数理解析研究所講究録
第190巻 1973年 28-36

Čebyšev 型積分公式の決定方程式の数値解の精度について

徳島大・工　篠原能材

代数方程式

(1) $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

の数値解を求めるアルゴリズムとしては，色々な方法があるが，本文では，数値解析の基礎理論研究会（京都大学数理解析研究所，昭和44年2月）で報告した方法［1，5］を用いて，8次のČebyšev型積分公式の分点の決定方程式

(2) $$42525x^8 - 56700x^6 + 20790x^4 - 2220x^2 - 43 = 0$$

の根について考察する［3］。

方程式（2）の両辺を42525で割って，

(3) $$P(x) = x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + d = 0$$

をうる。ただし，

$$a = -1.3333333333,$$

$$b = 0.4888888889,$$

$$c = -0.0522045855 4,$$

$$d = -0.0010111699 0$$

とする。　$P(x)$ に $x = p + iq$ を代入して，

(4) $$P(x) = f(p, q) + i\,g(p, q)$$

とおく。　ただし，

$$\begin{aligned} f(p, q) = {} & [(p^4 - 6p^2q^2 + q^4)^2 - (4p^3q - 4pq^3)^2] \\ & + a[(p^2 - q^2)(p^4 - 6p^2q^2 + q^4) - 2pq(4p^3q - 4pq^3)] \\ & + b[p^4 - 6p^2q^2 + q^4] + c[p^2 - q^2] + d, \\ g(p, q) = {} & 8[p^4 - 6p^2q^2 + q^4][p^3q - pq^3] \\ & + a[2pq(p^4 - 6p^2q^2 + q^4) + 4pq(p^2 - q^2)^2] \\ & + b[4pq(p^2 - q^2)] + 2pqc. \end{aligned}$$

直交曲線からなる連立非線形方程式

(5) $$\begin{cases} f(p, q) = 0, \\ g(p, q) = 0 \end{cases}$$

に，我々の方法 [6] を適用すると，次の結果を得た。

	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$f(\hat{p}, \hat{q})$	$g(\hat{p}, \hat{q})$
1	0.9014939671	0.	$-0.92796\cdots \times 10^{-11}$	$-0.65590\cdots \times 10^{-38}$
2	-0.9014939671	0.	$0.11795\cdots \times 10^{-11}$	$0.99264\cdots \times 10^{-48}$
3	-0.5205709315	0.04844242160	$-0.71054\cdots \times 10^{-13}$	$0.25579\cdots \times 10^{-12}$
4	-0.5205709315	-0.04844242158	$-0.71054\cdots \times 10^{-13}$	$0.56843\cdots \times 10^{-13}$
5	0.	0.1290460868	$-0.28421\cdots \times 10^{-13}$	$0.14173\cdots \times 10^{-31}$
6	0.	-0.1290460868	0.	$-0.35433\cdots \times 10^{-32}$
7	0.5205709315	0.04844242158	$-0.29842\cdots \times 10^{-12}$	0.
8	0.5205709315	-0.04844242160	$0.42632\cdots \times 10^{-13}$	$-0.14210\cdots \times 10^{-12}$

Table 1

得られた数値解 $\hat{x}=\hat{p}+i\hat{q}$ を用いて，方程式 $P(x)=0$ の真の解 $\tilde{x}$ の存在保証および誤差 $|\hat{x}-\tilde{x}|$ の実際的な評価をうるために，次の定理を用いる。

URABE'S PROPOSITION :

代数方程式 $P(x)=0$ の数値解 $\hat{x}=\hat{p}+i\hat{q}$ の関数行列式は零でないとする，$|J(\hat{x})|\neq 0$.

適当な正数 δ と非負数 κ（$0\leqq\kappa<1$）が存在して，

(i) $\|J(x)-J(\hat{x})\|\leqq\dfrac{\kappa}{M}$ for $x\in\Omega_\delta=\{x:|x-\hat{x}|\leqq\delta\}$,

(ii) $\dfrac{M\cdot r}{1-\kappa}\leqq\delta$,

ただし，

$$J(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q}\\ \frac{\partial g}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial q}\end{pmatrix},$$

$$r\geqq|P(\hat{x})|,$$

$$M\geqq\|J^{-1}(\hat{x})\|$$

が成立するとき，

代数方程式 $P(x)=0$ は複素平面上の有界閉領域 Ω_δ で，ただ1つの単根 $\tilde{x}$ をもち，かつ，誤差評価

$$|\hat{x}-\tilde{x}|\leqq\frac{M\cdot r}{1-\kappa}$$

が成立する。 証明は，$\alpha=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$，$\mathbb{F}=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}$ とおけば，$P(x)=0$ と $\mathbb{F}(\alpha)=0$ が同値であることから，文献[2]の

証明がそのまま適用できることからわかる。

さて，Table I で与えられた数値解 1〜8 が実際に，方程式 (3) の真の解の近似解を与えることの保証およびその誤差評価について考えよう。他も同様であるので，本文では Table I の数値解③について詳述する。

〔A〕 数値解

$$\begin{cases} \hat{p} = -0.5205709315, \\ \hat{q} = 0.0484424216 0 \end{cases}$$

についての偏微分係数は次のようになった。

$$f_p(\hat{p},\hat{q}) = -0.2912269049 \times 10^{-2},$$

$$f_q(\hat{p},\hat{q}) = 0.1644052260 \times 10^{-1},$$

$$g_p(\hat{p},\hat{q}) = -0.1644052260 \times 10^{-1},$$

$$g_q(\hat{p},\hat{q}) = -0.2912269049 \times 10^{-2}.$$

この値を用いると，

$$|J(\hat{x})| = 0.2787720944 \times 10^{-3},$$

$$\|J^{-1}(\hat{x})\| = \frac{1}{|J(\hat{x})|}\left[f_p^2(\hat{p},\hat{q}) + f_q^2(\hat{p},\hat{q}) + g_p^2(\hat{p},\hat{q}) + g_q^2(\hat{p},\hat{q})\right]^{\frac{1}{2}},$$

従って，

(6) $$\|J^{-1}(\hat{x})\| < 84.71.$$

なお，使用した計算機は TŌSBAC 3400 なので仮数部は 37 bits，従って，$2^{-37} \fallingdotseq 0.73 \times 10^{-11}$ より計算結果の有効数字は 10 桁である。

従って，残差 $f(\hat{p},\hat{q})$ および $g(\hat{p},\hat{q})$ の計算途中での加減算により生じる丸め誤差を考えに入れると，残差の精度は，ほぼ 10^{-12} 程度と考えられる。従って，Table 1 の関数値 $f(\hat{p},\hat{q})$, $g(\hat{p},\hat{q})$ は，そのまま使用できないので，小数点以下才14桁までの計算で Interval Arithmetic [4] を併用した。結果は次の通りである。

$$f(\hat{p},\hat{q}) = 0.20 \times 10^{-12} \in [-0.60, 1.10] \times 10^{-12},$$

$$g(\hat{p},\hat{q}) = -0.50 \times 10^{-12} \in [-0.90, -0.30] \times 10^{-12}.$$

すなわち，

(7) $$|P(\hat{x})| < 0.50 \times \sqrt{2} \times 10^{-12}.$$

複素平面上の領域 Ω：

$$\Omega = \{ x = (p,q) : |p-\hat{p}| \leqq H, |q-\hat{q}| \leqq H, H = 2^{-8} \}$$

を考える。Ω 内の grid points

$$x = x_{ij} = (p_i, q_j) = (\hat{p} + \tfrac{H}{8} i, \hat{q} + \tfrac{H}{8} j) \quad (i,j = 0, \pm 1, \cdots, \pm 8),$$

において $\| J(x) - J(\hat{x}) \|$ を計算して

$$\| J(x) - J(\hat{x}) \| < 0.004 \quad \text{for } x \in \Omega$$

を得た。

(8) $$\delta = 2^{-8} = 0.00390625$$

とおけば，

$$\Omega_\delta = \{ x : |x - \hat{x}| \leqq \delta \} \subset \Omega,$$

従って，

(9) $$\| J(x) - J(\hat{x}) \| < 0.004 \quad \text{for} \quad x \in \Omega_\delta .$$

式 (6), (7), (8), (9) より，次の不等式を満す非負数 $\kappa < 1$ が存在すれば，定理の条件はすべて満される。

$$\begin{cases} 0.004 \leqq \dfrac{\kappa}{84.71} , \\ \dfrac{84.71 \times 0.5 \times 1.415 \times 10^{-12}}{1-\kappa} \leqq 0.00390625 . \end{cases}$$

すなわち，

$$0.004 \times 84.71 \leqq \kappa \leqq 1 - \frac{84.71 \times 0.5 \times 1.415 \times 10^{-12}}{0.00390625} .$$

ゆえに，

(10) $$0.33884 \leqq \kappa \leqq 0.99999999984 \cdots .$$

従って，次の誤差評価をうる。

(11) $$|\hat{x} - \tilde{x}| \leqq \frac{59.932325 \times 10^{-12}}{1 - 0.33884} < 0.91 \times 10^{-10} .$$

〔B〕 Table 1 の他の数値解①，⑤に対しても，〔A〕と同様の手順により次の結果を得た。

実根①に対しては，

$$\Omega_\delta = \{ x : |x - \hat{x}| \leqq \delta , \ \delta = 0.00390625 \},$$

(12) $$|\hat{x} - \tilde{x}| < 0.26 \times 10^{-10},$$

純虚根⑤に対しては，

(13) $$|\hat{x} - \tilde{x}| < 0.53 \times 10^{-11} .$$

[C]　係数 a, b, c, d の誤差を考慮した場合

これまでの [A], [B] では，代数方程式 (3) の解について考察したが，[C] では，代数方程式 (2) の解について考える。

(14)
$$\left\{\begin{aligned}
a &= -1.3333333333333 \\
&\in [-1.33333333333334,\ -1.33333333333333], \\
b &= 0.48888888888889 \\
&\in [0.48888888888888,\ 0.48888888888889], \\
c &= -0.05220458553792 \\
&\in [-0.05220458553792,\ -0.05220458553791], \\
d &= -0.00101116990006 \\
&\in [-0.00101116990006,\ -0.00101116990005].
\end{aligned}\right.$$

Table 1 の解 ③, ④ に対しては，

$$f(\hat{p}, \hat{q}) = 0.784 \times 10^{-11} \in [0.724,\ 0.875] \times 10^{-11},$$

$$g(\hat{p}, \hat{q}) = -0.20 \times 10^{-12} \in [-0.70,\ 0.00] \times 10^{-12}.$$

従って，

$$|P(\hat{x})| \leqq [(0.875 \times 10^{-11})^2 + (0.07 \times 10^{-11})^2]^{\frac{1}{2}} < 0.88 \times 10^{-11}.$$

$r = 0.88 \times 10^{-11}$ を用いて

誤差評価

(15) $$|\hat{x} - \tilde{x}| < 0.12 \times 10^{-8} \qquad [\text{Cf. } (11)]$$

をうる。

Table 1 の実根①,②に対しては,

$$f(\hat{p},\hat{q}) = -0.2086 \times 10^{-10} \in [-0.2140, -0.2025] \times 10^{-10},$$

$$g(\hat{p},\hat{q}) = 0.$$

従って,

$$\gamma = 0.2140 \times 10^{-10}$$ とおいて

誤差評価

(16) $$|\hat{x} - \tilde{x}| < 0.95 \times 10^{-10} \qquad \text{[cf. (12)]}$$

をうる。

Table 1 の純虚根⑤,⑥に対しては,

$$f(\hat{p},\hat{q}) = -0.56 \times 10^{-12} \in [-0.86, -0.25] \times 10^{-12},$$

$$g(\hat{p},\hat{q}) = 0.$$

従って,

$$\gamma = 0.86 \times 10^{-12}$$ とおいて,

誤差評価

(17) $$|\hat{x} - \tilde{x}| < 0.81 \times 10^{-10} \qquad \text{[cf. (13)]}$$

を得た。

[D] Bairstow 法および McAuley 法による数値解

代数方程式(3)に Bairstow 法および McAuley 法を適用して,次の Table 2 の数値解を得た。

	(Bairstow)		(McAuley)	
	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$
1	0.9014939723	0.	0.9014939676	0.
2	−0.9014939723	0.	−0.9014939676	0.
3	−0.5205709469	0.04844253278	−0.5205709327	0.04844243425
4	−0.5205709469	−0.04844253278	−0.5205709327	−0.04844243425
5	0.	0.1290461524	0.	0.1290460920
6	0.	−0.1290461524	0.	−0.1290460920
7	0.5205709413	0.04844246238	0.5205709327	0.04844243249
8	0.5205709413	−0.04844246238	0.5205709327	−0.04844243249

Table 2

参考文献

[1] 非線型連立方程式の大域における数値解法，京大・数理解析研究所講究録 72，1965.

[2] Urabe, M., Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Arch. Rational Mech. Anal. 20 (1965), 120−152.

[3] 一松 信，数値解析，税務経理協会，昭46.2.

[4] Moore, R. E., Interval Analysis, Prentice-Hall, 1966.

[5] The geometric method and a generalized Bairstow method for numerical solution of polynomial equation, J. Math. Tokushima Univ. 4 (1970), 19−32.

[6] A geometric method for the numerical solution of nonlinear equations and its application to nonlinear oscillations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8 (1972/73), 13−42.