数理解析研究所講究録
第 191 巻 1973 年 60-66

Wirsing の不等式について

岡山大 理　　鹿野　健

まず notation の説明から。

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \cdots\cdots \quad n = p^m \quad (p: 素数, m \in N), \\ 0 & \cdots\cdots \quad その他. \end{cases}$$

(von Mangoldt 函数)

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

$$r_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} - \dfrac{\Lambda(n)}{n} & \cdots\cdots \quad n \ge 2, \\ 1 - 2\gamma & \cdots\cdots \quad n = 1, \quad (\gamma: \text{Euler 定数}). \end{cases}$$

$$\rho(\xi) = \sum_{n \le e^\xi} r_n.$$

さて，Chebyshov の研究などを通して，素数定理 $\pi(x) \sim x/\log x \quad (x \to \infty)$ は $\psi(x) \sim x$

と同等であることが知られていたが，素数定理の初等的証明は1949年になって A. Selberg と P. Erdős の両者によって独立に得られた。後(1951年) Iseki − Tatuzawa によってその証明は簡単化され，見通し良く改良された。 一方，1962年になって E. Wirsing [4] は新しい初等的証明を発表したが，そこで彼が Lemma の一つとして用いた不等式（積分の合成積に関するもの）を紹介するのが本稿の目的である。（主として [2] によった。） 1963年には，Th. Bang [1] が，Wirsing とは独立に，別の不等式を用いて同様の初等的証明を得ている。この事実は余り知られていない様に思うが，最近出た W. Schwarz の本 [3] には紹介されているので参照されたい。 さて，Wirsing の不等式とは次のものである。

【定理】（E. Wirsing）

f，g は共に $[0,\infty)$ で定義された，ルベーグ可測な実数値函数とし，いずれも任意の有限区間上で2乗可積分とする。いま，

(1) $$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f^2(y)\,dy = F < \infty\ ,$$

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x g^2(y)\,dy = G < \infty,$$

とし,

(2) $$h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x-y)\,g(y)\,dy \qquad (x>0)$$

が

(3) $$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x h(y)\,dy = 0,$$

を満たすものとする。 すると,

(4) $$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int^x h^2(y)\,dy \le \frac{1}{2}FG.$$

ここに,右辺の定数$\frac{1}{2}$は best value である。

この不等式(4)で,右辺の定数が1より小さい(実は$\frac{1}{2}$)ことが本質的であり,重要なのである。 その理由は以下で分るが,(4)の証明法としては Wirsing の原証明である初等的方法以外のものが無いのは不思議である。 $\frac{1}{2}$が best であることは, $f(x) = g(x) = \sin x$ のときに$\frac{1}{2}$が実現される事から明かであろう。

このWirsingの不等式(4)が素数定理の証明にいかに結びつくかを見るために次のLemmaを述べよう。

(Lemma)　(E. Wirsing)

$\forall \varepsilon > 0$ に対して，以下の条件を満たすような“折れ線函数”（piece-wise linear function）σ が存在する。

(i)　$$\sigma(\xi) = \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} \sigma(\xi - \eta)\, d\sigma(\eta) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi}\right), \quad (\xi \geq 2)$$

(ii)　$|\sigma'(\xi)| \leq 1 + \varepsilon$,　$(\xi > 0)$

ただし可算個の点 $\xi = \xi_n$　$(n = 1, 2, \ldots)$ を除く。

(iii)
$$|\sigma(\xi) - \rho(\xi)| = O\left(\frac{1}{1+\xi}\right), \quad (\xi \geq 0).$$

すると，この σ について，Wirsing の不等式によって，

(5)　$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \sigma^2(y)\, dy = 0,$$

であることが証明される。

なぜならば，$f(y) = \sigma(y)$，$g(y) = \sigma'(y)$，$h(x) = \sigma(x) + o(1)$，と置けば，上の（Lemma）によって Wirsing 不等式の諸条件が満たされることが分るから，

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x}\int_0^x \sigma^2(y)\, dy \leq \frac{1}{2} \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x}\int_0^x \sigma^2(y)\, dy \times$$

$$\times \varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \sigma'(y)^2\,dy \quad \le \frac{1}{2}(1+\varepsilon)^2 \varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \sigma^2(y)\,dy .$$

$$\therefore \quad \varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \sigma^2(y)\,dy = 0 .$$

さて，Cauchy - Schwarz の不等式によって，(Lemma) の (i) より，

$$x|\sigma(x)| \le \left\{\int_0^x \sigma^2(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^x \sigma'(y)^2\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} + o(x).$$

従って，(5) より，

$$\sigma(x) = o(1) \quad , \qquad (x\to\infty) .$$

よって，(Lemma) の (iii) より，

$$\rho(x) = o(1) , \qquad (x\to\infty),$$

即ち，

$$(6) \qquad \sum_{n\le x}\left(\frac{\Lambda(n)}{n} - \frac{1}{n}\right) + 2\gamma = o(1), \qquad (x\to\infty).$$

一方，$x \ge 1$ のとき，

$$\psi(x) - x = \sum_{n\le x}(\Lambda(n) - 1) + O(1)$$

$$= \sum_{n \le x} \left(\frac{\Lambda(n) - 1}{n} \cdot n \right) + O(1),$$

であるから, partial summation によって,

$$\psi(x) - x = -2\gamma x + o(x) + \int_1^x (2\gamma + o(1))dt$$
$$+ O(1)$$
$$= o(x), \quad (x \to \infty).$$

故に素数定理は証明された。

〖文　献〗

[1] Butzer & Korevaar (ed.); On Approximation Theory, Proc. of the Conference at Oberwolfach, 1963. Birkhäuser Verl. (1964).

[2] K. Chandrasekharan; Arithmetical Functions. Springer Verl. (1970).

[3] W. Schwarz; Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie. Bibliographisches Institut (1969).

[4] E. Wirsing ; " Elementare Beweise des Primzahlsatzes mit Restglied , I , II . "
Crelle 211 (1962) 205 ~ 214 & ibid 214/215 (1964) 1 ~ 18 .