数理解析研究所講究録
第189巻 1973年 82-88

DATA TYPEの公理系
(概 要)

伊藤貴康
(三菱電機中央研究所)

まえがき

D. Scottにより, data typeとdata type間の近似という概念が提案された。彼は, 近似の概念を表わす半順序関係 ⊑ と完備束を作るdata type上で定義された単調な連続関数をもとにして, data typeの計算モデルを提案した。

D. Scottの理論においては, 完備束上の単調関数が最小不動点を持つという事が, 重要な事実となっているが, 完備束を作るために, D. Scottは, 2つの仮想的な要素 ⊥ (bottom element) と ⊤ (top element) を導入している。これらの仮想的な要素は, 必ずしも, 現実的な意味を持たない場合があるために, これらの要素をrejectしようという動きがある。

本文は, そのような試みの一つであって, bottom elementとtop elementの存在を想定しないで, data typeの近似を表わす半順序関係の公理系を作る事を目的としている。

DATA TYPE の近似関係の公理系

data type というのは，ある type を持っている対象の集合であって，domain とも呼ばれる。data type 個々は，有限的な表現を許さないかも知れないが，有限的な表現により近似されるであろう事が，想像される。このように考えると，data type 間の近似の概念は重要なものと考えられよう。

$x \sqsubseteq y$ は，x は y への近似であるという関係を示すものとしよう。

この論文では，この述語 $\sqsubseteq$ を用いた data type 上の近似関係についての公理系を与える事を考える。

data type の近似の公理系は，次のような3つの公理と1つの axiom schema よりなる。

AXIOM 1 (Transitivity)

$$\forall x \forall y [x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \exists z (x \sqsubseteq z) \land \forall w (w \sqsubseteq x \Rightarrow w \sqsubseteq y)]$$

AXIOM 2 (Extensionality)

$$\forall x \forall y [x = y \Leftrightarrow \forall z (z \sqsubseteq x \Leftrightarrow z \sqsubseteq y)]$$

AXIOM 3 (Distinguishability)

$$\forall x \forall y [\neg(x \sqsubseteq y) \land \exists z (x \sqsubseteq z) \Rightarrow \exists w (w \sqsubseteq x \land \neg \exists v (v \sqsubseteq w \land v \sqsubseteq y))]$$

次に，Φ-domainという概念を導入しよう。

<u>定義</u>

$\varphi[x]$ を $\sqsubseteq$ に関する第一階述語論理式としよう。このとき，$\Phi(x;\varphi[x])$ を，$\varphi[x]$が充足されるdata typeの集合として，次のように定義されるものとする：

$z \sqsubseteq \Phi(x;\varphi[x])$なるための必要十分条件は，

$$\forall w[w \sqsubseteq z \Rightarrow \exists x[\varphi[x] \wedge w \sqsubseteq x] \wedge \exists u(z \sqsubseteq u)$$

この$\Phi(x;\varphi[x])$をΦ-domainと呼ぶ。

<u>AXIOM SCHEME</u> (Comprehension Axiom Scheme)

$$\exists y \forall z[z \sqsubseteq y \Leftrightarrow z \sqsubseteq \Phi(x;\varphi[x])]$$

<u>近似公理系における基本定理</u>

近似公理系の中で，次のような定理を証明できる。

<u>定理 1</u>

(i) Reflexivity

$$\forall x[\exists y(x \sqsubseteq y) \Rightarrow (x \sqsubseteq x)]$$

(ii) Antisymmetricity

$$\forall x \forall y[x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y]$$

(iii) Transitivity

$$\forall x \forall y \forall z [x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z]$$

<u>定理2</u>

(i) $\exists ! y \forall z [z \sqsubseteq y \Leftrightarrow z \sqsubseteq \Phi(x ; \varphi[x])]$

(ii) $\forall x \forall y [x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \sqsubseteq x \Rightarrow \exists w [w \sqsubseteq z \wedge w \sqsubseteq y])] \wedge \exists u (x \sqsubseteq u)$

(iii) $\forall y [y = \Phi(x ; x \sqsubseteq y)]$

<u>定義</u>

(i) $\mathbb{1} = \Phi(x ; x = x)$

(ii) $\mathbb{0} = \Phi(x ; x \neq x)$

$\mathbb{1}$は，この近似公理系の universe であり，$\mathbb{0}$ は data type ではない。したがって$\mathbb{0}$に対するいかなる近似式も存在しない。すなわち $\mathbb{1}$は Scott の $\mathbb{T}$ と同じであるが，$\mathbb{0}$は Scott の $\perp$ とは，異なるものとなる。

<u>定理3</u>

(i) $\forall x [x \sqsubseteq \mathbb{1} \Leftrightarrow \exists y (x \sqsubseteq y)]$

(ii) $\neg (\mathbb{0} \sqsubseteq \mathbb{1})$

(iii) $\forall x\ [(\forall y. \neg(y \sqsubseteq x)) \Leftrightarrow x = \mathbb{O}]$

定義

(i) $y \oplus z = \text{亜}(x ; x \sqsubseteq y \vee x \sqsubseteq z)$

(ii) $y \circ z = \text{亜}(x ; x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z)$

定理4

(i) $y \oplus z = \text{亜}(x ; x = y \vee x = z)$

(ii) $\forall x \forall y \forall z\ [x \sqsubseteq y \vee x \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq y \oplus z]$

(iii) $\forall x \forall y \forall z\ [x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq y \circ z]$

(iv) $\forall y \forall z\ [y \circ z \sqsubseteq \mathbb{1} \Rightarrow y \circ z \sqsubseteq z \wedge y \circ z \sqsubseteq y]$

(v) $\forall y \forall z\ [\neg \exists x (x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z) \Leftrightarrow y \circ z = \mathbb{O}]$

(vi) $\forall y\ [y \oplus \mathbb{O} = y]$

(vii) $\forall y\ [y \circ \mathbb{O} = \mathbb{O}]$

(viii) $\forall x\ [x \sqsubseteq y \circ z \Rightarrow x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z]$

したがって

$y \oplus z$は，yとzの上限，$y \circ z$は，yとzの下限である。

定義

$$y^c = \text{亜}(x ; \forall z\ (z \sqsubseteq x \Rightarrow \neg z \sqsubseteq y))$$

定理5

(i) $\mathbb{0}^c = \mathbb{1} \wedge \mathbb{1}^c = \mathbb{0}$

(ii) $\forall x \forall y \neg [x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq y^c]$

(iii) $\forall x [x \oplus x^c = \mathbb{1}]$

これらの結果は，近似公理系のモデルが，ブール代数のモデルとなることを示している。

また，集合論のモデルを近似公理系に，うめ込む事ができる事を示せる。このことからも，近似公理系が，data typeとしてプログラミング言語のuniverseを定義するに十分な能力を持っている事が分る。

ここに述べたような近似公理系をもとにした計算モデルを具体的に作る事は，今後の問題として残されている。

文献

(1) Birkhoff, G.: Lattice Theory, AMS Colloquium Publication Volume XXV

(2) Cohen, P. J.: Set theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin (1966)

(3) Ito, T.: A theory of formal microprograms, NATO Advanced Study Institute on Microprogramming

(4) 伊藤貴康：プログラム理論とその応用，電気学会雑誌，第91巻，第8号（昭和46年8月）

(5) Ito, T.: A formal approximation theory of data types, Symposium on Theoretical Programming, Novosibirsk, USSR (August 1972)

(6) Scott, D.: Outline of a mathematical theory of computation, Proc. Fourth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems (1970)

(7) Scott, D. and C. Strachey: Towards a mathematical semantics of computer languages, Proc. of the Symposium on Computers and Automata, Microwave Research Institute Series Volume 21, Polytechnic Institute of Brooklyn (1972)