

Generalized tangent の carrier と  
Lipschitz の不等式について

信大 理 浅田 明

§ 1. 曲線の generalized tangent.

$n$  変数関数  $f$  が,  $a$  で,  $\|y\|=1$  とする任意の  $y$  について,  
( $t > 0$  からの) 極限

$$Df(a, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{f(a+ty) - f(a)\}$$

を持ち,  $Df(a, y)$  が  $y$  の関数として,  $S^{n-1}$  の連続関数になると

時  $f$  は (右側) Gateaux 微分可能と呼ぶ ([3], [4]).

$\gamma = \gamma(t)$  が,  $a$  から出発する  $R^n$  の曲線と

$$(1) \quad \gamma(t) \neq a, \quad t \neq 0, \quad \|\gamma(t) - a\| = o(t),$$

とある時,  $f$  が  $a$  で Gateaux 微分可能であれば

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s Df(a, \frac{\gamma(t)-a}{\|\gamma(t)-a\|}) \|\gamma(t)-a\| dt$$

たから, (1) の 2 番目の仮定から,  $\|Df(a, y)\| = \max_{y \in S^{n-1}} |Df(a, y)|$  と

置く時,  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s (f(\gamma(t)) - f(a))/t \cdot dt$  が存在すれば, 適当な正数

$C$  が存在して (3) 之は  $C = \overline{\lim_{t \rightarrow 0} \|\gamma(t)-a\|/t}$  とすればよい)

$$(2) \quad \left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\delta} \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt \right| \leq C \|Df(a, y)\|$$

となる。従って Riesz の定理より、 $a$  で Gateaux 微分可能な関数  $f$  について極限  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\delta} \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt$  が存在すれば  $S^{n-1}$  の測度  $\mu$  が存在して

$$(3) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\delta} \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt = \int_{S^{n-1}} Df(a, y) d\mu$$

となる。

定義. (3) によって定まる  $\mu$  は  $\gamma$  の  $a$  での (右側) generalized tangent と呼ぶ  $\mathcal{X}^+ \gamma(a)$  と書く ([1], [2]).

例 1.  $\gamma$  が  $t=a$  で (右側) 微分可能な  $\mathcal{X}^+ \gamma(a) = c \delta_y$ ,  $c$  は正の定数,  $\delta_y$  は  $y (= S^{n-1})$  での Dirac 測度, である。

例 2.  $\gamma$  が  $R^2$  で  $r\theta = 1$  で与えられる  $\gamma$  は原点で generalized tangent を持ち,  $\gamma(t) = (t \cos(\frac{1}{t}), t \sin(\frac{1}{t}))$  と表示した時  $\mathcal{X}^+ \gamma(0) = \frac{d\theta}{2\pi}$ ,  $S^1$  上の standard measure, となる。

例 3.  $\gamma$  が  $R^2$  で  $t \sin \frac{1}{t}$ ,  $t > 0$  の graph の時  $S^1$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$  と表示) の連続関数  $g$  に対し

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\delta} g(\tan^{-1}(\sin \frac{1}{t})) \sqrt{1 + \sin^2(\frac{1}{t})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 v} g(\tan^{-1}(\sin v)) dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(\theta) (1/\cos^2 \theta \sqrt{\cos 2\theta}) d\theta \end{aligned}$$

となる  $\gamma$  は原点で generalized tangent を持ち,  $\text{car. } \mathcal{X}^+ \gamma(0) = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ,

且て  $\mathcal{X}^{\gamma}(a) = \frac{1}{\pi} \frac{d\theta}{\cos t \sqrt{\cos 2t}}$  とする

## § 2. 関数の generalized derivation.

1 変数関数  $\lambda(t)$  の graph が, generalized tangent を持つ条件を定める.

$\gamma$  が  $\lambda(t)$  の  $t=a$  から出発する graph なら  $\gamma(t) = (a+t, \lambda(a+t))$  なら  $t \geq 0$ ,

$$(4) \quad \lim_{s \rightarrow c} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow c} \int_h^s \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt$$

$$= \lim_{s \rightarrow c} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow c} \int_h^s Df(a, \tan^{-1}(\frac{\lambda(a+t) - \lambda(a)}{t})) \frac{\sqrt{t^2 + (\lambda(a+t) - \lambda(a))^2}}{t} dt$$

となる. 従ってこの時

$$\text{car. } \mathcal{X}^{\gamma}(a) \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

であり, 又  $f(\theta)$  が  $S'$  の連続関数なら  $f(\tan^{-1}t)$  は  $R'$  の連続関数で  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\tan^{-1}t)$  は共に存在するから

定理 1. 1 変数関数  $\lambda(t)$  の graph が  $t=a$  で generalized tangent を持つ場合には, 極限

$$\lim_{s \rightarrow c} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow c} \int_h^s f((\lambda(a+t) - \lambda(a))/t) dt$$

が,  $R'$  の,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/\sqrt{1+t^2}$  が共に存在する豫存, すべての連続関数に対して存在する事が必要十分である.

定義.  $\mathcal{A}(R)$  は  $L^1_{loc}(R')$  に含まれ, 位相が  $L^1_{loc}(R')$  より弱くない

$R'$  上の関数空間とする。すべての  $f \in \mathcal{F}(R')$  に対し、極限

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} f\left(\frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t}\right) dt$$

が存在する時

$$(5) \quad \mathcal{J}_{\mathcal{F}(R)'}^+ \chi(a)(f) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} f\left(\frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t}\right) dt$$

によって決まる  $\mathcal{F}(R)'^*$  ( $\mathcal{F}(R)'$  の dual space) の元  $\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R)'}^+ \chi(a) \in \mathcal{F}(R)'^*$  の  $a$  での (右側)  $\mathcal{F}(R)'$ -derivative 又は generalized derivative と呼ぶ。

例 1.  $\mathcal{F}(R) = R \cdot t$ , 関数  $\chi: t \mapsto t$ , 又は生成された一次元空間, とする時

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R)'}^+ \chi(a)(ct) = c \left( \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t} dt \right)$$

なので,  $\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R)'}^+ \chi(a)$  は (右側) Borel derivate  $B_r \chi(a)$  と思っ てよい ([6]).

例 2.  $\mathcal{F}(R) = \{f \mid f \text{ は連続, 且 } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) \text{ が共に存在する}\}$ , とする。この時  $\delta_\infty: \delta_\infty(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ ,  $\delta_{-\infty}: \delta_{-\infty}(f) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$ , は共に  $\mathcal{F}(R)'^*$  の元になるが  $\chi(t)$  が Weierstrass の例,  $\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(c^n \pi t)$ ,  $c$  は奇数,  $0 < b < 1$ ,  $bc > 1 + \frac{3}{2}\pi$ , の時

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R)'}^+ \chi(a) = \delta_{-\infty}, \quad a = \frac{m}{c^k}, \quad m, k \text{ は整数,}$$

となる。尚同じ  $a$  について左側 generalized derivative は  $\delta_\infty$  になる。

この例で他の点でどうなるか, 又他の例, 例之は Riemann の例ではどうなるかといふ, 左計算は又なりむつ又しい様である。

定理 2.  $\mathcal{F}(R)'$  が  $C(R)$  で dense, 且  $f_n$  を  $f_n(t) = f(a+t)$  とする時,

$f \in \mathcal{F}(R')$  なる  $f_0 \in \mathcal{F}(R')$  とするとする。この時

(i).  $\mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a)$  は  $R' \cup \{\pm\infty\}$ ,  $R'$  の 2 点  $\pm\infty$  による compact 化, 上の確率分布である。

(ii).  $\mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda_1(a)$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda_2(a)$  が共に存在すれば \* 正 convolution として

$$\mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ (\lambda_1 + \lambda_2)(a) = \mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda_1(a) * \mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda_2(a)$$

(iii).  $\mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a)$  が確率分布として平均を持つば,  $\mathcal{F}$  は Fourier 変換とし  $\pi(\mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a)) > 0$  の時

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \frac{1}{2\pi t} \log(\pi(\mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ (\lambda * \lambda)(a))) \right) = B_r \lambda(a) t,$$

但し  $B_r \lambda(a)$  は  $\lambda$  の  $a$  での右側 Borel 微分である。

### § 3. $\mathcal{F}(R')$ -derivative の carrier と Lipschitz の不等式

以上  $\mathcal{F}(R')$  は  $C(R)$  の dense な部分空間になっているとする。定義 2.5

定理 3.  $\lambda$  が  $a$  の右側で Lipschitz 条件

$$(6) \quad L \leq \frac{\lambda(a+t) - \lambda(a)}{t} \leq K, \quad 0 < t < \varepsilon,$$

をある  $\varepsilon > 0$  について満たし,  $a$  が  $\mathcal{F}(R')$ -derivative を持つば

$$(7) \quad \text{car } \mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a) \subset [L, K]$$

系.  $\lambda$  の  $a$  での右側 Dim derivative を  $d_a^+ \lambda$ ,  $D_a^+ \lambda$  とすれば

$$(7)' \quad \text{car } \mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a) \subset [d_a^+ \lambda, D_a^+ \lambda].$$

しかしこの逆は一般に成立しない(簡単に反例が作れる)。

$\text{car } \mathcal{F}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a)$  を含む最短の区間を決定する為次の lemma を使う。

Lemma 区間の特性関数系常に  $\mathcal{R}(R')$  の元により近似可能で、  
 $\mathcal{R}(R')^+ \chi(a)$  が存在すれば、(7) が成り立つ時任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  
 $\tau$  ( $m$  は Lebesgue measure として)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} m(\{t \mid \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{\tau} \leq K + \varepsilon\} \cap (0, \delta]) / \delta = 1,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} m(\{t \mid \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{\tau} \geq L - \varepsilon\} \cap (0, \delta]) / \delta = 0,$$

となる。

この lemma から  $\mathcal{R}(R')^+ \chi(a)$  が存在する時関数  $\chi_{\chi(a)}^+(u)$  は

$$\chi_{\chi(a)}^+(u) = \inf_{u' > u} \left( \lim_{\delta \rightarrow 0} m(\{t \mid \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{\tau} \leq u'\} \cap (0, \delta]) / \delta \right),$$

で定義出来且  $(\chi_{\chi(a)}^+)$  は単調増加だから  $\chi_{\chi(a)}^+$  に関する Lebesgue-Stieltjes 積分を定義出来

$$(8) \quad \mathcal{R}(R')^+ \chi(a)(f) = \int_{\mathcal{R}} f(u) d\chi_{\chi(a)}^+(u)$$

となる事が解るが、(8) から

$$(9) \quad AD_a^+ \chi = \inf_u \{u \mid \chi_{\chi(a)}^+(u) = 1\}, \quad Ad_a^+ \chi = \sup_u \{u \mid \chi_{\chi(a)}^+(u) = 0\},$$

と置けば

定理 4.  $AD_a^+ \chi, Ad_a^+ \chi$  は不等式

$$(10) \quad d_a^+ \chi \leq Ad_a^+ \chi \leq AD_a^+ \chi \leq D_a^+ \chi$$

を満たし、且

$$(11) \quad \text{car. } \mathcal{R}(R')^+ \chi(a) \subset [Ad_a^+ \chi, AD_a^+ \chi].$$

又 (7) が成り立つれば常に  $L \leq Ad_a^+ \chi, K \geq AD_a^+ \chi$  である。

尚 (9) は

$$(9)' \quad \inf_u \{u \mid \lim_{\delta \rightarrow 0} m(\{t \mid \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{\tau} \leq u\} \cap (0, \delta]) / \delta = 1\},$$

$$\sup_{h>0} |h| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(|t| \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{\varepsilon} \leq h) \wedge (c, \varepsilon J) / \varepsilon = c,$$

となるから,  $\text{car } \mathcal{F}_{\mathcal{R}}^+ \chi(a)$  が compact となる 爲には,  $\chi$  が  $a$  で, Lévy の意味で (右側) Lipschitz 連続になる事, 必要十分である ([5]).

定理 5.  $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^+ \chi(a) = \delta_c$  ( $c$  での Dirac measure) となる 爲の必要十分条件は,  $\chi$  が  $a$  で (右側) 微分可能で  $AD^+ \chi(a) = c$  となる事である.

証明. 必要性は定理 4 から任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$(12) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(|t| c - \varepsilon \leq \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{\varepsilon} \leq c + \varepsilon) \wedge (c, \varepsilon J) / \varepsilon = 1$$

となる事から解る. 逆に (12) が成立すれば連続な  $f$  に対し

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^0 f\left(\frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{\varepsilon}\right) dt - f(c) \varepsilon \right| \\ & \leq \left( \max_{c-\varepsilon \leq x, y \leq c+\varepsilon} |f(x) - f(y)| \right) \varepsilon + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

が任意の  $\varepsilon > 0$  に対し成立するから十分事が出る.

## 文 献

- [1]. Asada, A.: Generalized tangents of curves and generalized vector fields, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 6 (1971), 45 - 75.
- [2]. Asada, A.: Generalized integral curves of generalized vector fields, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 7 (1972), 59 - 118.
- [2]'. Asada, A.: Generalized vector field and its local integration.

- Proc. Japan Acad. 49 (1973), 73 - 76.
- [3]. Gâteaux, R.: Fonctions d'une infinité des variables indépendentes,  
Bull. Soc. Math. France, 50 (1919), 70 - 96.
- [4]. Hille, E - Phillips, R. S.: Functional analysis and semi-groups,  
Providence, 1957.
- [5]. Lévy, P.: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris,  
1937.
- [6]. Marcinkiewicz, J. - Zygmund, A.: On the differentiability of  
functions and summability of trigonometrical series, Fund. Math.  
26 (1936), 1 - 43.