

数理解済学における不等式

慶応大 渡部 隆一

と 1 Edgeworth の予想

経済学における Edgeworth の予想 [1] に関連して, 集合の non-convexity の measure とそれを評価する不等式を考える必要が生じたので, それについて紹介したい。

Edgeworth の予想については [2] に解説があるが, 数学的にキチンとしたモデルを作り部分的に解決したのは [3], [4] である。

— 記号 —

- $R^n$ : Euclidean space       $\Omega$ : non-negative orthant  
 $T$ : Set of traders       $m$ :  $T$  の member の数  
 $\succsim_t$ : preference relation of  $t \in T$   
 $w_t$ : resource of  $t \in T$ ,  $w_t \in \Omega$   
 $p$ : price vector,  $p = [p_1, \dots, p_n]$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$   
 $\langle x, y \rangle$ : inner product

Def. 1.  $\sum_{t \in T} x_t = \sum_{t \in T} \omega_t$ ,  $x_t \in \Omega$  を満たす  $\{x_t\}$  を allocation とし、 $T$  の任意なる部分集合  $S$  をとっても、

$$\sum_{t \in S} y_t = \sum_{t \in S} \omega_t, y_t \succeq_x x_t, (t \in S), \exists s \in S, y_s \succ_s x_s$$

となる  $\{y_t\}$  が存在しないとき、 $\{x_t\}$  を Core と呼ぶ。

Def. 2.  $\langle p, x_t \rangle \leq \langle p, \omega_t \rangle$  であって、 $\langle p, y_t \rangle \leq \langle p, \omega_t \rangle$ ,  $y_t \succ_x x_t$  となる  $y_t$  が存在しないような  $p$  と allocation  $\{x_t\}$  の組を competitive equilibrium とし、その  $\{x_t\}$  を equilibrium allocation と呼ぶ。

自然な仮定の下に eq. a. が Core に属することは直ちに  
いえるが、Edgeworth の予想とは次のことである。

『  $m$  の数を増すにつれて Core は次第に shrink して、ついに eq. a. と一致する 』

— Debreu の model —

1. Preference relation :

a)  $x \succeq_x x$     b)  $x \succeq_x y, y \succeq_x z \Rightarrow x \succeq_x z$     c) 任意の  $x, y$  について  $x \succeq_x y$  または  $y \succeq_x x$ .

2. Insatiability :  $\forall x \in \Omega, \exists y \in \Omega; y \succ_x x$ .

3. Convexity :  $\{y \mid y \succeq_x x\}$  は convex.

etc.

$T$  は  $m$  個の type よりなり, 各 type には  $r$  人の trader が存在し, 同一の type の trader は同一の preference と同一の resource を持っているとする。このような経済では,  $r \rightarrow \infty$  のとき Core は次第に shrink して eg. a. に極限では一致する。

— Aumann の model —

$T = [0, 1]$  ..... closed interval

allocation ;  $x : T \rightarrow \Omega$ ,  $\int_T x = \int_T \bar{z}$  ( $\bar{z}$  ; resource)

Core ;  $y(t) \succeq_t x(t)$  ( $t \in S$ ),  $\int_S y = \int_S \bar{z}$  とする  $S$  が存在しな

1. Desirability :  $x \succeq y \Rightarrow x \succeq_t y$

etc.

このような経済では, Core と eg. a. は一致する。

Debreu の model は仮定が強すぎるし, Aumann の model では「eg. a. 以外の Core は存在しな」こととを「つて」るに過ぎない。これら 2 つの model を変形した多くの論文が発表されてくるが, 本質的にはこれら 2 つと大差はな「ようである。Starr は [6] において, Edgeworth の予想を解決するため, non-convexity の measure を導入することを提唱した。

## 2 Measure of Non-convexity

以下, 集合  $S$  の convex hull を  $[S]$  で表す。

Def. 3. compact set  $S$  の radius を次のように定義する。

$$\text{rad}(S) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{y \in S} |x - y|$$

Def. 4. 集合  $S$  の inner radius を次のように定義する。

$$r(S) = \sup_{x \in [S]} \inf_{\substack{x \in [T], T \subset S \\ T: \text{finite}}} \text{rad}(T)$$

Th. ( $S$ starr)  $\mathcal{F}$  を compact set  $S$  の family とする。

$\exists L, \forall S \in \mathcal{F}, r(S) \leq L$  ならば,  $\mathcal{F}$  の任意の finite

subfamily  $\mathcal{F}'$  と,  $\forall x \in [\sum_{S \in \mathcal{F}'} S]$  に対して,

$$\exists y \in \sum_{S \in \mathcal{F}'} S, |x - y| \leq L\sqrt{n}$$

以下,  $S$ starr とは別の idea を紹介する。

Def. 5.  $\mathbb{R}^n$  の部分集合で次の条件を満たす集合  $B$  の全体から

なる family を  $\mathcal{L}_B$  とする。

1)  $B$  は閉集合 2)  $B \ni x \Rightarrow B \supset \{y \mid y \geq x\}$

3)  $\exists \omega, \forall x \in B; \omega \leq x$

さらに, 次の 4) を満たす集合全体の作る family を  $\mathcal{R}$  とする。

4) convex

次のことが成り立つ。

$$(1) \quad \alpha > 0, \mathcal{B} \ni X \Rightarrow \alpha X \in \mathcal{B} ; \quad \alpha > 0, \mathcal{O} \ni X \Rightarrow \alpha X \in \mathcal{O}$$

$$(2) \quad X, Y \in \mathcal{B} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{B} ; \quad X, Y \in \mathcal{O} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{O}$$

Def. 6.  $\Pi = \{p \mid p = [p_i], p_i \geq 0, \sum p_i = 1\}$  とし、 $X \in \mathcal{O}$ ,  $p \in \Pi$  に対して次のように定義する。

$$r(p, X) = \inf_{x \in X} \langle p, x \rangle$$

次のことが成り立つ。

$$(3) \quad \alpha > 0, X \in \mathcal{O} \Rightarrow r(p, \alpha X) = \alpha r(p, X)$$

$$(4) \quad X, Y \in \mathcal{O} \Rightarrow r(p, X + Y) = r(p, X) + r(p, Y)$$

$$(5) \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{のとき,}$$

$$r(\lambda p + (1-\lambda)q, X) \geq \lambda r(p, X) + (1-\lambda) r(q, X)$$

$$(6) \quad x \in X^\circ, X \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall p; \langle p, x \rangle > r(p, X)$$

Def. 7.  $B \in \mathcal{B}$  の部分集合で  $\mathcal{O}$  に属するもの全体を  $\mathcal{O}(B)$  で表わし、次のように定義する。

$$R(B) = \inf_{X \in \mathcal{O}(B)} \sup_{p \in \Pi} \{r(p, X) - r(p, [B])\}$$

次が成立。

$$(7) \quad R(B) \geq 0 \text{ であつて, } R(B) = 0 \Leftrightarrow B \in \mathcal{O}$$

$$(8) \quad \alpha > 0, B \in \mathcal{B} \Rightarrow R(\alpha B) = \alpha R(B)$$

$$(9) \quad R(B_1 + B_2) \leq R(B_1) + R(B_2)$$

$$(10) \quad R(B + a) = R(B)$$

### 2.3 ニ, 三の結果

前節で定義した良が,  $C$  に属する集合の non-convexity を示す measure と考えられるが, 以下において  $C$  に属する集合のベクトル和の non-convexity を良を用いて評価しよう。

Def. 8.  $x \in C$  があるとき,  $|t|$  が十分小さくすべで  $t$  に対して  $x + tx \in C$  となるならば,  $y$  を  $x$  における facial direction といい,  $x$  における facial direction 全体の集合を  $x$  における facial space といい, その次元を facial dimension と呼んで  $d(x|C)$  で表わす。

Lemma 1.  $C$  が convex で,  $x \in C$  ならば,  $x$  における facial space は linear space となる。これを  $L(x|C)$  で表わす。

Lemma 2.  $C$  を convex set とする。  $x_1, x_2 \in C$  で  $x_2 - x_1$  が  $x_1$  における facial direction ならば,

$$d(x_2|C) \leq d(x_1|C)$$

であって, 等号は  $x_2 - x_1$  が  $x_2$  における facial direction になっているときに限り成り立つ。

Lemma 3.  $x \in [S]$  とすると,  $S$  の有限部分集合  $T$  が存在して,  $x \in [T]$ ,  $\forall x' \in T$  に対して  $x' - x$  が  $L(x|[S])$  に属する。

次の定理が基本的な役割を演ずる。

Th. 1.  $\mathcal{F}$  を  $\mathbb{R}^n$  に属する集合の finite family とする。

$x \in \left[ \sum_{S \in \mathcal{F}} S \right]$  とすると,  $\mathcal{F}$  の分割  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  が存在して,  $\mathcal{F}_1$  は高々  $n$  個の member よりなり, 次のように表わされる。

$$x \in \sum_{S \in \mathcal{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S$$

proof.

$$x = \sum_{S \in \mathcal{F}} x(S), \quad x(S) \in [S]$$

と表現されるが, このような表現の中で,

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} d(x(S) | [S])$$

が最小となるものをえらび,

$$\mathcal{F}_1 = \{S \mid x(S) \notin S\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{S \mid x(S) \in S\}$$

とすると,

$$x = \sum_{S \in \mathcal{F}_1} x(S) + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} x(S) \in \sum_{S \in \mathcal{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S$$

$\mathcal{F}_1$  の member の数が高々  $n$  であることをいえばよい。そのためには,  $S \in \mathcal{F}_1$  に対して,  $x'(S) \in S$  で,  $x'(S) - x(S)$  が,  $x(S)$  における facial direction になるようにえらんだとき, これらが 1 次独立となることを証明する。もし, 1 次従属ならば,

$$\sum_{S \in \mathcal{F}_1} c(S) \{x'(S) - x(S)\} = 0 \quad (1)$$

となるすべては 0 でない実数の組  $c(S)$  が存在する。

$$x(t|S) = x(S) + c(S) \{x'(S) - x(S)\} t$$

$$I(S) = \{t \mid t \geq 0, x(t|S) \in [S]\}, \quad A = \bigcap_{S \in \mathcal{F}_1} I(S)$$

とすると,  $I(S) = [0, \infty)$  となるのは,  $[S] \in \mathcal{O}$  より,  
 $c(S) \{x'(S) - x(S)\} \in \Omega$  のときに限る。  $\forall S \in \mathcal{F}_1$  に対して,  
 $I(S) = [0, \infty)$  ならば, (1) より

$$\forall S; c(S) \{x'(S) - x(S)\} = 0 \quad \therefore \forall S; c(S) = 0$$

明らかに,  $I(S)$  は  $t$  の正数値を含み,  $\infty$  附近内である  
 から,  $A$  は有界な  $0$  を下限とする閉区間  $[0, a]$  ( $a > 0$ ) となる。

$$x = \sum_{S \in \mathcal{F}_1} x(t|S) + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} x(S)$$

であり,  $t \in A$  ならば  $\forall S \in \mathcal{F}_1; x(t|S) \in [S]$  であるから,

$$\sum_{S \in \mathcal{F}_1} d(x(t|S) | [S]) \geq \sum_{S \in \mathcal{F}_1} d(x(S) | [S]) \quad (2)$$

$c(S) \{x'(S) - x(S)\} t$  も  $x(S)$  における facial direction である  
 から, lemma 2 より

$$d(x(t|S) | [S]) \leq d(x(S) | [S]), \quad S \in \mathcal{F}_1, t \in A$$

ゆえに, (2) より  $t \in A$  のとき,

$$\sum_{S \in \mathcal{F}_1} d(x(t|S) | [S]) = \sum_{S \in \mathcal{F}_1} d(x(S) | [S])$$

$x(t|S) - x(S)$  が  $x(t|S)$  の facial direction になるから,  $|u|$  が  
 十分小さい正数  $u$  に対して,

$$x(t|S) + u \{x(t|S) - x(S)\} = x(S) + c(S) \{x'(S) - x(S)\} (t+u)$$

が  $[S]$  に属する。すなわち  $(t+u)t \in A$  となり, これは  $A$  の有  
 界性に反する。以上より  $\mathcal{F}_1$  の member は  $n$  個より多くない。



Lemma 4.  $e = [1, \dots, 1]$ ,  $B \in \mathcal{L} \Rightarrow [B] + r(B)e \subset B$

Lemma 5.  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{L}$  に属する集合の finite family とする。

$$d = \max_{S \in \mathcal{F}} r(S) \Rightarrow \sum_{S \in \mathcal{F}} [S] + nde \subset \sum_{S \in \mathcal{F}} S$$

proof.  $x \in [\sum_{S \in \mathcal{F}} S] \Rightarrow x \in \sum_{S \in \mathcal{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S$

$\mathcal{F}_1$  の member の数を  $l$  とすれば, 定理 1 より  $l \leq nd$ ,

$$\begin{aligned} x + nde &\in \sum_{S \in \mathcal{F}_1} ([S] + de) + (n-l)de + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S \\ &\subset \sum_{S \in \mathcal{F}_1} S + (n-l)de + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S \subset \sum_{S \in \mathcal{F}} S \end{aligned}$$

Th. 2.  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{L}$  に属する集合の finite family とすると,

$$r\left(\sum_{S \in \mathcal{F}} S\right) \leq n \left\{ \max_{S \in \mathcal{F}} r(S) \right\}$$

proof

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} [S] + nde \in \mathcal{A}\left(\sum_{S \in \mathcal{F}} S\right), \quad d = \max_{S \in \mathcal{F}} r(S)$$

$$\forall p; \quad r(p, \sum_{S \in \mathcal{F}} [S] + nde) - r(p, \sum_{S \in \mathcal{F}} [S]) = nd$$

$$\therefore \sup_p \left\{ r(p, \sum_{S \in \mathcal{F}} [S] + nde) - r(p, \sum_{S \in \mathcal{F}} [S]) \right\} = nd$$

$$\therefore r\left(\sum_{S \in \mathcal{F}} S\right) \leq nd$$

Cor.  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$  で  $\sup_{S \in \mathcal{F}} r(S) = d$  ならば,  $S_i \in \mathcal{F}$  のとき,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i\right) = 0$$

## References

- [1] Edgeworth, E. Y. [1881], *Mathematical Psychics*.  
London: C. Kegan Paul.
- [2] Shubik, M. [1959], "Edgeworth market games"  
in A. W. Tucker and R. D. Luce (eds), *Contributions to  
the Theory of Games*, IV. Princeton univ. press.
- [3] Debreu, G. and H. Scarf [1963] "A limit  
Theorem on the Core of an economy," *International  
Economic Review* 4. 235 ~ 246.
- [4] Debreu, G. [1963] "On a Theorem of Scarf,"  
*Review of Economic Studies*, 30. 177 ~ 180
- [5] Aumann, R. J. [1964] "Markets with a Continuum  
of Traders," *Econometrica*, 32, 39 ~ 50
- [6] Starr, R. [1969] "Quasi-equilibria in markets  
with nonconvex preferences," *Econometrica*, 37, 25 ~ 38
- [7] Arrow, K. J. and Hahn, F. H. [1971], *General  
competitive analysis*: Holden-day, INC.