数理解析研究所講究録
第 192 巻 1973 年 1-9

Hypo-Ellipticity の同値類について(*)

東工大 理　平良和昭

§0. 序

本稿の目的は，与えられた作用素の H.E.(**) の Reduction を，"H.E. の同値類" なる概念を導入して把えることである。この考えに従えば，どの作用素に Reduction するかということは，同値類の代表元として何を選ぶかということに対応することになる。

§1 では，H.E. の同値類なる概念を導入し，§2 では，H.E. の Reduction を行ない，応用として，Grušin [1] の例について簡単にふれる。

(*) 1973年3月22日(木)には，"Generalized Poisson Operator と Grušin の例について" と題して講演した。

(**) 以下，H.E. と略記して，『Hypo-Ellipticity』と『Hypo-Elliptic』の二つの意味に使うが，混乱は生じない。

§1. H.E. の同値類

（函数空間） $\{\mathcal{E}^s\}_{s\in R}$ は，Banach 空間の族で，$s_1 < s_2$ ならば，$\mathcal{E}^{s_2} \subset \mathcal{E}^{s_1}$ となっているとする。$\mathcal{E}^{-\infty} = \bigcup_{s\in R} \mathcal{E}^s$，$\mathcal{E}^{\infty} = \bigcap_{s\in R} \mathcal{E}^s$ とおく。

以下でてくる $\{\mathcal{F}^s\}_{s\in R}$，$\{\mathcal{G}^s\}_{s\in R}$，$\{\mathcal{H}^s\}_{s\in R}$ なども，全て，この性質をもっているものとする。

（正則性） 線型写像 $\mathfrak{a}: \mathcal{E}^s \longrightarrow \mathcal{F}^s$ $(s\in R)$ が，"σ で正則性をもつ" $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $t<\sigma$ に対して，$e\in\mathcal{E}^t$，$\mathfrak{a}e\in\mathcal{F}^\sigma$ ならば，$e\in\mathcal{E}^\sigma$ である。

特に，$t=-\infty$，$\sigma=\infty$ のとき，H.E. という。また，$\mathfrak{a}$ が σ で正則性をもつとき，$\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$ とかく。

（正則同値） $\mathfrak{a}: \mathcal{E}^s \longrightarrow \mathcal{F}^s$ と $\mathfrak{b}: \mathcal{G}^s \longrightarrow \mathcal{H}^s$ が，"σ で正則同値である" $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{a}$ が σ で正則性をもつことと $\mathfrak{b}$ が σ で正則性をもつこととが同値である。すなわち，$\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$ と $\mathfrak{b} \underset{\sigma}{\sim} 1$ とが同値である。

$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が σ で正則同値のとき，$\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{b}$ とかく。

さて，『この同値関係による $\mathfrak{a}$ の同値類の元としてはどのようなものがとれるか』ということが問題になるが，これについては，次の結果を得る。

<u>基本定理</u>　$\mathfrak{a}: \mathcal{E}^s \longrightarrow \mathcal{F}^s$, $\mathfrak{b}: \mathcal{F}^s \longrightarrow \mathcal{G}^s$ とする。このとき，$\mathfrak{b} \underset{\sigma}{\sim} 1$ ならば，$\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ である。

特に，$\mathfrak{b}$ が H.E. ならば，$\mathfrak{a}$ が H.E. と $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ が H.E. とは同値である。

（注意）　この定理は，″$\mathfrak{b} \underset{\sigma}{\sim} 1$ なる $\mathfrak{b}$ を<u>左から</u>作用させる限り正則性は損なわれない〃 ことを意味している。

（基本定理の証明）　i)　$\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$ とする。$t<\sigma$, $e \in \mathcal{E}^t$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}e \in \mathcal{G}^\sigma$ ならば，$\mathfrak{a}: \mathcal{E}^s \longrightarrow \mathcal{F}^s$ より $\mathfrak{a}e \in \mathcal{F}^t$ であるから，$\mathfrak{a}e \in \mathcal{F}^t$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}e \in \mathcal{G}^\sigma$ である。従って，$\mathfrak{b} \underset{\sigma}{\sim} 1$ だから，$\mathfrak{a}e \in \mathcal{F}^\sigma$。ところが，$\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$ としたから，$e \in \mathcal{E}^t$ $\mathfrak{a}e \in \mathcal{F}^\sigma$ より $e \in \mathcal{E}^\sigma$ が従う。よって，$\mathfrak{b}\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$ が示された。

ii)　$\mathfrak{b}\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$ とする。$t<\sigma$, $e \in \mathcal{E}^t$, $\mathfrak{a}e \in \mathcal{F}^\sigma$ ならば，$\mathfrak{b}: \mathcal{F}^s \longrightarrow \mathcal{G}^s$ より $\mathfrak{b}\mathfrak{a}e \in \mathcal{G}^\sigma$ であるから，$e \in \mathcal{E}^t$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}e \in \mathcal{G}^\sigma$ である。ところが，$\mathfrak{b}\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$ としたから，$e \in \mathcal{E}^\sigma$ が従う。よって，$\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$ が示された。

(Q.E.D.)

§2.　H.E. の Reduction

（函数空間）　以下でてくる $\{Y_1^s\}_{s\in\mathbf{R}}$, $\{Y_2^s\}_{s\in\mathbf{R}}$, $\{Z_1^s\}_{s\in\mathbf{R}}$

$\{Z_2^s\}_{s\in R}$ は，全て，§1の$\{\mathcal{E}^s\}_{s\in R}$と同じ性質をもっているものとする。

（作用素）　$E: Y_1^s \longrightarrow Y_2^s$，$F: Y_1^s \longrightarrow Z_2^s$，$H: Z_1^s \longrightarrow Y_2^s$，$P: Z_2^s \longrightarrow Y_1^s$，$Q: Z_2^s \longrightarrow Z_1^s$ とする。このとき

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} E, H \\ F, 0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 1, P \\ 0, Q \end{pmatrix},\quad \mathcal{E}^s = \begin{matrix} Y_1^s \\ \oplus \\ Z_1^s \end{matrix},\quad \mathcal{F}^s = \begin{matrix} Y_2^s \\ \oplus \\ Z_2^s \end{matrix},\quad \mathcal{G}^s = \begin{matrix} Y_1^s \\ \oplus \\ Z_2^s \end{matrix}$$

とおくと，$\mathfrak{a}: \mathcal{E}^s \longrightarrow \mathcal{F}^s$，$\mathfrak{b}: \mathcal{G}^s \longrightarrow \mathcal{E}^s$ である。

さて，ここで，『$\mathfrak{a}$が正則性をもつことがわかっているとき，Eに対する正則性を，何か他の作用素に対する正則性にReductionできないか』ということを問題にしてみよう。これについてわれわれの得た結果は，次の通りである。

<u>**主定理**</u>　次の二つの仮定をおく。

（仮定１）　$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} E, H \\ F, 0 \end{pmatrix}: \mathcal{E}^s \longrightarrow \mathcal{F}^s$ がσで正則性をもつとする。すなわち，$\mathfrak{a} \underset{\sigma}{\sim} 1$．

（仮定２）　$\mathfrak{a}$に対して，次のような$\mathfrak{b}$が存在するとする：

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 1, P \\ 0, Q \end{pmatrix}: \mathcal{G}^s \longrightarrow \mathcal{E}^s \text{ で } \mathfrak{a}\mathfrak{b} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} E, 0 \\ F, 1 \end{pmatrix}.$$

このとき，次の結論を得る．

（結論）　$E \underset{\sigma}{\sim} Q$．

特に，$\mathfrak{a}$がH.E.ならば，EがH.E.とQがH.E.とは同

値である。

証明のまえに，補題を二つほどのべる。

<u>補題 1</u>　　$C=\begin{pmatrix}E, & 0\\ F, & 1\end{pmatrix}\underset{\sigma}{\sim}\begin{pmatrix}E, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}=E$

（証明）　i)　$C\underset{\sigma}{\sim}1$ とする。$t<\sigma$, $v\in Y_1^t$, $Ev\in Y_2^\sigma$ ならば，$F: Y_1^s\longrightarrow Z_2^s$ より

$$\begin{pmatrix}v\\ -Fv\end{pmatrix}\in \begin{matrix}Y_1^t\\ \oplus\\ Z_2^t\end{matrix}=\mathcal{G}^t\ ;\ C\begin{pmatrix}v\\ -Fv\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E, & 0\\ F, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ -Fv\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ev\\ 0\end{pmatrix}\in\begin{matrix}Y_2^\sigma\\ \oplus\\ Z_2^\sigma\end{matrix}=\mathcal{F}^\sigma$$

ところで，$C\underset{\sigma}{\sim}1$ としたから

$\begin{pmatrix}v\\ -Fv\end{pmatrix}\in\mathcal{G}^\sigma=\begin{matrix}Y_1^\sigma\\ \oplus\\ Z_2^\sigma\end{matrix}$。よって，$v\in Y_1^\sigma$。すなわち，$E\underset{\sigma}{\sim}1$ が示された。

ii)　$E\underset{\sigma}{\sim}1$ とする。$t<\sigma$, $\begin{pmatrix}v\\ w\end{pmatrix}\in\mathcal{G}^t=\begin{matrix}Y_1^t\\ \oplus\\ Z_2^t\end{matrix}$,

$C\begin{pmatrix}v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E, & 0\\ F, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ev\\ Fv+w\end{pmatrix}\in\mathcal{F}^\sigma=\begin{matrix}Y_2^\sigma\\ \oplus\\ Z_2^\sigma\end{matrix}$　ならば，$v\in Y_1^t$, $Ev\in Y_2^\sigma$。ところで，$E\underset{\sigma}{\sim}1$ としたから，$v\in Y_1^\sigma$。従って，$F: Y_1^s\longrightarrow Z_2^s$ より，$Fv\in Z_2^\sigma$。故に，$Fv+w\in Z_2^\sigma$ より $w=(w+Fv)-Fv\in Z_2^\sigma$ である。よって，

$\begin{pmatrix}v\\ w\end{pmatrix}\in\begin{matrix}Y_1^\sigma\\ \oplus\\ Z_2^\sigma\end{matrix}=\mathcal{G}^\sigma$。すなわち，$C\underset{\sigma}{\sim}1$ が示された。

(Q.E.D.)

<u>補題2</u>

$$b = \begin{pmatrix} 1, & \ell \\ 0, & Q \end{pmatrix} \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & Q \end{pmatrix} = Q$$

（証明）　i)　$b \underset{\sigma}{\sim} 1$ とする。$t<\sigma$, $w \in Z_2^t$, $Qw \in Z_1^\sigma$ ならば，$\ell : Z_2^s \longrightarrow Y_1^s$ より

$$\begin{pmatrix} -\ell w \\ w \end{pmatrix} \in \begin{matrix} Y_1^t \\ \oplus \\ Z_2^t \end{matrix} = g^t, \quad b\begin{pmatrix} -\ell w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \ell \\ 0, & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\ell w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Qw \end{pmatrix} \in \begin{matrix} Y_1^\sigma \\ \oplus \\ Z_1^\sigma \end{matrix} = \varepsilon^\sigma.$$

ところで，$b \underset{\sigma}{\sim} 1$ としたから

$\begin{pmatrix} -\ell w \\ w \end{pmatrix} \in g^\sigma = \begin{matrix} Y_1^\sigma \\ \oplus \\ Z_2^\sigma \end{matrix}$．よって，$w \in Z_2^\sigma$。すなわち，$Q \underset{\sigma}{\sim} 1$ が示された。

ii)　$Q \underset{\sigma}{\sim} 1$ とする。$t<\sigma$, $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in g^t = \begin{matrix} Y_1^t \\ \oplus \\ Z_2^t \end{matrix}$，

$b\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \ell \\ 0, & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+\ell w \\ Qw \end{pmatrix} \in \varepsilon^\sigma = \begin{matrix} Y_1^\sigma \\ \oplus \\ Z_1^\sigma \end{matrix}$ ならば，

$w \in Z_2^t$, $Qw \in Z_1^\sigma$。ところで，$Q \underset{\sigma}{\sim} 1$ としたから，$w \in Z_2^\sigma$。従って，$\ell : Z_2^s \longrightarrow Y_1^s$ より，$\ell w \in Y_1^\sigma$。故に，$v + \ell w \in Y_1^\sigma$ より $v = (v+\ell w) - \ell w \in Y_1^\sigma$。よって，

$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \begin{matrix} Y_1^\sigma \\ \oplus \\ Z_2^\sigma \end{matrix} = g^\sigma$．すなわち，$b \underset{\sigma}{\sim} 1$ が示された。

（Q.E.D.）

（主定理の証明）　まず，<u>補題1</u> から

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} E, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} E, & 0 \\ F, & 1 \end{pmatrix}$$

である。さらに，（仮定2）から

$$\mathfrak{C} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

である。ところが，（仮定1）から $\mathfrak{A} \underset{\sigma}{\sim} 1$ だから，

<u>基本定理</u>より

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{B}$$

となる。さらに，<u>補題2</u>より

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1, & P \\ 0, & Q \end{pmatrix} \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & Q \end{pmatrix} = Q$$

である。従って，以上をまとめれば，

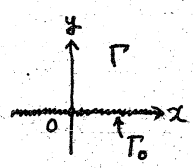
$$\mathfrak{E} \underset{\sigma}{\sim} Q$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　(Q.E.D.)

さて，主定理の応用として，次の例を考えよう：

<u>例</u>（Grušin [1]）　$\Gamma = 2$次元平面；$\Gamma_0 = \{(x,0) : x \in R\}$；

$E = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\frac{\partial}{\partial x} + a y^2 \frac{\partial}{\partial x}$（$a$は複素定数）；



$F = \Gamma_0$ へのトレース；

$H =$ 次式で与えられる Γ_0 から Γ へのポテンシャル作用素：

$$H(h(x) \otimes \delta(y)) = \int e^{ix\xi} e^{-\frac{|\xi| y^2}{2}} \hat{h}(\xi)\, d\xi \;;$$

とすると，主定理の（仮定１）がみたされる（平良[2]の§4参照）。Γ_0上の擬微分作用素Qが，（仮定２）をみたすれば，その symbol $q(\xi)$ $(\xi \in R)$ を，

$$q(\xi) \sim \begin{cases} -Cai + \cdots\cdots & \xi > 0 \\ -2\xi + Cai + \cdots\cdots & \xi < 0 \end{cases}$$

とすればよいことがわかる。ここで，Cは正の定数である。

従って，$a \neq 0$ならば，Qは$\xi > 0$については０階の，$\xi < 0$については１階の，楕円型擬微分作用素となるから，原点の近傍でH.E.である。（Γ_0が１次元であることが本質的！）よって，主定理から次の系を得る。

系　aを０でない複素定数とする。このとき
$E = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i \frac{\partial}{\partial x} + a y^2 \frac{\partial}{\partial x}$　は，原点の近傍でH.E.である。

（注意）$a = 0$ならば，H.E.でない。実際，ℓを適当な正の整数として，

$$u(x, y) = \int_0^\infty e^{ix\xi} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}\xi}}{(1+\xi^2)^\ell} d\xi$$

とおけば，$Eu = 0$であるが，明らかに

$$u(x, 0) = \int_0^\infty e^{ix\xi} \frac{1}{(1+\xi^2)^\ell} d\xi$$

はC^∞ではない。

文　献

[1] Grušin, On a class of elliptic pseudo-differential operators degenerate on a submanifold, Math. USSR Sb., 13 (1971), 155－185.

[2] 平　良, Oblique 境界値問題について，数理解析研究所講究録『函数解析的方法による偏微分方程式の研究』, 1973年1月22日～24日。