数理解析研究所講究録
第191巻 1973年 4-16

Martingale Transforms についての積分不等式
とくに行列型の作用素の比較について

東北大 教養 渡利 千波

序　discrete time martingales を、独立な確率変数を項とする級数の拡張と見て、実函数論的な手法で研究しようという試みが、1965年ごろからあらわれている。この際、一つの有力な手法は、対象を"good part"（L^2-theory の適用できる部分）と、"bad part"（L^2-theory が適用できない部分）とに分解して評価することで、stopping time（以下 ST と略記する）という確率論的な概念の利用と合わせて相当の成果が得られている。ただ、基礎となる分解定理にも、まだ便宜的な色彩が残っている等、未完成の部分も少なくないが、一応の現状を報告する。

§1. 準備

本節の結果に限らず、本稿の結果はほとんど σ-finite measure space で成立するが vector-valued martingale

を考える等，道具立てが複雑になるので，簡単のために確率空間に話を限定する。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を sub σ-field とする。 $B \in \mathcal{G}$ に対して，$f \in L^1(\Omega)$ を用いて

$$\mu_f(B) = \int_B f \, dP = E[f ; B]$$

とおけば，P-absolutely continuous な $\mathcal{G}$ 上の set function μ_f が得られるが，$P|_{\mathcal{G}}$ に関する Radon-Nikodym derivative $\frac{d\mu_f}{dP}$ を $E[f \mid \mathcal{G}]$ であらわし，f の $\mathcal{G}$ に関する conditional expectation という。$E_{\mathcal{G}}[f]$ と書くこともある。

$E[f \mid \mathcal{G}]$ は $\mathcal{G}$-measurable function で，つぎの性質をもつ。

(i) $f \geqq 0 \Rightarrow E[f \mid \mathcal{G}] \geqq 0$

(ii) f が $\mathcal{G}$-measurable $\Rightarrow E[f \mid \mathcal{G}] = f$ a.e.

(iii) c_1, c_2 constants $\Rightarrow E[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 E[f_1 \mid \mathcal{G}] + c_2 E[f_2 \mid \mathcal{G}]$

(iv) $\mathcal{H} < \mathcal{G} < \mathcal{F} \Rightarrow E_{\mathcal{H}}[E_{\mathcal{G}}[f]] = E_{\mathcal{H}}[f]$

(v) $f, g \in L^2(\Omega) \Rightarrow E[E[f \mid \mathcal{G}] g] = E[f E[g \mid \mathcal{G}]]$

(vi) $\| E_{\mathcal{G}}[f] \|_p \leqq \| f \|_p \quad 1 \leqq p \leqq \infty$

(vii) $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P) \Rightarrow E_{\mathcal{G}}[fg] = g E_{\mathcal{G}}[f]$

以下においては，$\mathcal{F}$ の sub σ-fields の増加列 $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を固定する。random variable $r : \omega \mapsto r(\omega)$ が

$$[\tau = n] \equiv \{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

（ただし τ は自然数又は ∞ を値にとるものとする）

をみたすとき、τ を stopping time といい、ST と略記する。τ が ST であるとき $\tau + 1$ も ST であり、2つの ST の小さい方 $\tau \wedge s$ も ST である。

確率変数列 $f = \{f_n\}$ において、f_n が $\mathcal{F}_n$－可測であれば f は adapted であるといい、f_n が $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測であれば f は predictable であるという。

$f = \{f_n\}$ が

1° adapted である。

2° f_n は各 n ごとに $L^1(\Omega)$ の元である。

3° $E[f_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geqq f_n$ a.e. $(n = 1, 2, \cdots)$

をみたすとき、f は submartingale であるという。$-f$ が submartingale であるとき、f を supermartingale という。3° において等号が成立するとき、すなわち submartingale であり同時に supermartingale である f を martingale という。

$p \geqq 1$ に対して

$$\|f\|_p = \sup_n \|f_n\|_p$$

とおく。$\|f\|_p < \infty$ であれば、f は L^p－bounded であるという。f が martingale であるとき、$|f|^p = \{|f_n|^p\}_{n \in \mathbb{N}}$ は submartingale である。で $f_n \in L^p$ $\forall n$

定理 1 (Martingale Maximal Theorem) $f = \{f_n\}$ が martingale あるいは non-negative submartingale であるとき,

(i) $\forall y > 0$ に対して $P[\, f^* \geqq y \,] \leqq \frac{1}{y} \| f \|_1$

(ii) $\| f^* \|_p \leqq A_p \| f \|_p \qquad (1 < p \leqq \infty)$

ここに $f^*(\omega) = \sup_n f_n^*(\omega) = \lim_n f_n^*(\omega) = \lim_n \sup_{1 \leqq k \leqq n} |f_k(\omega)|$

この定理は通常 "Doob の不等式" と呼ばれる.

([D] pp. 311 − 318 参照)

定理 2. (Marcinkiewicz の補間定理) T が可測函数 (random variable) を可測函数に移す作用素で

1° quasi-linear である, すなわち, ある $K (> 0)$ があって

$$|T(f_1 + f_2)(\omega)| \leqq K\left(|Tf_1(\omega)| + |Tf_2(\omega)|\right)$$

2° T は of weak type (1, 1) である, すなわち

$$\exists A > 0 \quad \forall y > 0 \quad \forall f \in L^1 : \quad P\left[|Tf| > y\right] \leqq \frac{A}{y} \| f \|_1.$$

3° T は of strong type (2, 2) である, すなわち

$$\exists A > 0 \quad \forall f \in L^2 : \quad \| Tf \|_2 \leqq A \| f \|_2$$

(2°, 3° における A はある絶対定数をあらわし, 同一とは限らない) であるとする。このとき $1 < p \leqq 2$ に対し

$$\| Tf \|_p \leqq A_p \| f \|_p$$

この定理の完全な形と証明については, たとえば $[Z_{\mathrm{II}}]$ pp. 112 − 115 参照)

§2. 分解定理. 対象となる martingales を "good part" と "bad part" とに分けるために, 後出の Gundy 分解が有効であるが, 本節では K. Azuma の考え方に従って Gundy の分解定理を証明する ([1])

定理3. (submartingale の Doob 分解) ([D], p. 297)
submartingale $f=\{f_n\}$ は, 一意に

$$f=\hat{f}+I \quad : \quad \hat{f} \ \text{martingale}$$
$$I \ \text{predictable increas. sequence}$$

と分解される. とくに, f が L^1-bounded かつ non-negative であれば, $I_\infty(\omega)=\lim_n I_n(\omega)$ が a.e. 存在して, 可積分である.

定理4 (L^1-bounded martingale の Krickeberg 分解)
L^1-bounded martingale f は, 一意に

$$f=f^{\oplus}-f^{\ominus}, \qquad \|f\|_1=\|f^{\oplus}\|_1+\|f^{\ominus}\|_1$$

$f^{\oplus}$, $f^{\ominus}$ は non-negative martingales と分解される.

証明. $f^+=\{f_n^+\}=\left\{\frac{1}{2}(|f_n|+f_n)\right\}$ は L^1-bounded non-negative submartingale である. 定理3 によって

$$f^+=\hat{f}+I, \qquad I_\infty=\lim_n I_n \in L^1$$

とできる.
$h_n=E[I_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ とおくと $h=\{h_n\}$ は non-negative martingale であり, $f^{\oplus}=\hat{f}+h$, $f^{\ominus}=\hat{f}+h-f$ はともに

martingales で, $f = f^{\oplus} - f^{\ominus}$ である。$I_n \uparrow$ ($n \uparrow$) であるから, I_n が ($\mathcal{F}_{n-1} \subset$) $\mathcal{F}_n$-可測であることから

$$f_n^{\oplus} = \hat{f}_n + h_n = f_n^{+} - I_n + E[I_\infty \mid \mathcal{F}_n]$$
$$= f_n^{+} + E[I_\infty - I_n \mid \mathcal{F}_n] \geqq 0$$

$$f_n^{\ominus} = \hat{f}_n + h_n - f_n = (f_n^{+} - f_n) + (h_n - I_n) \geqq 0$$

で, non-negative martingales の差に分解される。他方

$$\|f^{\oplus}\|_1 + \|f^{\ominus}\|_1 = \sup_n E[f_n^{\oplus}] + \sup_n E[f_n^{\ominus}]$$
$$= E[f_1^{\oplus}] + E[f_1^{\ominus}]$$
$$= 2E[\hat{f}_1] + 2E[I_\infty] - E[f_1] = (*)$$

と, $\|f^{+}\|_1 = \sup_n E[f_n^{+}] = E[\hat{f}_1] + E[I_\infty]$ とから

$$(*) = 2\sup E[f_n^{+}] - E[\hat{f}_1] = \sup_n \{2E[f_n^{+}] - E[f_n]\}$$
$$= \sup_n \{2E[f_n^{+}] - E[f_n^{+}] + E[f_n^{-}]\}$$
$$= \sup_n \{E[f_n^{+}] + E[f_n^{-}]\} = \sup_n E[|f_n|] = \|f\|_1.$$

一意性　$f_n = g_n^{\oplus} - g_n^{\ominus}$　$\|f\|_1 = \|g^{\oplus}\|_1 + \|g^{\ominus}\|_1$ を他の分解とすると, $g_n^{\oplus} \geqq 0$, $g_n^{\ominus} \geqq 0$ から

$$g_n^{\oplus} \geqq g_n^{\oplus} - g_n^{\ominus} = f_n \qquad \therefore\ g_n^{\oplus} \geqq \sup(f_n, 0) = f_n^{+}$$

したがって martingale equality から $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$g_n^{\oplus} = E[g_{n+m}^{\oplus} \mid \mathcal{F}_n] \geqq E[f_{n+m}^{+} \mid \mathcal{F}_n]$$
$$= E[I_{n+m} \mid \mathcal{F}_n] + \hat{f}_n$$

$m \in \mathbb{N}$ は任意だから $m \to \infty$ として単調収束定理から

$$g_n^{\oplus} \geqq E[I_\infty \mid \mathcal{F}_n] + \hat{f}_n = h_n + \hat{f}_n = f_n^{\oplus}$$

10

$f_n = f_n^{\oplus} - f_n^{\ominus} = g_n^{\oplus} - g_n^{\ominus}$ から $g_n^{\ominus} \geqq f_n^{\ominus}$

ところが

$$0 = E[(g_n^{\oplus} - f_n^{\oplus})] + E[(g_n^{\ominus} - f_n^{\ominus})]$$

( ) 内は a.e. $\geqq 0$ だから, $= 0$ でなければならない。

この証明は, 本質的には Davis (存在) Meyer (一意性) によっている。

定理5. (L^1-bounded Martingales の Gundy 分解)

L^1-bounded martingale f と, 正数 y とを与えるとき, つぎの条件をみたす3つの martingales a, b, g が存在する。ここに $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_n = a_n - a_{n-1}$ $(n>1)$ 等である。

(i) $f = a + b + g$

(ii) $P[\alpha^* > 0] \leqq A\|f\|_1 / y$, $\|a\|_1 \leqq A\|f\|_1$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \|\beta_n\|_1 \leqq A\|f\|_1$

(iv) $\|g\|_\infty \leqq Ay$, $\|g\|_1 \leqq A\|f\|_1$

証明. 必要があれば f に前定理を適用して, $f \geqq 0$ と仮定してよい。 $r(\omega) = \inf\{n : f_n(\omega) > y\}$ とおくと r は ST である。 $d_1 = f_1$, $d_n = f_n - f_{n-1}$ $(n>1)$ 等とおく。 $({}^{r-1}f^r)_n = \sum_{j=1}^{n} d_j 1_{[r=j]}$ で定義される ${}^{r-1}f^r$ は non-negative submartingale で, ($d_j 1_{[r=j]} \geqq 0$) しかも L^1-bounded である。実際

$$\|{}^{r-1}f^r\|_1 = \sup_n \|\sum_{j=1}^n d_j 1_{[r=j]}\|_1 = \|\sum_{j=1}^\infty d_j 1_{[r=j]}\|_1 \leqq \sum_{j=1}^\infty \|f_j 1_{[r=j]}\|_1$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \|f_n 1_{[r=j]}\|_1 \leqq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f_1\|_1 = \|f\|_1$$

${}^{r-1}f^r = \hat{f} + I$ (Doob 分解) とすると I は predictable で

$$s(\omega) = \inf\{n : I_{n+1}(\omega) > y\}$$ も ST である。

(i) について：
$$f = {}^{r\wedge s}f + f^{r\wedge s} = {}^{r\wedge s}f + (\hat{f} + (f^r - \hat{f}))^s$$
$$= {}^{r\wedge s}f + \hat{f}^s + (f^r - \hat{f})^s = a + b + g$$ とおく。

ここで、ST σ を用いて
$f_n^\sigma = \sum_{j=1}^n d_j 1_{[\sigma \geqq j]}$ "f stopped at σ"
${}^\sigma f_n = \sum_{j=1}^n d_j 1_{[\sigma < j]}$ "f started from σ"

という martingales を構成しているが、これは後者の martingale transforms の特別の場合である。

(ii)
$$P[\alpha^* > 0] \leqq P[r\wedge s < \infty] \leqq P[r<\infty] + P[s<\infty]$$
$$\leqq P[f^* > y] + P[I_\infty > y] \leqq 2\|f\|_1/y$$
$$\|a\|_1 = \|f - f^{r\wedge s}\|_1 \leqq \|f\|_1 + \|f^{r\wedge s}\|_1 \leqq 2\|f\|_1.$$

(iii)
$$\sum_j \|\beta_j\|_1 \leqq \sum_j \|\hat{f}_j - \hat{f}_{j-1}\|_1 = \sum_j \|({}^{r-1}f_j^r - I_j) - ({}^{r-1}f_{j-1}^r - I_{j-1})\|_1$$
$$\leqq \sum_j \|{}^{r-1}f_j^r - {}^{r-1}f_{j-1}^r\|_1 + \sum_j \|I_j - I_{j-1}\|_1$$
$$= E\Big[\sum_j ({}^{r-1}f_j^r - {}^{r-1}f_{j-1}^r)\Big] + E\Big[\sum_j (I_j - I_{j-1})\Big] \leqq 2\|f\|_1$$

(iv)
$$\|g\|_1 = \|f - a - b\|_1 \leqq \|f\|_1 + \|a\|_1 + \|b\|_1 \leqq 5\|f\|_1$$
$$\|g\|_\infty = \|(f^{r-1} + I)^s\|_\infty \leqq \|f^{(r-1)\wedge s}\|_\infty + \|I^s\|_\infty \leqq 2y.$$

この証明の中心は submartingale ${}^{r-1}f^r$ を Doob 分解することである。なお、他の証明として Burkholder([3] pp. 23-24)

!?

がある。

定理6 (Chow Decomposition) [6] $f=\{f_n\}=\sum d_n$ が martingale で、$S(f)=\left(\sum_{j=1}^{\infty} d_j^2\right)^{1/2}\in L^1(\Omega)$ であるとする。このとき、与えられた正数 y に対し martingales a, b, g が存在し

(i) $$f = a+b+g$$

(ii) $$[\alpha^* > 0] \subset [S(f) > y], \qquad S(a) \leqq S(f) \quad \text{a.e.}$$

(iii) $$\sum \|\beta_n\|_1 \leqq 2\|d^*\|_1 \leqq 2\|S(f)\|_1$$

(iv) $$\|g\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma_n\|_2^2 \leqq y\|S(f)\|_1 .$$

証明は前定理よりいくらか簡単である。原論文を参照されたい。Burkholder [3] による前定理の証明も同じ線上にあると思われる。

§3. Martingale Transforms と行列型の作用素.

martingale transforms の組織的な研究は、Burkholder [2] にはじまる。その主要定理の一つは、つぎの形に述べられる。

定理7. $f=\{f_n\}=\sum d_n$ を martingale, $v=\{v_n\}$ を predictable, uniformly bounded sequence とする。

$$(v\circ f)_n = \sum_{j=1}^{n} v_j d_j$$ とおくと $v\circ f$ は martingale で

(i) $$P[(v\circ f)^* > y] \leqq A\|f\|_1 / y$$

(ii) $$\|v\circ f\|_2 \leqq A\|f\|_2 .$$

たとえば, ST の を用いて $v_j = 1_{[\sigma \geq j]}$ ないし $v_j = 1_{[\sigma < j]}$ とすると, martingale transform が得られる.

この定理は, つぎの定理に含まれる.

Burkholder - Gundy は, 行列型の作用素 "Operators of Matrix Type" を定義した. $f = \{f_n\} = \Sigma d_n$ から

$$Mf(\omega) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_k \right|^2 \right\}^{1/2}$$

(a_{jk} は $\mathcal{F}_{k-1}$ - measurable で $0 < A \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}^2 \leq A' < \infty$)

を作る作用素である. これに関連して, 同じ条件のもとに

$$M_n f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_k \right|^2 \right)^{1/2}$$ "operator of finite matrix type"

$$M^{***} f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_k \right|^2 \right)^{1/2}$$ maximal matrix type

が考えられる. M_n は [5] において広く利用されているし, M^{***} は [10] において注意したが, 後に入手した [4] において取り扱われている。

定義 (Gundy [8]) Martingales に対して定義された quasi-linear operator T が of class $\mathcal{B}$ であるとは

1° "local" である: $[Tf \neq 0] \subset [d^* > 0]$

2° $L^1(\ell^1)$ - bounded である: $\|Tf\|_1 \leq A \sum_{j=1}^{\infty} \|d_j\|_1$

3° L^2 - bounded である: $\|Tf\|_2 \leq A \|f\|_2$

の 3 条件をみたすことをいう.

定理8. Martingale transforms, operators of (maximal)

!! Minkowski ineq. から $K=1$ でよい。(C.W.)

matrix type は of class $\mathcal{B}$ である。

証明. maximal matrix type について示せばよい。

$(u+v)^2 \leqq 2(u^2+v^2)$ から、$K=\sqrt{2}$ として M^{***} は quasi-linear である。([4] において $K=1$ でよいとしているのは理解できない)。1°〜3° のうち証明を要するのは 2° であろうが、$D=\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|$ とおくとき

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, d_k\Big|^2 \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n}|d_k|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2\,|d_k|\Big)$$

$$\leqq D\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^2\,|d_k|$$

n について上限をとり(右辺は n に無関係)、j について加え合わせて順序を交換すると

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sup_n\Big|\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, d_k\Big|^2 \leqq D\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}^2\,|d_k| \leqq A' D^2$$

であり、これから 2° が得られる。3° は定理1からでる。

Gundy 分解、Marcinkiewicz の補間定理と組み合わせて、つぎの系が得られる。

系. $\|M^{***}f\|_p \leqq A_p\|f\|_p \qquad (1<p\leqq 2).$

$$Nf = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\limsup\Big|\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, d_k\Big|^2\Big)^{1/2}$$

$$N_n f = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, d_k\Big|^2\Big)^{1/2} \qquad N^{***}f = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\sup_n\Big|\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, d_k\Big|^2\Big)^{1/2}$$

をもう一つの operator of (finite, maximal) matrix type とする。Burkholder – Gundy [5] の所論を少し修正して

つぎの定理が得られる．（この定理は［4］にも述べられていないようである．）

定理9．(i) $P[N^{***}f > y] \leqq A \sup_n \|M_n f\|_1 / y$

(ii) $\|N^{***}f\|_p \leqq A_p \sup_n \|M_n f\|_p \quad (1<p<\infty)$

この定理の証明はかなり複雑で，3段階に分けて実行される。

1° $Mf = S(f)$ のとき。Chow の分解定理が用いられる．

2° Khintchine の不等式に注意しながら Chow の分解定理を Mf に拡張する．

3° $p>2$ の部分には Khintchine の不等式で移る．

$f \longmapsto f^*$ は一つの operator of maximal matrix type であるから，ある operator of matrix type M に対して $\sup_n \|M_n f\|_p < \infty$ であれば f は L^p-bounded であるが，$p=1$ のとき，ある M に対して $\sup_n \|M_n f\|_1 < \infty$ から f が L^1-bounded と結論できるか否かは未確定のようである（M. Yamazaki の問題）。$p=1$ の場合には

$A\|f^*\|_1 \leqq \|S(f)\|_1 \leqq A'\|f^*\|_1$ （B. J. Davis ［7］）

が成立するが，より一般につぎの定理が成立する（［4］，［9］）

定理10．M，N を行列型の作用素とするとき

$\|N^{***}f\|_1 \leqq A \| \sup_n M_n f\|_1$.

文　献

[D] J. L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, New York, 1952.

[Z] A. Zygmund, Trigonometric Series, I and II, Cambridge, 1959.

[1] K. Azuma and C. Watari, Decomposition Theorems and Martingale Transforms, Preprint.

[2] D. L. Burkholder, Martingale Transforms, Ann. Math. Statist., 37(1966), 1494 - 1504.

[3] D. L. Burkholder, Distribution Function Inequalities for Martingales, Ann. Prob., 1(1973), 19 - 42.

[4] D. L. Burkholder, B. J. Davis and R. F. Gundy, Integral Inequalities for Convex Functions of Operators on Martingales, Proc. 6th Berkeley Symp., vol. 3, 223 - 240.

[5] D. L. Burkholder and R. F. Gundy, Extrapolation and Interpolation on Quasi-linear Operators on Martingales, Acta Math., 124(1970), 249 - 304.

[6] Y. S. Chow, Convergence of Sums of Squares of Martingales, Ann. Math. Statist., 39(1968), 123 - 133.

[7] B. J. Davis, Integrability of Martingale Square Functions, Israel J. Math., 8(1970), 187 - 190.

[8] R. F. Gundy, A Decomposition for L^1-bounded Martingales. Ann. Math. Statist., 39(1968), 134 - 138.

[9] M. Izumizawa, Comparison of Matrix Type Operators on Martingales, Preprint.

[10] C. Watari, Martingale Transforms について, 作行会シンポジウム, 1972.