数理解析研究所講究録
第190巻 1973年 2-11

代数方程式の解法について

東芝　平野　菅保

§1. 序

多変数を含む代数方程式の数値解法について、次の4点につき述べる。

第1は解の収束判定である。一般に有限確定回数の演算で代数方程式の解を求めることはできない。したがって、繰り返し計算で、得られている近似値を真の解へ近づけていくより他に方法はない。そこで、この繰り返し計算における解の収束判定が問題になる。I. 与えられる数値の誤差、II. 有限桁数演算による誤差を考えないと、無意味な計算をしていることになるし、特にII. の場合は誤差を考えないと、解がそれ以上の精度が得られない場合でも解の収束判定が満足されず、解が得られないことになる。又、解の収束桁数による収束判定は1元高次方程式における近接根、多元連立1次方程式における相対誤差の大きい解等からわかるように好ましくない。

第２は式の従属性である。多変数を含む代数方程式では、与えられる式の数は変数の数だけあるから、式がすべて独立であるか、あるいは従属である式が含まれているかが問題になる。これは線型の場合よりはるかに複雑であり、理論式としてはすべて独立である式であっても、数値的には従属な式の場合があり、又、変数の幾つかが特定の値をとると、従属になる式があったりするので、出発値又は繰り返し計算の途中で、それまでに得られている近似値を変数の値としたとき、与えられた式の中に従属性のある式があるか、ないかを調べなければならない。

第３は近似値より真の値に近づけるための増加分を求める問題である。求める解は近似値よりなるべく近いところにある真の値を求めるべきであり、一般には、与えられた式をそれぞれ近似値の点でテーラー展開し、２次微分以上の項を無視して計算する方法、すなわち、ニュートン法を用いて増加分を求めるのであるが、２次微分以上の項を無視できない場合があるので、無視せずに増加分を求めなければならない。又、線型の方程式を解くときと同様に、変数にあたる増加分の係数のスケーリングも考えなければならない。

第４は求められた解の誤差の問題である。収束判定により得られた近似解の精度がそれ以上よくならないとき、その得

られた近似値の点で与えられた式をテーラー展開する。もちろん各式の零次微分の項は誤差のみである。ここで、変数にあたる増加分の絶対値をなるべく小さくして、1次微分以上の項を各式毎に合計し、その合計値の絶対値が対応する式の零次微分の項の絶対値と等しくなるとき、その増加分がその変数の誤差である。いいかえると、各式の零次微分の項が誤差のみであるのに、誤差のみではないとして、更に近似解の精度をよくするために、その近似値になるべく近い解を求めるとき、その増加分が各変数の誤差を表わしている。

§2. 収束判定

与えられた代数方程式を(1)とする。

$$f_i(a_{ij} \pm \varDelta a_{ij},\ x_k) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n. \qquad (1)$$

$a_{ij} \pm \varDelta a_{ij}$: i 式の j 番目の誤差 $\pm \varDelta a_{ij}$ を含む定数

$j = 1, 2, \cdots\cdots$

x_k : k 番目の変数 $\qquad 1 \leqq k \leqq n$

l 回目の近似値 x_{kl}, ($k = 1, 2, \cdots\cdots, n$) を(1)に代入する。

$$f_i(a_{ij} \pm \varDelta a_{ij},\ x_{kl}) = y_i \pm \varDelta y_i \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n. \qquad (2)$$

$y_i \pm \varDelta y_i$ と $\pm \varDelta y_i$ とが(3)のようになると解は収束したことになる。

$$|\pm \varDelta y_i| \geqq |y_i \pm \varDelta y_i| \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n. \qquad (3)$$

各式に含まれている定数 $a_{ij} \pm \varDelta a_{ij}$ には誤差 $\pm \varDelta a_{ij}$ が含まれ

ており、又、有限桁数で計算を行なっているから、計算桁数以下は必ず丸められて、丸めの誤差が入る。したがって、(2)の右辺の値 $y_i \pm \Delta y_i$ は誤差 $\pm\Delta y_i$ を含む。(3)の条件が満足されれば(2)の右辺は誤差のみになり、繰り返し計算に $y_i \pm \Delta y_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) を用いても意味がなくなる。

l 回目の近似値 x_{kl}, ($k = 1, 2, \cdots, n$) を(1)に代入して、(2)の右辺の誤差 $\pm\Delta y_i$, ($i = 1, 2, \cdots, n$) を求める四則演算は、

加算　$(A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B) = C \pm \Delta C$　　$C = A + B$

減算　$(A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B) = C \pm \Delta C$　　$C = A - B$

乗算　$(A \pm \Delta A) \times (B \pm \Delta B) = C \pm \Delta C$　　$C = A \times B$

除算　$(A \pm \Delta A) \div (B \pm \Delta B) = C \pm \Delta C$　　$C = A \div B$

加減算　$\Delta C = |\Delta A| + |\Delta B|$ 又は $\Delta C = max(|\Delta A|, |\Delta B|)$

乗除算　$\Delta C = |C| \times \{ |\Delta A/A| + |\Delta B/B| \}$ 又は

$$\Delta C = |C| \times max\{ |\Delta A/A|, |\Delta B/B| \} \qquad (4).$$

実際に用いる x_{kl}, ($k = 1, 2, \cdots, n$) は $x_{kl} \pm \Delta x_{kl}$ であり、$\pm\Delta x_{kl}$ は計算桁数が n 桁ならば、$n+1$ 桁目以下を丸めることによる誤差である。

次に誤差の消滅の問題がある。(1)に含まれる定数 $a_{ij} \pm \Delta a_{ij}$ の誤差 $\pm\Delta a_{ij}$ が互いに独立でないと、計算途中で誤差が消滅する場合があり、又、計算途中で入る誤差もそれ以後の計算で消滅する場合がある。その場合の誤差は(5)のようになる。

加減算　$\Delta C < max(|\Delta A|, |\Delta B|)$

乗除算　$\Delta C < |C| \times max(|\Delta A/A|, |\Delta B/B|)$　(5)

次に、誤差が消滅する例をあげる。まず、第1項と第2項の係数が同じである場合の(6)の計算をする。計算桁数がn桁であるために(6)の2つの項に入る相対誤差$\varepsilon \cdot 10^{-n}$($|\varepsilon| = 1.0$)より係数の相対誤差が、(7)のように、大きいとする。

$$(a_{ij} \pm \Delta a_{ij})x_k - (a_{ij} \pm \Delta a_{ij})x_{k'} \tag{6}$$

$$|(\pm \Delta a_{ij})/(a_{ij} \pm \Delta a_{ij})| > |\varepsilon \cdot 10^{-n}|, \quad |\varepsilon| = 1.0 \tag{7}$$

(4)による(6)の結果の絶対誤差は(8)である。

$$|(\pm \Delta a_{ij})x_k| + |(\pm \Delta a_{ij})x_{k'}| \tag{8}$$

x_kと$x_{k'}$との関係が(9)で表わせると、(6)の結果は(10)となる。

$$x_{k'} = (1 + \delta' \cdot 10^{-n'}) \cdot x_k, \qquad |\delta'| = 1.0 \tag{9}$$

$$(a_{ij} \pm \Delta a_{ij}) \cdot \delta' \cdot 10^{-n'} \cdot x_k \tag{10}$$

したがって、(11)のようになると、誤差のみのように考えられる。

$$\frac{\{|(\pm \Delta a_{ij})x_k| + |(\pm \Delta a_{ij})(1 + \delta' \cdot 10^{-n'})x_k|\}}{|(a_{ij} \pm \Delta a_{ij}) \cdot \delta' \cdot 10^{-n'} \cdot x_k|}$$

$$\fallingdotseq 2|(\pm \Delta a_{ij})| / |(a_{ij} \pm \Delta a_{ij}) \cdot \delta' \cdot 10^{-n'}| \geqq 1.0$$

$$\therefore |(\pm \Delta a_{ij})/(a_{ij} \pm \Delta a_{ij})| \geqq |0.5 \cdot \delta' \cdot 10^{-n'}| \tag{11}$$

ところが、(6)の第1項と第2項の係数は同じ数値であるから、誤差は独立でなく、(11)のようには誤差が入らない。第1項と第2項の減算で入る4捨5入の誤差は(12)であり、係数

の誤差による結果の誤差は(13)である。(12)と(13)の関係が(14)であると、計算桁数が不足していることになる。

$$(a_{ij} \pm \Delta a_{ij})\, x_k \cdot \delta \cdot 10^{-n}, \qquad |\delta| = 1.0 \qquad (12)$$

$$(\pm \Delta a_{ij})\, x_k \cdot \delta' \cdot 10^{-n'} \qquad (13)$$

$$\left|(a_{ij} \pm \Delta a_{ij})\, x_k \cdot \delta \cdot 10^{-n}\right| > \left|(\pm \Delta a_{ij})\, x_k \cdot \delta' \cdot 10^{-n'}\right|$$

$$\left|(\delta'/\delta) \cdot 10^{-(n-n')}\right| > \left|(\pm \Delta a_{ij})/(a_{ij} \pm \Delta a_{ij})\right| \qquad (14)$$

次に、(15)の解を求める場合、係数の中で相対誤差が一番大きい最高次数の係数で各係数を除して、(16)を作る。

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i \pm \Delta a_i)\, x^i = 0 \qquad (15)$$

ただし $\left|(\pm \Delta a_n)/(a_n \pm \Delta a_n)\right| > \left|(\pm \Delta a_i)/(a_i \pm \Delta a_i)\right|$

$i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$.

$$\sum_{i=0}^{n} \{(a_i \pm \Delta a_i)/(a_n \pm \Delta a_n)\} \cdot x^i = 0 \qquad (16)$$

ここで、(15)，(16)を用いて、計算桁数を段々増加させながら求解計算を行なう。(16)で得られる解は、各係数の誤差が(17)であるので、当然(15)で得られる解よりも大きい誤差を含むと考えられるが、両者の差は(16)の係数を求めるときに入る4捨5入の誤差程度しかなく、計算桁数が$\pm \Delta a_i$,$(i = 0, 1, \cdots\cdots, n)$に比較して十分とられているならば、(16)の係数を求めるときの4捨5入の誤差は考える必要がない。

$$\left|\frac{a_i \pm \Delta a_i}{a_n \pm \Delta a_n}\right| \left\{ \left|\frac{\pm \Delta a_i}{a_i \pm \Delta a_i}\right| + \left|\frac{\pm \Delta a_n}{a_n \pm \Delta a_n}\right| \right\}$$

$$\fallingdotseq \left| \frac{a_i \pm \Delta a_i}{a_n \pm \Delta a_n} \right| \left| \frac{\pm \Delta a_n}{a_n \pm \Delta a_n} \right| \qquad (17)$$

すなわち、極端な場合を考えると、$a_n \pm \Delta a_n$ の代りに、誤差のみの定数 ε で(15)の係数を除して(18)を作り、(18)より解を求めてもよいことになる。同様に、(19)に任意の定数 ε を乗ずることでは、解に誤差を入れることにはならない。

$$\sum_{i=0}^{n} \{ (a_i \pm \Delta a_i) / \varepsilon \} \cdot x^i = 0 \qquad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \pm \Delta a_{ij}) \cdot \varepsilon \cdot x_j - \varepsilon \cdot c_i = 0 \qquad (19)$$

§ 3. 式の従属性

2つの式(20)，(21)の従属性を判断するには、各式を任意の点 $x_k = x_{kl}$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) でテーラー展開して(22)，(23)を作り、(24)が成り立つ定数 α が存在すれば(22)と(23)は完全に同じ式であり、(25)が成り立てば(22)，(23)を満足する解は存在しない。すなわち、(24)，(25)の条件が成り立つ場合が(22)と(23)とが従属関係にある場合であり、成り立たない場合が独立な関係にある。

$$\left. \begin{array}{ll} f(x_k) = 0 & (20) \\ g(x_k) = 0 & (21) \end{array} \right\} \quad k = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

$$0 = f(x_{kl}) + \sum_{k_1=1}^{n} \left[\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_{k_1}} \right]_{x_k = x_{kl}} \Delta x_{k_1} + \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{l_1 !\, l_2 !} \left[\frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_{k_1}^{l_1} \partial x_{k_2}^{l_2}} \right]_{x_k = x_{kl}} \Delta x_{k_1}^{l_1} \cdot \Delta x_{k_2}^{l_2} + \cdots\cdots$$

$$k_1 < k_2 \leqq n \,, \quad l_1 + l_2 = 2 \,, \quad l_1 \geqq 0 \,, \quad l_2 \geqq 0 \qquad (22)$$

$$0=g(x_{kl})+\sum_{k_1=1}^{n}\left[\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_{k_1}}\right]_{x_k=x_{kl}}\Delta x_{k_1}+\sum_{k_1=1}^{n}\quad\frac{1}{l_1!\,l_2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_{k_1}^{l_1}\,\partial x_{k_2}^{l_2}}\right]_{x_k=x_{kl}}\Delta x_{k_1}^{l_1}\cdot\Delta x_{k_2}^{l_2}+\cdots\cdots$$

$$k_1<k_2\leqq n\,,\quad l_1+l_2=2\,,\quad l_1\geqq 0\,,\quad l_2\geqq 0 \qquad (23)$$

$$\{\,(22)\ \text{式}\,\}=\alpha\cdot\{\,(23)\ \text{式}\,\} \qquad (24)$$

$$\{\,(22)\ \text{式}-f(x_{kl})\,\}=\alpha\cdot\{\,(23)\ \text{式}-g(x_{kl})\,\} \qquad (25)$$

ただし　　$f(x_{kl})\neq g(x_{kl})$

多変数方程式の例として、1元高次方程式の実数部と虚数部をそれぞれ独立変数として2元連立方程式にして解く場合がある。この場合は(27)の条件があるので、(28)を満足する場合を除くと、2次微分以上の項を除いても $f(x,y)$ と $g(x,y)$ とは必ず独立であり、例としては不適当である。

$$f(x,y)+g(x,y)\,i=0 \qquad (26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x} \qquad (27) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad (28)$$

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \qquad (29)$$

n 個の変数を持つ n 個の式、(30)の場合も同様に、任意の点 $x_k=x_{kl}$,$(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ でテーラー展開して(31)を求め、(32)又は(33)が成り立てば従属な場合である。

$$f_i(x_k) = 0 \qquad i=1,\cdots,n\ ;\ k=1,\cdots,n \tag{30}$$

$$0 = f_i(x_{kl}) + \sum_{k_1=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i(x_k)}{\partial x_{k_1}}\right]_{x_k=x_{kl}}\Delta x_{k_1} + \sum_{k_1,k_2=1}^{n}\frac{1}{l_1!\,l_2!}\left[\frac{\partial^2 f_i(x_k)}{\partial x_{k_1}^{l_1}\partial x_2^{l_2}}\right]_{x_k=x_{kl}}\Delta x_{k_1}^{l_1}\cdot\Delta x_{k_2}^{l_2} + \cdots\cdots$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n\ ;\quad k=1,2,\cdots\cdots,n$$

$$k_1 \neq k_2,\quad l_1+l_2=2,\quad l_1 \geqq 0,\quad l_2 \geqq 0 \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\{\ (31)\ \text{の}\ i\ \text{式}\ \} = 0 \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\{\ (31)\ \text{の}\ i\ \text{式} - f_i(x_{kl})\ \} = 0 \tag{33}$$

ただし　$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot f_i(x_{kl}) \neq 0$

§4. 求解計算

(31) の2次微分以上の項を除き n 元連立1次方程式 (34) を作り、(34) にスケーリングを行なって解いて得られた増加分 $\Delta\bar{x}_k$, ($k=1,2,\cdots;n$) を (31) の各項に代入する。次いで、(31) の2次微分以上の項を式毎に合計すると、その値が増加分を近似値に加えた点 $x_{kl}+\Delta\bar{x}_k$, ($k=1,2,\cdots;n$) での各式の値になっている。したがって、(31) の2次微分以上の項の絶対値が同じ式の (35) の値より一般に小さいことが望ましい。又、(36) か (37) が満足されるならば、$x_{kl}+\Delta\bar{x}_k$, ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) を次の近似値として採用し、これを繰り返せば解が得られる。

$$0 = f_i(x_{kl}) + \sum_{k_1=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i(x_k)}{\partial x_{k_1}}\right]_{x_k=x_{kl}}\Delta x_{k_1}$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n\ ;\quad k=1,2,\cdots\cdots,n \tag{34}$$

$$M_i = \max_{k_1=1,2,\cdots,n} \left(\left| \left[\frac{\partial f_i(x_k)}{\partial x_{k_1}} \right]_{x_k = x_{kl}} \Delta \bar{x}_{k_1} \right| \right) \quad i=1,2,\cdots\cdots,n \tag{35}$$

$$|f_i(x_{kl})| > |f_i(x_{kl}+\Delta\bar{x}_k)| \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n \tag{36}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_{kl})| > \sum_{i=1}^{n}|f_i(x_{kl}+\Delta\bar{x}_k)| \tag{37}$$

(36) 又は (37) が満足されないとき、α,(1.0 > α > 0) を増加分 $\Delta\bar{x}_k$, ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) に乗じて増加分の絶対値を小さくすることにより、2次微分以上の項の影響を小さくすることもできる。いま仮に、増加分 $\Delta\bar{x}_k$, ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) を近似値に加えると、その近似値に最も近い真の解になつたとする。このとき、この増加分 $\Delta\bar{x}_k$, ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) を (31) に代入して各項の絶対値を求めると、式毎に絶対値最大の項、最大影響項がわかる。この最大影響項の絶対値に比較して無視できる項を除いた形の式が (34) に代わる式であり、その式の1次微分の項のみを集めると、従属関係にある場合がある。又、2次微分以上の項が最大影響項になると、増加分 $\Delta\bar{x}_k$, ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) が複素数になることがあつたり、真の解が近似値のそばに複数個あることがある。

§ 5. 解の誤差

解に誤差が入る原因には、I. 与えられる数値の誤差, II. 有限桁数による演算誤差, 次いで、III. 近接している解が存在する場合, IV. 式の間に弱い従属関係がある場合が考えられる。