutions hyperfonctions des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Bull. Soc. Math. France, 97, 234-255.

26. J.M. Kantor: Hyperfonctions cohérentes. C. R. Acad. Sci. Paris, 269, 18-20.

27. R. Harvey: The theory of hyperfunctions on totally real subsets of a complex manifold with applications to extension problems. Amer. J. Math., 91, 853-873.

28. M. Morimoto: Une remarque sur le théorème du《Edge of the Wedge》de A. Martineau. Proc. Japan. Acad., 45, 446-448.

29. ______ : Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier, 19, 129-153.

30. 河合隆裕: Cohomological Analysis. "函数解析的方法による解析学の諸問題の研究" 報告集 (1969年3月)

31. 森本光生： 佐藤超函数とは何か. 数理科学 4月号. 31 - 35.

1970

32. 小松彦三郎： 超函数について, Buturi 25巻 1 号56-61.

33. 河合隆裕： 超函数論におけるFourier変換の理論とその応用、東京大学修士論文.

34. 金子 晃： 定数係数線型偏微分方程式系の正則解の構造について、東京大学修士論文

35. 浪川幸彦： 代数的超函数と双対性、東京大学修士論文.

36. M. Morimoto: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 17, 215-239.

37. T. Kawai: On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients.ibid, 467-517.

38. A. Kaneko: On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, ibid, 567-580.

39. Y. Namikawa: An application of Serre-Grothendieck Duality Theorem to Local Cohomology, Proc. Japan Acad.,

46, 483-486.

40. T. Kawai: Construction of Elementary Solutions for I-hyperbolic operators and solutions with small singularities, ibid, 912-916.

41. M. Kashiwara and T. Kawai: Pseudo-differential operators in the theory of Hyperfunctions (I), ibid, 1130-1134.

42. 河合隆裕：δ函数を"直接に"見た人の話 数理科学 6月号 24-31

43. P. Schapira: Construction de Solutions élémentaires dans le faisceau $\mathcal{C}$ de M. Sato, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Exposé N° 11.

44. ______ : Théorie des Hyperfonctions, Lecture notes in Math. 126, Springer.

45. 岡部靖憲：ブラウン運動と佐藤の超函数 $\aleph_1$ (同人雑誌), 56-70.

46. Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics., Tokyo, April, 1969: Univ. of Tokyo Press

M. Sato: Hyperfunctions and partial differential equations, 91-94.

A. Martineau: Le "edge of the wedge theorem" en théorie

des hyperfonctions, 95-106.

H. Komatsu: Boundary values for solutions of elliptic equations, 107-121.

47. 数学のあゆみ 15-1 佐藤幹夫特集号.

柏原正樹記: 超函数の構造について 9-72

榎本彦衛記: Maya game について 73-84

新谷卓郎記: 概均質ベクトル空間の理論 85-157

48. 「Hyperfunctions への応用をみこんだ代数幾何のシンポジウム」 held at 堅田 1969. 8/7-/9. 数学振興会セミナー報告集 (70.9)

1. 代数幾何学入門 上野健爾 25 pages
2. 概型の理論とその応用 浪川幸彦 35 pages
3. Duality の一般論とDerived category 柏原正樹 29 pages
4. 超函数の構造について 佐藤幹夫 30 pages

付録 Relative Cohomology of sheaves of solutions of differential equations (小松彦三郎) 59 pages.
([11] と同じ).

1971

49. 柏原正樹: 偏微分方程式系の代数的研究 東京大学修士論文

50. H. Suzuki: Local existence and analyticity of hyperfunction solutions of partial differential equations of

first order in two independent variables, J. Math. Soc. Japan, 23, 18-26.

51. T. Kawai: Construction of local elementary solutions for linear parial differential operators.

(I) Proc. Japan Acad., 47, 19-23

(II) ibid, 142-152

52. ______ : On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations. I. ibid, 537-540, II. ibid, 643-647.

53. M. Morimoto: Un théorème de l'analyticité des hyperfonctions invariantes par les transformations de Lorentz, ibid, 534-536

54. ______ : Support et support singulier de l'hyperfonction. ibid, 648-652.

55. S. Ōuchi: Hyperfunction solutions of the abstruct Cauchy problem, ibid, 541-544.

56. A. Kaneko: A new characterization of real analytic functions, ibid, 774-775.

57. H. Komatsu and T. Kawai: Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations. Publ. RIMS, 7, 95-104

58. T. Kawai: Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients.

I. The case with real principal symbols. ibid, 361-392

II. The case with complex principal symbols. ibid, 393-420

59. 矢野 環: Analytic hyperfunctions. – in the case of one variable, 数学のあゆみ, 16-1, 3-29.

60. 「佐藤超函数論とその周辺」

Symp. held at RIMS 1969 11/27-/29.

数理解析研究所講究録 108

1. 相対コホモロジーとその応用 小松彦三郎 1
2. 「くさびの刃定理」と「超函数の特異性の分解」 森本 光生 45
3. 超函数論の代数的基礎付け 柏原 正樹 58
4. 定数係数偏微分方程式の解の孤立特異点について 金子 晃 72
5. Hyperfunction における Fourier変換の理論とその応用 河合 隆裕 84
6. 変数係数偏微分方程式の解の存在と解析性（2変数1階作用素の場合） 鈴木文夫 289

61. 「佐藤超函数とその応用」

Symp. held at RIMS 1970 9/28-/30.

数理解析研究所講究録 114

62. 「Hyperfunctionsのシンポジウム」 報告集

( 微分作用素の局所理論)

Symp. held at RIMS 1970 12/23-/26

数学振興会、セミナー報告集

偏微分方程式系の代数的研究 (柏原正樹) 1-148

([49]と同じ)

Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients. (T. Kawai)

(I) The case with real principal symbols 149

(II) The case with complex principal symbols 197-238

63. 佐藤幹夫: 超函数と層Cをめぐって

( 代数解析学序論) — 名古屋大学における集中講義 —

数理解析研究所講究録 126, ( 浪川幸彦記).

64. 柏原正樹: 超函数論の個人的展望, 数学の歩み, 16-1, 108-112.

65. H. Komatsu: On the index of ordinary differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 18, 378-398.

66. A. Kaneko: On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets II, ibid, 415-433.

67. P. Schapira: Theoreme d'unicite de Holmgren et operateurs hyperboliques dans l'espace des hyperfonctions, Anais Acad. Brasil. Sc., 43, 38-44.

68. A. Kaneko: On the structure of hyperfunctions with compact supports, Proc. Japan Acad. 47, Suppl. II, 956-959.

1972

69. Actes, Congrès intern. Math. Nice 1970.
Tome 2.

A. Martineau: Fonctionelles Analytiques 635-642.

J. V. Egorov: On the local solvability of pseudo-differential equations 717-722

V. V. Grushin: Les problèmes aux limites dégénérés et les opérateurs pseudo-differentials 737-743

V. Maslov: The characteristics of pseudo-differential operators and difference schemes 755-769

M. Sato: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations ([61] の 6 と同じ)

70. M. Kashiwara: A remark on characters of unitary representation of semisimple Lie groups, 数理解析研究所講究録135, 10-14.

71. T. Kawai: Theorems on the finite dimensionarity of cohomology groups I, II. Proc. Japan Acad. 48, 70-72 and

72. M. Morimoto: La décomposition de singularités d'ultradistribution cohomologique, ibid, 161-165.

73. 「超函数論と偏微分方程式の理論」

Symp. held at RIMS 1971, 3/22-/25.

数理解析研究所講究録 145

74. 「超函数と解析汎函数の理論と応用」

Symp. held at RIMS 1971, 9/27-/30.

数理解析研究所講究録 162

75.「超函数と微分方程式」

Symp. held at RIMS, 1972, 3/21 - /24.

数理解析研究所講究録 168

76. T. Kawai: On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations(I), J. Math. Soc. Japan, 24, 481-517.

77. M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: On the structure of single linear pseudo-differential equations, Proc. Japan Acad.,48, 643-646.

78. M. Kashiwara and T. Kawai: On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations, I, Proc. Japan Acad. 48, 712-715

79. A. Kaneko: Representation of hyperfunctions by measures and some of its applications, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 19, 321-352.

80. ______: On the structure of Fourier hyperfunctions, Proc. Japan Acad, 48.,651-653.

1973

81. ______: On continuation of regular solutions of partial differential equations with constant coefficients, Proc. Japan Acad, 49, 1-3.

82. Hyperfunctions and Pseudo-differential Equations.
Proceedings of a conference at Katata, 1971.
to appear in Lecture Notes in Math. Springer No. 287,1973.

Part II

Preface Part II 264

M. Sato, T.Kawai and M. Kashiwara:

Microfunctions and Pseudo-differential Equations

I. Theory of microfunctions 265

II. Foundation of the theory of Pseudo-differential Equations 315

III. Structure of Systems of Pseudo-differential Equations 457

Bibliographie 524

83. M. Kashiwara and T. Kawai: On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations, II, to appear in Proc, Japan Acad.

84. T. Kawai: On the propagation of analyticity of solutions of systems linear differential equations with constant coefficients, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA.

85. ______: On the propagation of analyticity of solutions of convolution equations, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

86. ______: Finite-dimensionality of cohomology groups attached to systems of linear differential equations, to appear in ibid.

87. M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: On pseudo-differential equations in hyperfunction theory, to appear in Proc. Symp. on Partial Differential Equations at Berkeley, 1971, AMS.

88. H. Komatsu: On the regularity of hyperfunction solutions of linear ordinary differential equations with real analytic coefficients, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA.

89. T. Oshima: On the global existence of solutions of systems of linear differential equations with constant coefficients, to appear in J. Math. Soc. Japan.

90. T. Miwa: On the existence of hyperfunction solutions of equations with degenerate principal symbols, Proc. Japan Acad., 49, 88-93

91. A. Kaneko: On continuation of regular solutions with constant coefficients, ibid. 17-19.

92. Colloque international CNRS,
" Equations aux Dérivées Partielles Linéaires " , 1972.

1. M. Kashiwara, On the vanishing of cohomology of solution sheaf of the system of pseudo-differential equations.
2. M. Sato, Pseudo-differential equations and theta functions.
3. P. Schapira, Solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles.

4. H. Komatsu, Ultradistributions, hyperfunctions and linear differential equations.
5. T. Kawai, Applications of micro-local analysis to the study of linear differential equations.
6. J.-M. Bony, Solutions hyperfonctions des équations aux dérivées partielles hyperboloques.

93. 数学 25巻3号 1973年7月

小松彦三郎：

佐藤超函数と微分方程式

佐藤幹夫，河合隆裕，柏原正樹：

超函数論における擬微分方程式論

河合隆裕，金子 晃：

超函数と定数係数線型偏微分方程式論

岡部靖憲，小谷真一：

正規過程のマルコフ性と局所性について

森本光生：

くさびの刃の定理とマイクロ函数

鈴木文夫：

一階線形偏微分方程式の解析的解の大域的存在とその応用

藤原大輔：

Distributionを使う偏微分方程式論

94. 青木和彦，初等函数による積分表示と最大過剰決定の差分系及び漸近展開

数理解析研究所講究録 175, 23 − 42

95. 代数解析学の最近の展開
Symp. held at RIMS 1972 June
RIMS 講究録 (to appear)

96. 超函数と線型偏微分方程式 I
Symp. held at RIMS 1973 March
RIMS 講究録 (to appear)

2. Analytic function の境界値, Ultradistribution, Analytic functional, etc 関係の深いもの

1916

1. G.H. Hardy: Weierstrass's non-differentiable function, Tract. Amer. Math. Soc. 17, 301-325.

1923

2. J. Hadamard: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Yale Univ. Press (reprinted by Dover Pub. 1952)

1929

3. G. Pólya: Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreichen, Math. Z., 29, 549-640.

1932

4. S. Bochner: Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, (英訳 Lectures on Fourier Integrals, Ann. Math. Studies No.42, Princeton 1959)

1936

5. S.L. Sobolev: Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Mat. Sb, 1(43), 39-72.

1939

6. K.O. Friedrichs: On differential operators in Hilbert spaces. Am. J. Math. 61, 523-544.

1943

7. L. Fantappiè: Théoria de los functionales analyticos y sus aplicationes, Barcelone.

1944

8. T. Carleman: L'integrales de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala.

1945

9. L. Schwartz: Généralization de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques. Ann. Univ. Grenoble 21, 57-74.

1949

10. M. Riesz: L'integrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math., 81, 1-223.

1950

11. J.S. e Silva: As Funções Analíticas e a Analíse Funcional Port. Math., 1–130. (Thèse 1948)

12. J.G. Mikusinski: Sur les fondements du calcul opératoire, Studia Math., 11, 41-70.

1951

13. F. Pellegrino: La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications; in "P.Levy: Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle", 357-477.

1952

14. G. Köthe: Die Randverteilungen analytischer Functionen, Math. Z., 57, 13-33.

15. C.L. da Silva Dias: Espaços vectoriais topológicos e sua applicação nos espaços funcionais analiticos, Boletin da Soc. de Mat. de São Paulo, 5, 10-20.

16. A. Grothendieck: Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'equations aux dérivées partielles, J. d'Analy. Math. 2, 243-280.

1953

17. I.M. Gel'fand and G.E. Šilov: Fourier-transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem, Uspehi Mat. Nauk,8, 3-51(in Russian) (英訳: AMS transl., Ser. 2,5(1957), 221-274)

18. G. Köthe: Dualität in der Functionentheorie, J. reine angew. Math., 191, 30-49.

19. A. Grothendieck: Sur certaines espaces de fonctions holomorphes I, ibid, 192, 35-64; II, ibid, 193, 77-95.

20. H.G. Tillmann: Randverteilungen analytischer Functionen und Distributionen, Math. Z., 59, 61-83.

1956

21. N.N. Bogolyubov and O.O. Parasyuk: On the analytic continuation of generalized functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 109, 717-719. (in Russian)

1957

22. H.G. Tillmann : Die Fortsetzung analytischer Functionalen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21, 139-

1958

23. J.S. e Silva: Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel., Math. Ann., 136, 58-96.

1959

24. C. Roumieu: Nouvelles classes de distributions généralisées. C. R. Acad. Sci. Paris, 248, 346-348.

25. __________ : Sur la transformation de Fourier des

distributiones généralisées, ibid., 511-513.

1960

26. ___________ : Sur quelques extensions de la notion de distribution. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 77, 41-121.

27. H. Epstein: Generalization of the edge of the wedge theorem, J. Math. Phys. 1, 524-531.

1961

28. H.J. Bremmermann, L. Durand: On analytic continuation, multiplication and Fourier-transforms of Schwartz-Distributions. ibid, 2, 240-258.

29. Z. Luszczki, Z. Zielesny: Distributionen der Räume $\mathcal{D}'_{L^p}$ als Randverteilungen analytischer Functionen., Colloq. Math. 8, 125-131.

30. H.G. Tillmann: Distributionen als Randverteilungen analytischer Functionen II. Math. Z. 76, 5-21.

31. _____________: Darstellung der Schwartzchen Distributionen durch analytische Functionen. ibid, 77, 106-124.

32. M. Hasumi: Note on the n-dimentional tempered ultra-distributions, Tôhoku Math. J., 13, 94-104.

1962

33. C. Roumieu: Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et

sur certaines classes de variétés différentiables, J. Analyse Math., 10, 153-192.

34. L.Š. Hodžaev: On the operator of analytic continuation of generalized functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 147, 1296-1299. (in Russian) (英訳 Soviet Math. Dokl. 3,II, 1813-1816)

35. A. Martineau: Indicatrices des fonctionnelles analytiques et inversion de la transformée de Fourier-Borel par la transformation de Laplace, C. R. Acad. Sci. Paris, 255, 1845-47, 2888-90.

1963

36. G. Bengel: Distributionen aus $\mathcal{D}'_{L^p}$ und Randverteilungen analytischer Fucntionen. Diplomarbeit, Heidelberg.

37. F.E. Browder: On the ≪edge of the wedge≫ theorem. Canad. J. Math., 15, 125-131.
(小竹武氏も同じ頃同じ定理を得られている.unpublished)

38. A. Martineau: Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Analyse Math., 11, 1-164.

1965

39. C. Kiselmann: On unique supports of analytic functional,

Ark. för Mat. 6, 307-318. 1966.

40. A. Martineau: Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes, Math. Ann., 163, 62-88.

41. ____________: Fonction holomorphes et distributions, Univ. de Montpellier. No.19.

42. G. Björk: Linear partial-differential operators and generalized distributions, Ark. för Mat.,6, 351-407.

1968

43. P. Schapira: Sur les ultradistributions, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4, 395-415.

1972

44. H. Komatsu: A local version of Bochner's tube theorem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 19, 201-214.

1973

45. H. Komatsu: Ultradistributions, I. Sturcture theorems and a characterization, to appear in ibid.

46. Y. S. Park and M. Morimoto: Fourier ultra-hyperfunctions in the Euclidean n-space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 20, to appear.

## 3、その他関係あるもの

1950

1. F. John: The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 3, 273-304.

1954

2. L. Ehrenpreis: Solutions of some problems of division I. Amer. J. Math., 76, 883-903.

1955

3. L. Hörmander : On the theory of general partial differential operators, Acta Math., 94, 161-248.
4. B. Malgrange: Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, 6, 271-354.
5. I. M. Gel'fand and Ya. Šapiro: Homogeneous functions and their applications, Uspehi Mat. Nauk, 10, 3-70. (in Russian)
6. J. Leray: Hyperbolic differential equations, New York.

1956

7. H. Lewy: On the local character of an atypical linear differential equation in three variables and a related

theorem for regular functions of two complex veriables, Ann. Math., 64, 514-522.

8. L. Ehrenpreis: Sheaves and differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1131-1138.

9. _________ : Analytic functions and the Fourier transform of distributions I. Ann. Math., 63, 129-159.

10. __________: Solutions of some problems of division III. Amer. J. Math., 78, 685-715.

1957

11. H. Lewy: An example of a smooth linear partial differential equations without solutions, Ann. Math., 66, 155-158.

12. A. P. Calderón - A. Zygmund: Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., 79, 901-921.

13. J. Leray: Problème de Cauchy I, Bull. Soc. Math. France, 85, 389-430.

1958

14. ______ : _______________ II, ibid, 86, 75-96.

15. L. Ehrenpreis: Analytic functions and the Fourier transform of distributions II, Ann. Math., 89, 450-483.

1959

16. J. Leray: Problème de Cauchy III, Bull. Soc. Math. France, 87, 81-180.

1960

17. H. Komatsu: A characterization of real analytic functions. Proc. Japan Acad., 36, 90-93.

18. L. Ehrenpreis: Solutions of some problems of division IV, Amer. J. Math., 82, 522-588.

1961

19. __________ : Analytically uniform spaces and some applications. Trans. Amer. Math. Soc., 101, 52-74.

20. __________ : Fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients, and some of its applications. Proc. Intern Symp. On Linear Spaces, Jerusalem., 161-174.

1962

21. T. Kotaké and M. S. Narasimahn: Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator, Bull. Soc. Math. France, 90, 449-471.

22. H. Komatsu: A proof of Kotaké and Narasimahan's theorem, Proc. Japan Acad., 38, 615-618.

1963

23. B. Malgrange: Sur les systèmes differentiels à coefficients constants, Coll. C.N.R.S., 113-122.

1964

24. D. Quillen: Formal properties of overdetermined system. Thesis of Harvard Univ.

25. L. Gårding-T. Kotake-J. Leray : Problème de Cauchy $I^{bis}$ et VI, Bull. Soc. Math. France, 92, 263-361.

1965

26. B. Malgrange: Cohomologie de Spencer d'après Quillen. Publ. de Math. d'Orsey, 5$^e$ anné.

27. L. Hörmander: $L^2$ estimate and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., 113, 89-152.

28. __________ : Pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math., 18, 501-517.

29. V. P. Maslov: Theory of perturbations and asymptotic methods, Moskov. Gos. Univ., (in Russian)

1966

30. A. Friedman: Solvability of the first Cousin problem and vanishing of higher cohomology groups for domains which are not domains of holomorphy II, Bull. Amer. Math. Soc., 72, 505-507.

1967

31. C. Larsson: Generalized hyperbolicity, Ark. för Mat., 7, 11- 31.

32. P. Krée-L. B. Monvel: Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier, 17, 295-323.

33. D. C. Spencer: 同次線型偏微分方程式の解の層の分解について，東大セミナリーノート No. 11

34. H. Komatsu: Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan, 19, 366-383.

1968

35. S. Mizohata-Y. Ohya: Sur la conditon de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques, Publ. RIMS Kyoto Univ., 4, 511-526.

36. 斎藤泰司：定数係数偏微分方程式系のある種の代数的構造，RIMS講究録 No. 59, 238～248.

1969

37. Yu. V. Egorov: Conditions for the solvability of pseudo-differential equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 187, 6, 1232-1234 (in Russian) (英訳 Soviet Math. Dokl., 10(1969), 1020-1022)

38. ___________ : On canonical transformations of pseudo-differential operators, Uspehi Mat. Nauk, 25, 235-236, (in Russian)

39. R. Harvey-R. O. Wells: Compact holomorphically convex subsets of a Stein manifold, Trans. Amer. Math. Soc., 136, 509-516.

40. Y. Hamada: The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS Kyoto Univ. 5, 21-40.

41. C. Spencer: Overdetermined systems of linear partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., 179-239.

42. I. N. Berenšteǐn and S. I. Gel'fand: Meromorphic property of the functions $P^{\lambda}$, Funkt. Anal. i evo Pril., 3, 1, 84-85 (in Russian) (英訳 Funct. Anal. and its Appl. 3, 1, 68-69).

1970

43. L. Hörmander: On the singularity of solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 23, 329-358.

44. M. F. Atiyah: Resolution of singularities and division of distributions, Comm. Pure Appl. Math., 23-2, 145-150.

1971

45. I. Naruki: Holomolphic extension problem for standard real submanifolds of second kind, Publ. RIMS, 6, 113-187.

46. M. Zerner: Domaine d'holomorphic des fonctions verifiant une équations aux dérivées partielles, C. R. Acd. Sci. Paris, 272, 1646-1648.

47. I. N. Bernšteĭn: Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients. Funkt. Anal. i evo Pril., 5, 2, 1-16 (in Russian) (英訳 Funct. Anal. and its Appl. 5, 2, 89-101).

48. L. Hörmander: Fourier Integral Operators I, Acta Math., 127, 79-183.

49. ___________ : Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 24.

50. H. Komatsu: Cohomology of morphisms of sheafed spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 18, 287-327.

51. B. Malgrange  Remarques sur les points singuliers des équations différentielles, C. R. Acad. Sci. Paris, 273, 1136-1137.

1972

52. J. J. Duistermaat - L. Hörmander: Fourier Integral operators II, Acta Math. 128, 183-269.

53. I. Naruki: Localization principle for differential complexes and its application, Publ. RIMS 8, 43-110.

54. B. Malgrange: Sur les points singuliers des équations différentielles, Séminaire Goulaouic - Schwartz, 1971-1972, Exposés 20-22.

1973

55. T. Oshima: On the theorem of Cauchy-Kowalevsky for first order linear differential equations with degenerate principal symbols, to appear in Proc. Japan Acad.

56. L. Hörmander: On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients, to appear.

57. T. Miwa: On the global existence of real analytic solutions of systems of equations with constant coefficients.

講究録188号

# (ブラウン運動と佐藤の超函数)

岡部立譲

1. 序. 今年の一月、数理研において行われた佐藤の超函数に関する研究集会の際、私の下宿にて、畏友山田明雄君と議論をしていた時、"Weierstrass のブラウン運動" ということばを、彼が話した. "Weierstrass のブラウン運動" とは次の函数 $f$ のことです:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) : R \longrightarrow R$$

$(0<a<1,\ b>0)$

定数 $a, b$ によって、$f$ の可微分性がこわれる. Weierstrass は、$b$ は奇数の整数で、

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

のとき、どの点においても、$f$ は有限あるいは無限な微分係数をもたないことを示した (Journal für Mathematik, 79 (1875), 21-37). その後、Darboux, Faber, Landsberg, Lerch, Bromwich, Dini, Hobson, Wiener らの19世紀後半の人々によって、Weierstrass の結果は一般化されたが、望みうる最良のものとはいえなかった. 少し話すと、Bromwich の結果は、

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi(1-a)$$

のとき、Weierstrass のと同じことが成り立ち、

有限な微分係数をもたない条件に関しては、
Diniのは

$$ab \geq 1, \quad ab^2 > 1 + 3\pi^2$$

Lerchのは

$$ab \geq 1, \quad ab^2 > 1 + \pi^2$$

Bromwichのは

$$ab \geq 1, \quad ab^2 > 1 + \frac{3}{4}\pi^2(1-a)$$

であり、(以上はいずれも $b$ が奇数の整数)、$b$ が奇整数であることを除いたときには、
Diniのは

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi \frac{1-a}{1-3a}$$

$$\text{or} \quad ab \geq 1, \quad ab^2 > 1 + 15\pi^2 \frac{1-a}{5-21a}$$

であります。以上の条件が、Weierstrassの条件($ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$)の"忠実"な一般化となっていることに気づくのですが、G.H. Hardyが、"Weierstrass's non-differentiable function" (T.A.M.S., 17(1916), 301–325)において、"新しい方法"を用いて、最終的ではないにしろ、それに近い結果を出しました;

(i) $ab \geq 1$ のとき、どの点においても、

$f$ は有限な微分係数をもたない。

(ii) $ab \geq 1$ のときでも、無限な微分係数

をもつ点は存在する.

(iii) $ab > 1$ のとき、 $\xi = \dfrac{\log(\frac{1}{a})}{\log b}$ とおくと、

$0 < \xi < 1$ であるが、

$$f(x+h) - f(x) = O(|h|^{\xi}) \quad (\forall x \in R)$$

を満足するが、どの点 $x$ においても、

$$f(x+h) - f(x) = o(|h|^{\xi}) \quad .$$

は満足しない.

結果をみてお分りの様に、決定的な結果ではありませんが、Hardy が強調しているのは、この結果を産み出すのに用いた方法です. その idea は、$b$ が整数のとき、$\pi x = \theta$ とおくと、$f$ は $\theta$ について Fourier 級数になることに注意して、

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{b^n} \qquad (|z| < 1)$$

とおくと、$\varphi$ は $|z| \leq 1$ で連続で、$|z| < 1$ で正則になり、$f(x)$ は、$Re\,\varphi$ の境界値 $Re\,\varphi(e^{i\pi x})$ ととらえることができます。

ここまでくればお分りの様に、ここにおいても佐藤の超函数 hyperfunction 的とらえ方があらわれております。即ち、

Hardy の idea とは、（Weierstrass の）函数の可微分性を調べるのに、調和函数の境界値としてとらえることだったのです。なぜ、そうとらえてうまくいったかは、原論文を読んでいただければ分ると思いますが、hyperfunction 的とらえ方の有効な例のひとつになっておると思われます。

私が、ここで述べようとしますことは、畏友山田君から、"Weierstrass のブラウン運動"ということばを聞いたとき、確率論におけるブラウン運動とどうちがうのか？、又ブラウン運動は、ほとんどすべての path は微分不可能であるが、このことを示すのに Hardy の idea がいかせないのか？ ------ いたる所微分できない函数ということで Weierstrass が考えた函数を "Weierstrass のブラウン運動" というのだと思います。 いかせるとすれば、おのずと、ブラウン運動の hyperfunction 的とらえ方ができるはずだ ということが頭に浮かび、その時、計算したことを述べるだけでありまして、ブラウン運動の微分不可能性の証明はできますが、それ以上のこと、即ち、hyperfunction 的とらえ方がブラウン運動の研究にどれほど有効か ということに関しては 触れられません。 又、ブラウン運動以外の確率過程に対して、hyperfunction 的とらえ方ができるかについても 触れられません。 ただただ、今回は、ブラウン運動 という重要

な確率過程において、計算したことを述べるだけですが、このことから進展して、hyperfunction理論の確率論における有効性が発揮できればと思って、[redacted]に述べた次第であります。

　最後に、お許し願いたいことがあります。それは、[redacted]において述べたことのつづきとして、次回（[redacted]となりました）に、その証明をのせることを約束しましたが、その証明を述べることより、[redacted]の27頁に述べたことを強調するにとどめ、最近、hyperfunction理論がめざましく進んでいる現状をみて、確率論におけるそのひとつの計算例を述べる方が適当であると思い、今回の如くになった次第です。[redacted]の私の拙文を読んで下さった方には申し訳ありませんが、お許し願いたいと思います。

**2.** ブラウン運動とは、確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$における実数値確率過程$(B(t);\ 0\le t<\infty)$で、次の(1)〜(4)をみたすものをいいます。

(1) $\forall t_1<t_2<\cdots<t_n$に対して、

$$\{B(t_{k+1})-B(t_k);\ k=1,\cdots,n-1\} \text{ は独立}$$

(2) $\forall s<t$に対して、

$$B(t)-B(s) \text{ は平均0, 分散 } t-s$$

の正規分布 $N(0, t-s)$ に従う

(3) ほとんどすべての $\omega$ に対しては、$B(t,\omega)$ は $t$ の函数として連続

(4) $B(0)=0$

3. ブラウン運動の分解と構成については、

Wiener が完全に研究したのですが、伊藤先生（確率論、pp. 207 − pp. 218）によりますと、次の事実が成り立ちます。

分解；　ブラウン運動 $(B(t)\,;\,0\leq t\leq \pi)$ に対して、　互いに独立で、$N(0,1)$ に従う確率変数列 $\{X_n\,;\,n=0,1,\cdots\}$ が存在して、

$$B(t)=\frac{t}{\sqrt{\pi}}X_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin nt}{n}X_n$$

（収束は、ほとんどすべての $\omega$ に対して、$t$ に関して一様である）

と展開される。

逆に、
構成；　互いに独立で、$N(0,1)$ に従う確率変数列 $(X_n\,;\,n=0,1,2,\cdots)$ に対して、

$$B(t)=\frac{t}{\sqrt{\pi}}X_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin nt}{n}X_n$$

と定義すると、この級数は、ほとんどすべての $\omega$ に対して、$t$ に関して一様収束し、（$B(t)$ ; $0 \le t \le \pi$）はブラウン運動になる。

<u>$(B(t) ; 0 \le t \le \pi)$ と $(X_n ; n=0,1,\cdots)$ の関係;</u>

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} dB(t) = \frac{B(\pi)}{\sqrt{\pi}}$$

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin nt \, dB(t) \quad (n=1,2,\cdots)$$

（積分はブラウン運動に関する確率積分です）。

(注) 上述の伊藤先生の本においては、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kt}{k} X_k \right)$$

と、群別して一様収束性を扱っておりますが、伊藤・西尾（Osaka Journal of Mathematics, 5(1968), 35-78）によりますと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nt}{n} X_n$$

の形でも一様収束することが示されております。

## 4. ブラウン運動の微分不可能性について、

Mckean に従って、簡単に述べておきます

$$l_n \equiv \sum_{1 \le k \le 2^n \pi} | B(k2^{-n}) - B((k-1)2^{-n}) |$$

は $n$ と共に増加するが、

$$E[e^{-l_n}] \left( = \int_\Omega e^{-l_n(\omega)} dP(\omega) \right) =$$

$$= \left( E[\exp(-|B(2^{-n})|)] \right)^{[2^n \pi]}$$

$$\le \left( 1 - 2^{-\frac{n}{2}-1} + 2^{-n} \right)^{[2^n \pi]} \longrightarrow 0$$

であるから、

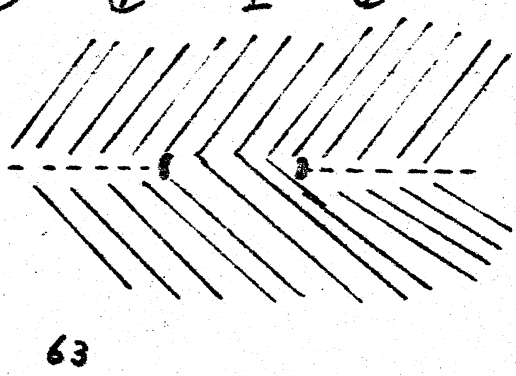
ブラウン運動 $(B(t); 0 \le t \le \pi)$ の長さ $l_\infty$ は無限大である。それ故、いたるところ微分できない。

## 5. ブラウン運動の hyperfunction 的とらえ方

について述べることにします

$$I = (0, \pi), \quad D = \mathbb{C}^- \cup I \cup \mathbb{C}^+$$

とおきます。



従って、 $0<y_0<\infty$ に対して、

$$E\Big(\sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^+\\ \operatorname{Im} z\ge y_0}} \Big|\frac{d}{dz}S_{mn}(z)\Big|^2\Big) \le$$

$$\le \sum_{k=m+1}^{n} e^{-2ky_0} + 2\sum_{p=1}^{n-m-1} E\Big(\sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^+\\ \operatorname{Im} z\ge y_0}} \Big|\sum_{h=m+1}^{n-p} e^{-hy}X_h e^{-(h+p)y}X_{h+p}\Big|\Big),$$

$$\Big(\frac{\text{上辺の第2項}}{2}\Big) \le \sum_{p=1}^{n-m-1} E\Big(\sum_{h=m+1}^{n-p} e^{-hy_0}e^{-(h+p)y_0}|X_h||X_{h+p}|\Big) \le$$

$$\le \sum_{p=1}^{n-m-1}\sum_{h=m+1}^{n-p} e^{-(2h+p)y_0} = \frac{e^{-2(m+1)y_0}}{1-e^{-2y_0}}\sum_{p=1}^{n-m-1} e^{-py_0}\big(1-e^{-2(n-p-m)y_0}\big)$$

従って、

$$E\Big(\sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^+\\ \operatorname{Im} z\ge y_0}} \Big|\frac{d}{dz}S_{mn}(z)\Big|^2\Big) \le$$

$$\le \frac{e^{-2(m+1)y_0}\big(1-e^{-2(n-m)y_0}\big)}{1-e^{-2y_0}} + 2\frac{e^{-2(m+1)y_0}}{1-e^{-2y_0}}\Big\{\frac{e^{-y}\big(1-e^{-(n-m-1)y_0}\big)}{1-e^{-y_0}} -$$

$$- e^{-2(n-m)y_0}\frac{e^{y}\big(1-e^{(n-m-1)y_0}\big)}{1-e^{y}}\Big\} =$$

$$= \frac{e^{-2(m+1)y_0}}{1-e^{-2y_0}}\Big\{\big(1-e^{-2(n-m)y_0}\big) + 2\frac{\big(1-e^{-(n-1)y_0}\big)}{e^{y_0}-1}\big(1-e^{-my_0}\big)\Big\}$$

$$\therefore \Big\{E\Big(\sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^+\\ \operatorname{Im} z\ge y_0}} \Big|\frac{d}{dz}S_{2^n,2\cdot 2^n}(z)\Big|\Big)\Big\}^2 \le$$

$$\le \frac{e^{-2y_0}}{1-e^{-2y_0}}\Big(1+\frac{2}{e^{y_0}-1}\Big)e^{-2^{n+1}y_0} = \Big(\frac{e^{-y_0}}{1-e^{-y_0}}\Big)^2 e^{-2^{n+1}y_0}$$

$$\therefore E\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^+\\ \operatorname{Im} z\ge y_0}} \Big|\frac{d}{dz}S_{2^n,2^{n+1}}(z)\Big|\Big) \le \frac{e^{-y_0}}{1-e^{-y_0}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2^{n+1}y_0} < \infty$$

ブラウン運動 $(B(t);\ 0\leq t\leq \pi)$ が与えられたとします。

$D^+(=\mathbb{C}^+)\ni z$ に対して、

$$X_+(z)\equiv \frac{z}{2\sqrt{\pi}}X_0+\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{ikz}}{k}X_k$$

$D^-(=\mathbb{C}^-)\ni z$ に対して、

$$X_-(z)\equiv X_+(-z)$$

と定義します。$(X_n;\ n=0,1,2,\cdots)$ は **3** の分解の所にでてきた、互いに独立で、$N(0,1)$ に従う確率変数列です。

**5.1.** $X_+(z)$ が $D^+$ において正則であることを示します。

$$S_{mn}(z)\equiv\sum_{k=m+1}^{n}\frac{e^{ikz}}{k}X_k\qquad(m<n)$$

とおくと、$\displaystyle\frac{d}{dz}S_{mn}(z)=\sum_{k=m+1}^{n} ie^{ikz}X_k$

が成り立ち、

$z=x+iy\quad(y>0)$ とおいて、

$$\left|\frac{d}{dz}S_{mn}(z)\right|^2=\Big(\sum_{k=m+1}^{n}ie^{ikz}X_k\Big)\Big(\sum_{h=m+1}^{n}-i\,\overline{e^{ihz}}X_h\Big)=$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}e^{-2ky}X_k^2+\sum_{m<h\neq k\leq n}e^{-hy}X_h\,e^{-ky}X_k\,e^{i(h-k)x}$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}e^{-2ky}X_k^2+\sum_{p=1}^{n-m-1}\Big(\sum_{h=m+1}^{n-p}e^{-hy}X_h\,e^{-(h+p)}X_{h+p}\Big)\big(e^{ipx}+e^{-ipx}\big)$$

従って、　ほとんどすべての $\omega$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^+ \\ \mathrm{Im}\, z \geq y_0}} \left| \frac{d}{dz} S_{2^n, 2^{n+1}}(z) \right| < \infty$$

即ち、　$\frac{d}{dz} S_{2^n, 2^{n+1}}(z)$ が　$\mathrm{Im}\, z \geq y_0$ において

一様収束することを意味し、　$S_{2^n, 2^{n+1}}(z)$ の同じ範囲における一様収束性は、上の証明と同じに成り立つので、

$$A_{y_0} \equiv \Big\{ \omega \,;\, \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^+ \\ \mathrm{Im}\, z \geq y_0}} |S_{2^n, 2^{n+1}}(z)| < \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^+ \\ \mathrm{Im}\, z \geq y_0}} \left| \frac{d}{dz} S_{2^n, 2^{n+1}}(z) \right| < \infty \Big\}$$

とおくと、　$P(A_{y_0}) = 1$　であり、　$\omega \in A_{y_0}$ に対しては、

$$\frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikz}}{k} X_k = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, S_{2^n, 2^{n+1}}(z)$$

は　$\mathrm{Im}\, z \geq y_0$　において　正則　であるから、

$$A \equiv \bigcap_{\mathbb{Q} \ni y_0 > 0} A_{y_0} \quad \text{とおけば、}$$

$P(A) = 1$　かつ

$\omega \in A$ に対しては、　$X_+(z)$ は　$z \in \mathbb{C}^+$ において正則である。

従って、又、　$\omega \in A$ に対して、$X_-(z)$ は $z \in \mathbb{C}^-$ において正則であることがわかる。

**5.2.** 最後に、我々の目標でありました
こと、

<u>ブラウン運動は、上半平面で正則な確率過程と下半平面で正則な確率過程の差であらわされる。</u>

具体的には、<u>$0 \leqq \forall x \leqq \pi$ に対して、ほとんどすべての $\omega$ に対して、</u>

$$B(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \{ X_+(x+i\varepsilon) - X_-(x-i\varepsilon) \}$$

<u>が成り立つ。</u>

ことを示します。

$$X_+(x+i\varepsilon) - X_-(x-i\varepsilon) = X_+(x+i\varepsilon) - X_+(-x+i\varepsilon) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\pi}} X_0 + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-k\varepsilon}(e^{ikx} - e^{-ikx})}{k} X_k$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\pi}} X_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-k\varepsilon} \sin kx}{k} X_k .$$

$$S^{(\varepsilon)}_{m,n}(x,\omega) \equiv \sum_{k=m+1}^{n} \frac{e^{-k\varepsilon} \sin kx}{k} X_k \quad (m<n)$$

とおくと、

$$|S^{(\varepsilon)}_{m,n}(x,\omega)|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{e^{-2k\varepsilon}(\sin kx)^2}{k^2} X_k^2 +$$

$$+\sum_{m+1\le h \neq k\le n} \frac{\sin hx\, X_h \cdot \sin kx\, X_k}{hk}\cdot e^{-(h+k)\varepsilon}$$

上式の第2項 $=\displaystyle\sum_{p=2(m+1)}^{m+n}\Big\{\sum_{\substack{h=m+1\\ h\neq p-h}}^{p-m}\frac{\sin hx\, X_h\ \sin(p-h)x\, X_{p-h}}{h(p-h)}\Big\}e^{-p\varepsilon}+$

$$+\Big\{\sum_{\substack{h=m+1\\ h\neq m+n+1-h}}^{n}\Big(\frac{\sin hx\, X_h\ \sin((m+n+1-h)x)\, X_{(m+n+1-h)}}{h\,(m+n+1-h)}\Big)\Big\}e^{-(m+n+1)\varepsilon}+$$

$$+\sum_{p=m+n+2}^{2n}\Big\{\sum_{\substack{h=p-n\\ h\neq p-h}}^{n}\frac{\sin hx\, X_h\ \sin(p-h)x\, X_{p-h}}{h\,(p-h)}\Big\}e^{-p\varepsilon}.$$

従って、

$$E\Big(\sup_{\varepsilon\ge 0}|S^{(\varepsilon)}_{m,n}(x,\omega)|^2\Big)\le$$

$$\le\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{p=2(m+1)}^{m+n}E\Big(\Big|\sum_{\substack{h=m+1\\ h\neq p-h}}^{p-m}\frac{\sin hx\, X_h\, \sin(p-h)x\, X_{p-h}}{h\,(p-h)}\Big|\Big)+$$

$$+E\Big(\Big|\sum_{\substack{h=m+1\\ h\neq m+n+1-h}}^{n}\frac{\sin hx\, X_h\ \sin((m+n+1-h)x)\, X_{(m+n+1-h)}}{h\,(m+n+1-h)}\Big|\Big)+$$

$$+\sum_{p=m+n+2}^{2n}E\Big(\Big|\sum_{\substack{h=p-n\\ h\neq p-h}}^{n}\frac{\sin hx\, X_h\ \sin(p-h)x\, X_{p-h}}{h\,(p-h)}\Big|\Big)$$

一方、 $\{X_n;\ n=0,1,2,\cdots\}$ は 互いに 独立で、平均0、分散1 であること に注意すると、 上の 評価は さらに 進んで、 Schwarz の不等式を 用いることによって、

$$E\left(\sup_{\varepsilon\ge 0}|S^{(\varepsilon)}_{mn}(x,\omega)|^2\right) \le$$

$$\le \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{p=2(m+1)}^{m+n}\left\{\sum_{\substack{h=m+1\\ h\ne p-h}}^{p-m}\frac{1}{h^2(p-h)^2}\right\}^{\frac12} +$$

$$+ \left\{\sum_{\substack{h=m+1\\ h\ne(m+n+1-h)}}^{n}\frac{1}{h^2(m+n+1-h)^2}\right\}^{\frac12} + \sum_{p=m+n+2}^{2n}\left\{\sum_{\substack{h=p-n\\ h\ne p-h}}^{n}\frac{1}{h^2(p-h)^2}\right\}^{\frac12}$$

$$\le \frac{n-m}{m^2} + (n-m-1)\left(\frac{n-m}{m^4}\right)^{\frac12} + \left(\frac{n-m}{n^4}\right)^{\frac12} +$$

$$+ (n-m-1)\left(\frac{n-m-2}{m^4}\right)^{\frac12}$$

$$\therefore\quad E\left(\sup_{\varepsilon\ge 0}|S^{(\varepsilon)}_{n,2m}(x,\omega)|^2\right) \le$$

$$\le \frac{1}{m} + 2\cdot\frac{1}{m^{\frac12}} \le 3\,\frac{1}{m^{\frac12}}$$

従って、

$$E\left(\sup_{\varepsilon\ge 0}|S^{(\varepsilon)}_{2^n,2^{n+1}}(x,\omega)|\right) \le \sqrt{3}\,\frac{1}{2^{\frac{n}{4}}}$$

$$\therefore\quad E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\varepsilon\ge 0}|S^{(\varepsilon)}_{2^n,2^{n+1}}(x,\omega)|\right) \le \sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-\frac{n}{4}} < \infty$$

従って、　ほとんどすべての $\omega$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\varepsilon\ge 0}|S^{(\varepsilon)}_{2^n,2^{n+1}}(x,\omega)| < \infty$$

が成り立ち、このことは、ほとんどすべての $\omega$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{e^{-k\varepsilon}\sin kx}{k} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(\varepsilon)}_{2^n,2^{n+1}}(x,\omega)$$

が、$\infty > \varepsilon \geq 0$ に関して一様収束することを意味するが、$S^{(\varepsilon)}_{2^n,2^{n+1}}(x,\omega)$ は $\varepsilon$ に関して連続であるから、上の級数は $\varepsilon$ に関して連続となり、従って、$X_+(x+i\varepsilon) - X_-(x-i\varepsilon)$ の $\varepsilon \downarrow 0$ とした時の極限が存在して、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left( X_+(x+i\varepsilon) - X_-(x-i\varepsilon)\right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} X_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin kx}{k} X_k$$

$$= B(x)$$

が得られる。

$\boxed{\text{訂正}}$

P. 65 ↑3

$$\left(\sum_{k=m+1}^{n} i e^{ikx} X_k\right)\left(\sum_{h=m+1}^{n} -i\, \overline{e^{ihx}\, X_{h}}\right)$$

$k$ にする