

線形常微分方程式のチェビシェフ級数解と

変換  $z = \frac{1}{2} (w + \frac{1}{w})$

京大 教研 森 正 武

実軸上の区間  $K = [-1, 1]$  において線形常微分方程式

$$p_0(x) \frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) u = f \tag{1}$$

を解く初期値あるいは境界値問題を考える。ここで左辺の係数  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$  は区間  $(-1, 1)$  の内部で正則であるとする。区間の端  $-1, 1$  は方程式 (1) の確定特異点あるいは不確定特異点であってよい。  $f(x)$  は  $K$  で正則であると仮定しておく。われわれの目的は  $f(x)$  が与えられたときこの方程式のチェビシェフ級数解を求めることである。これはすでに Clenshaw<sup>1), 2), 3)</sup> によって扱われた問題であるが、ここでは複素解析の立場からのアプローチを行う。  $n=0$  の場合は単に関数  $f(x)/p_n(x)$  のチェビシェフ展開を求める問題になる。

関数  $u(x)$  のチェビシェフ展開を

$$u(x) = \frac{1}{2} C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k(x) \tag{2}$$

とおく。いま複素  $z$ -平面を考え、区間  $K = [-1, 1]$  を単に  $z$ -平面内の実軸上の 1 区間とみなす。以下 (2) の収束の問題をこの  $z$ -平面で考え、変数  $x$  の代わりに  $z$  と書いて議論をすめる。

ここで変数変換

$$z = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right) \quad (3)$$

とチェビシエフ級数の関係を復習しておく。<sup>4)</sup> この変換により  $z = \pm 1$  を焦点とする  $z$ -平面の楕円

$$\left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right| = c \quad (4)$$

が原点を中心とする  $w$ -平面の二つの円

$$|w| = c, \quad |w| = 1/c \quad (4')$$

に写像される。特に  $z$ -平面の線分  $[-1, 1]$  は  $w$ -平面の単位円に写像される。この変換 (3) に対して、関数  $v(w)$  を

$$v(w) \equiv u \left( \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right) \right) \quad (5)$$

とおく。 $u(z)$  の特異点を通る楕円のうち最も小さい楕円  $E_0$  は変換 (3) によって単位円より小さい円  $C_1$  と大きい円  $C_2$  の二つに写像される (才 1 図)。このとき  $v(w)$  はこの二つの円

ではさまれる円環領域  $R$  でローラン級数に展開できる。

$$v(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \quad (6)$$

(5) より明らかに  $v(w) = v(1/w)$  であるから

$$a_k = a_{-k} \quad (7)$$

が成立する。したがって (5) は

$$v(w) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( w^k + \frac{1}{w^k} \right) \quad (6')$$

と書くことができる。  $w = e^{i\theta}$  とおけば (3) より

$$z = \cos \theta \quad (8)$$

であり、かつ

$$\frac{1}{2} \left( w^k + \frac{1}{w^k} \right) = \cos k\theta = T_k(\cos \theta) \quad (9)$$

であるから、(2) と (6)' を比較することにより結局

$$C_k = 2a_k \quad (10)$$

なる関係が得られる。

これらの事実から次のようにして (1) のチェビシェフ級数解を求めることができる。すなわち、与えられた方程式 (1)

を  $\alpha = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w})$  によって変数  $w$  に関する微分方程式に変換し、そのローラン級数解を求め、展開の係数を2倍する。

以上の議論から、チェビシエフ級数 (2) は楕円  $E_0$  の内部で収束することがわかる。方程式 (1) の特異点の区間  $K = [-1, 1]$  の端点、例えば  $z = -1$  に一致する場合には必ずしもその収束は云えないが、境界条件が有界なときには収束する場合がある。ただし、収束するのは全  $z$ -平面のうち線分  $[-1, 1]$  上においてのみである。しかしたとえ線分  $[-1, 1]$  だけであってもここで収束する級数が存在することは数値計算の上からは重要でありかつ十分である。

解くべき方程式が  $[-1, 1]$  以外の区間で与えられている場合には適当な変換によってこれを  $[-1, 1]$  に持ってきて、しかる後 (3) の変換を適用すればよい。特に重要なのは区間  $[0, 1]$  で定義されるいわゆるすらしチェビシエフ多項式  $T_k^*(x) = T_k(2x-1)$  による展開の場合で、そのとき (3) の代りに変換

$$z = \frac{1}{4}(w + \frac{1}{w} + 2) = \frac{(w+1)^2}{4w} \quad (11)$$

を適用すればよい。これは  $z = \frac{1}{2}(t+1)$  と  $t = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w})$  の合成である。また区間  $[a, \infty]$  の場合には変換

$$z = \frac{4\alpha w}{(w+1)^2} \quad (12)$$

が適当であろう。これは変換  $z = \frac{\alpha}{z}$  と  $t = \frac{1}{4}(w + \frac{1}{w} + 2)$  の合成で、この結果  $T_{t^*}(\frac{\alpha}{z})$  による展開が得られる。

**例 1**  $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z^2+1}$  ,  $u(0) = 0$  ,  $K = [-1, 1]$  (13)

この方程式の解は  $\arctan z$  である。この方程式に変換 (3) をほどこすと

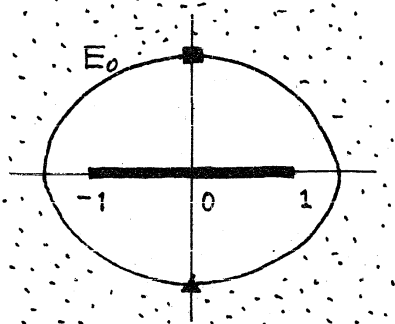
$$\frac{dv}{dw} = \frac{2(w^2-1)}{w^4+6w^2+1} , v(\pm i) = 0 \quad (14)$$

が得られる。右辺の関数の特異点は  $w^4+6w^2+1=0$  より

$$\alpha = (\sqrt{2}-1)i , \bar{\alpha} = -(\sqrt{2}-1)i , \beta = (\sqrt{2}+1)i , \bar{\beta} = -(\sqrt{2}+1)i \quad (15)$$

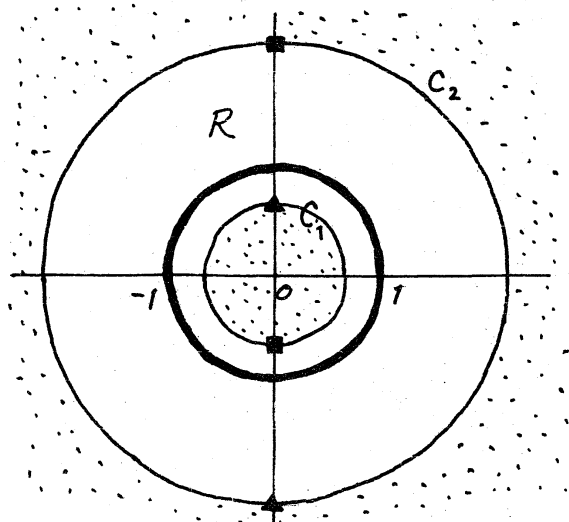
であり、これは (13) の右辺の持つ特異点  $z = \pm i$  に対称している

$z$ -平面



※ 1 図

$w$ -平面



る (オ1回)。 $v(w)$  のローラン展開を

$$v(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \quad (16)$$

と おいて (14) に代入すると

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k w^{k-1} = \frac{2(w^2-1)}{w^4+6w^2+1} \quad (17)$$

となるが、両辺に  $w^{-k}$  をかけて内環領域  $R$  の内部を一周する積分路  $C$  によって積分すると

$$k a_k = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{w^2-1}{w^k(w^4+6w^2+1)} dw \quad (18)$$

となる。右辺の積分は留数定理によって計算できる。(7) より  $k \geq 0$  のときの  $a_k$  のみを計算すればよいから、いま  $k > 0$  として右辺の被積分関数を

$$\frac{w^2-1}{w^k(w^4+6w^2+1)} = \frac{A}{w-\alpha} + \frac{B}{w-\bar{\alpha}} + \frac{C}{w-\beta} + \frac{D}{w-\bar{\beta}} + \frac{R_1}{w} + \frac{R_2}{w^2} + \dots + \frac{R_k}{w^k} \quad (19)$$

のように部分分数に分解したと可る。積分路  $C$  の内側に存在する特異点は  $0, \alpha, \bar{\alpha}$  であるから、(19) を (18) の右辺に代入すれば

$$k a_k = 2(A+B+R_1) \quad (20)$$

を得る。一方 (19) の両辺に  $w^{-k}$  をかけて  $w \rightarrow \infty$  とすると

$$0 = A + B + C + D + R_1 \quad (21)$$

となる。したがって

$$k a_k = -2(C + D) \quad (22)$$

となり、 $C$ と $D$ だけを求めればよい。(19)の両辺に $w - \beta$ を掛けて $w \rightarrow \beta$ の極限をとると

$$C = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^k (\beta - \alpha)(\beta - \bar{\alpha})(\beta - \bar{\beta})} = \frac{(-i)^{k+3}}{4(\sqrt{2}+1)^k} = \frac{(\sqrt{2}-1)^k}{4} (-i)^{k+3} \quad (23)$$

となる。同様に(19)の両辺に $w - \bar{\beta}$ を掛けて $w \rightarrow \bar{\beta}$ とすると

$$D = \frac{(\sqrt{2}-1)^k}{4} (+i)^{k+3} \quad (24)$$

となる。 $k$ が偶数のとき $C + D = 0$ となるので、 $k$ は奇数とし

$$k = 2m + 1 \quad (25)$$

とすると

$$(2m+1) a_{2m+1} = (\sqrt{2}-1)^{2m+1} (-1)^m \quad (26)$$

を得る。したがって関数 $u(z)$ のチェビシェフ展開が

$$u(z) = a_0 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\sqrt{2}-1)^{2m+1}}{2m+1} T_{2m+1}(z) \quad (27)$$

となることがわかった。右辺の $a_0$ を除いた部分は奇関数であ

るが、境界条件  $u(0) = 0$  より  $u(z)$  全体も奇関数であり  $a_0 = 0$  となる。こうして方程式 (13) の解が得られた。

$$u(z) = \arctan z = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\sqrt{2}-1)^{2m+1}}{2m+1} T_{2m+1}(z) \quad (28)$$

この級数は才 1 回の楕円  $E_0$  の内部で収束する。

**例 2**  $\frac{du}{dz} = \frac{1}{2z} u$  ,  $u(1) = 1$  ,  $K = [0, 1]$  (29)

この方程式の解は  $\sqrt{z}$  で、 $z=0$  は (29) の確定特異点である。しかし区間  $[0, 1]$  で収束するチエビシエフ級数は存在する。一階の場合特異点での境界条件はそれが有界であれば解は自動的に満足するので、ここでは右端で条件を与えた。区間は  $K = [0, 1]$  であるからずらしたチエビシエフ多項式  $T_n^*(z)$  による展開

$$u(z) = \frac{1}{2} C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k^*(z) \quad (30)$$

を求めることにする。このとき (29) に変換 (11) をほどこすと

$$2(w+1) \frac{dv}{dw} = \frac{w-1}{w} v \quad (31)$$

を得る。ここで



$$v(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \quad (32)$$

を代入して  $w$  のべきに整理すると

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ (2k-3)a_{k-1} + (2k+1)a_k \} w^k = 0 \quad (33)$$

となり、これから  $a_k$  に関する漸化式

$$(2k-3)a_{k-1} + (2k+1)a_k = 0 \quad (34)$$

が得られる。この差分方程式の解は  $a_0$  を用いて具体的に

$$a_k = -\frac{2k-3}{2k+1} a_{k-1} \quad (35)$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} a_0 = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \left[ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right] a_0 \quad (36)$$

の形に書くことができる。  $a_0$  は境界条件  $v(1) = 1$  より定められる。

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2a_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right] = 2a_0 \times \frac{\pi}{4} \quad (37)$$

以上から (29) の解が得られた。

$$u(z) = \sqrt{z} = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{1}{2} T_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} T_k^*(z) \right] \quad (38)$$

この級数は線分  $[0, 1]$  上でのみ収束する。  $u(0) = 0$  が満足されていることは (36) を使うことにより確かめられる。しかしこのままではこの級数の収束は遅く実用的ではない。

$$\boxed{\text{例 3}} \quad \frac{du}{dz} = \left(1 + \frac{1}{z}\right) u^{-1}, \quad u(\infty) = 1, \quad K = [\alpha, \infty] \quad (39)$$

この方程式の解は積分指数関数  $E_1(z)$  が

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds = \frac{1}{z} e^{-z} u(z) \quad (40)$$

で与えられるような関数である。  $z = \infty$  が (39) の不確定特異点になっていることは容易に確かめられるが、  $[\alpha, \infty]$  で収束するチェビシエフ級数は存在する。このとき境界条件  $u(\infty) = 1$  は自動的に満足され、実際には不要である<sup>1)</sup>。ここでは変換 (12) を適用する。方程式は次のように変換される。

$$(w+1)^3 \frac{dv}{dw} + \frac{(w-1)\{w^2 + 2(2\alpha+1)w + 1\}}{w} v = 4\alpha(w-1), \quad v(-1) = 1 \quad (41)$$

$z = \infty$  に対応する点  $w = -1$  はこの方程式の不確定特異点である。

$$v(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \quad (42)$$

を (41) の両辺に代入して整理すると次の漸化式を得る。

$$\begin{aligned} (k-1)a_{k-2} + (3k+4\alpha-2)a_{k-1} + (3k-4\alpha-1)a_k + k a_{k+1} \\ = 4\alpha(\delta_{k,1} - \delta_{k,0}) \end{aligned} \quad (43)$$

$\delta_{k,1}, \delta_{k,0}$  はクロネッカーの  $\delta$  である。  $k = 1$  とおけば

$$(4\alpha+1)a_0 - (4\alpha-2)a_1 + a_2 = 4\alpha \quad (44)$$

を得る。このような関係から  $a_n$  を定めるには、文献(1)にあるように、十分大きな  $N$  をとり

$$a_{N+2} = a_{N+1} = 0, \quad a_N = 1 \quad (45)$$

とにおいて漸化式(43)を  $n$  が減少する方向に使って順次  $a_n$  を求め、最後に(44)によって規格化すればよい。このようにして係数が数値で与えられたチェビシエフ級数解が得られる。

$$u(z) = a_0 T_0^* + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k^* \left( \frac{\alpha}{z} \right) \quad (46)$$

これは全  $z$ -平面のうち区間  $[\alpha, \infty]$  においてのみ収束する。

$u(\infty) = 1$  および  $u(\alpha) = \alpha e^{\alpha} E_1(\alpha)$  が満足されていることは数値的に確認することができる。

ところで、級数(46)の収束は実用上十分存程にかなり速い。実際  $\alpha = 4$  の場合、 $2a_0 \approx 1.810708$  であるのに対して、 $2a_8 \approx 1.152681 \times 10^{-7}$  程度である。この理由は次のように説明される。与えられた微分方程式の不確定

特異点を  $z_0$  とすると、 $z_0$  はその方程式の解  $u(z)$  の真性特異点になる。したがって、 $u(z)$  は  $z$ -平面においてある方向から  $z_0$  に近づくとき急激に無限大に発散するが、その代り別のある

方向から近づくとき急激に0あるいはある有限な値に収束する

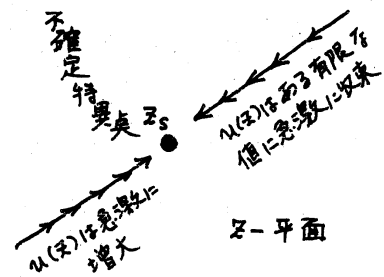


図4

(オ4回)。いまの例3では，不確定特異点  $x_s = \infty$  に対して実軸の方向から  $+\infty$  へ近づくとき  $u(x)$  は急激に 1 に収束しており，解の性質は著しく良くなっている。そのために収束の良いチェビシェフ級数が得られるのである。

一般に，数理物理学でよく現れる特殊関数を定義している2階の常微分方程式において  $x = \infty$  が不確定特異点になっているものが多いが，これらの解にとって，実軸沿いに  $x = +\infty$  に向かう方向が速やかに有限の値に収束する方向に一致しており，したがってこれらの方程式に対しては例3と同様にして収束の良いチェビシェフ級数が得られる<sup>3)</sup>。

#### [参考文献]

1. Clenshaw, The Numerical Solution of Linear Differential Equations in Chebyshev Series, Proc. Camb. Phil. Soc. 53 (1957) 134-149.
2. Urabe, Numerical Solution of Multi-Point Boundary Value Problems in Chebyshev Series Theory of the Method, Numer. Math. 9 (1967) 341-366.
3. 二宮市三, 漸近級数域での諸関数の計算法, 数理解析研究所共同研究集会「数値計算のアルゴリズムの研究」(1972秋) 予稿.
4. 一松信, 近似式, 竹内書店.