数理解析研究所講究録
第 192 巻 1973 年 327-381

接触幾何学における第二種の特異点の構造

と

退化した擬微分方程式

東大　理　大島利雄

目　次

Ch.0　序

微分方程式の解や解の性質を調べるのに，"方程式を変換して簡単な形に直す" という approach は古くからとられてきた．1階偏微分方程式論における Lagrange，Jacobi，Lie 等の理論は，その最も著しい成果であろう．近年，線型偏微分方程式の局所理論においても，微分作用素を擬微分作用素の体まで広げて考えることにより，より広い変換が可能になった．特に，Maslov，Egorov 等によって始められた接触変換によってひき起こされるところの擬微分作用素の変換は，佐藤－河合－柏原 [10]（以下，S-K-K と略す）に到って，simple characteristic を持つ方程式を簡単な標準形に変換することを可能にし，方程式の局所構造が明らかにされた．それは，まず擬微分方程式の台を上の変換で簡単な形に移し，次に可逆な擬微分作用素で低階の項を消して標準形に直したのであった．以上は，方程式の台が正則な場合である．

擬微分方程式は接触多様体の上に定義されているのであるが，我々は，方程式の台が第二種の特異点（即ち，解析的集合としての特異点ではなくて，接触構造から生じる特異点）を持つ場合を考察する．

Ch.I．は以下の章への準備であって，1階の部分の係数がすべて原点で零となるような1階線型偏微分作用素の局所理

論を扱う．Ch.II．において，我々は第二種の特異点の構造を調べ，それを分類する．Ch.III．では，主シンボルの零点集合が第二種の特異点を持つような擬微分作用素の共役類に関する命題を証明し，次にCh.II．の結果と合わせて，複素領域における擬微分方程式系に適用し，簡単な標準形を求めることが目標である．

最後に、この分野に導き，終始御助言をいただきました佐藤先生，河合先生，柏原先生に感謝いたします．この諸先生方には，この小文を書くきっかけとなったS-K-Kを丁寧に解説していただきました．又，"佐藤，小松セミナー"に参加された方々，特に小松先生，青本先生にはいろいろ御相談にあずかり感謝に耐えません．

Ch.I. 一階線型偏微分作用素

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + b(x) \tag{0.1}$$

を$\mathbb{C}^n$の原点の近傍で定義された解析的係数を持つ1階の偏微分作用素とする．$\mathcal{O}$を$\mathbb{C}^n$上の整型函数の作る層の原点での茎とすると，$\mathcal{O}$は自然に環の構造を持つ．$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$をそれぞれ$a_1(x),\cdots,a_n(x)$と$a_1(x),\cdots,a_n(x),b(x)$で生成される$\mathcal{O}$の ideal とする．さらに，D(P)で$\mathfrak{a}$の零点集合を表わ

すことにする．この章では $\mathfrak{a} \neq \mathcal{O}$（即ち，D(P)∋原点）を仮定する．

§1.1 においては，

(0.2) $\qquad P u = f$

という方程式に対し，$f \in \mathcal{O}$ がどのような条件を満たせば，解 $u \in \mathcal{O}$ が存在するか．又，その時に，解 u はどれ程あるか，という問題を扱う．即ち，$P : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ という作用素の像と核について調べる．$\mathfrak{a} = \mathcal{O}$ の場合は Cauchy - Kowalevsky の定理により，よく知られていることに注意しよう．$n = 1$，即ち常微分作用素の場合は，小松 [4]，Malgrange [6] によって，一般階の線型作用素 P（1階と限らぬ）の index に関して深い結果が得られている．

$\mathfrak{a}$ が $\mathcal{O}$ の maximal ideal の場合は，Poincare [9]，Picard [8] 等に論じられている．$\mathfrak{a}$ が maximal ideal でない場合の方程式は，例えば，S-K-K，Chap. III，Lemma 2.3.3 にあらわれている．そこでは，擬微分方程式の標準形を求めるために使われている．

§1.2 では，$b(x) \equiv 0$，$\mathfrak{a} \neq \mathcal{O}$ の仮定のもとで，(0.1) の座標変換による標準形について考察する．$\mathfrak{a}$ が maximal ideal の場合は，Poincare [9]，Siegel [11] 等に論じられている．§1.1 と §1.2 で述べられた定理の仮定を満たさない例が，§1.3 に挙げてある．

§1.1. Cauchy-Kowalevsky の定理

P の係数 $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ の D(P) における函数行列を

(1.1) $$M(x) = \frac{\partial(a_1, \cdots, a_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}(x) \quad , \quad x \in D(P)$$

とおく．異なった座標系をとるとき，座標変換の原点における函数行列を G とすれば，$M(0)$ は $G\,M(0)\,G^{-1}$ に変換される．従って，$\lambda I - M(0)$ の単純単因子の集合を

(1.2) $$E(P) = \{ (\lambda - \mu_i)^{m_i} \ ; \ 1 \leq i \leq k \}$$

と表わすことにすれば．E(P) は座標系のとり方によらずに定まる．命題を述べるために次のような仮定を設ける．

<u>A.1.1.</u> $\mathfrak{a}$ は proper かつ simple な Θ の ideal である．

<u>A.1.2.</u> i) $\mu_i = 0 \implies m_i = 1$

ii) $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\mu_i \neq 0 \implies \theta < \arg \mu_i < \theta + \pi$$

但し，$\arg \mu_i$ は，複素数 μ_i の偏角を表わす．

<u>A.1.3.</u> $\alpha \in \mathbb{N}^k$ かつ $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i \mu_i| \neq 0$

$$\implies b(0) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i \neq 0$$

但し，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

<u>注意 1.1.</u> A.1.2. ii) の仮定があれば，$b(0) = 0$ または $b(0) \neq 0$ かつ $\theta < \arg b(0) < \theta + \pi$ が満たされれば．A.1.3 が成立する．

<u>命題 1.2.</u> 条件 A.1.1，A.1.2，A.1.3 を仮定すれば，

$$\mathrm{Ker}\,P \simeq \begin{cases} \mathcal{O}/\mathfrak{b} & \text{if } \mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \\ 0 & \text{if } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}, \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\,P = \mathfrak{b}.$$

即ち，方程式 (0.2) の解 $u \in \mathcal{O}$ は，f が ideal $\mathfrak{b}$ に属する時に限り存在する．その時，$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ の場合は，解 u は $f \in \mathfrak{b}$ によって唯一つに定まり，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の場合は，解 u と Cauchy data $u|_{D(P)}$ とが一対一に対応している．

(0.1) の $a_i(x)$，$b(x)$ が形式的巾級数の環 $\hat{\mathcal{O}}$ の元である場合に，作用素 $\hat{P} : \hat{\mathcal{O}} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ に対して同様の問題を考える．$\hat{\mathfrak{a}}$，$\hat{\mathfrak{b}}$ をそれぞれ，$a_1(x), \cdots, a_n(x)$ と $a_1(x), \cdots, a_n(x), b(x)$ で生成される $\hat{\mathcal{O}}$ の ideal とする．

<u>命題 1.3.</u> A.1.1′ かつ A.1.2. i) かつ A.1.3 または，$\hat{\mathfrak{a}} \neq \hat{\mathcal{O}}$ かつ A.1.4 の仮定のもとで，

$$\mathrm{Ker}\,\hat{P} \simeq \begin{cases} \mathcal{O}/\mathfrak{b} & \text{if } \hat{\mathfrak{a}} = \hat{\mathfrak{b}}, \\ 0 & \text{if } \hat{\mathfrak{a}} \neq \hat{\mathfrak{b}}, \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{P} = \hat{\mathfrak{b}}.$$

ここで，

<u>A.1.1′</u> $\hat{\mathfrak{a}}$ は $\hat{\mathcal{O}}$ の proper かつ simple な ideal である．

<u>A.1.4.</u> $\alpha \in \mathbb{N}^k \Rightarrow b(0) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i \neq 0$

命題1.2，命題1.3の証明については，大島[7]を参照されたい.

§1.2. 退化したベクトル場

(0.1)において，$b(x) \equiv 0$ とする.

(2.1) $$P = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

(2.1)′ $$P' = \sum_{i=1}^{n} a'_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

に対して，PとP'が同型の時，即ち，$\mathbb{C}^n$の原点の近傍での局所的座標変換によりPとP'が移り合う時，$P \sim P'$ と表わす．以下，この§では，A.1.1 を仮定する．§1.1 の最初に述べたことから，$P \sim P'$となるためには，次の条件が必要であることがわかる．

<u>A.1.5.</u> $F : D(P') \longrightarrow D(P)$ という同型写像と，

$G(x) \in GL(n, \mathcal{O}(D(P)))$ が存在して，

$$G(x)\, M(x)\, G^{-1}(x) = M'(F(x))$$

ここで，$\mathcal{O}(D(P)) = \mathcal{O}/\mathfrak{a}$

<u>命題2.1.</u> 条件 A.1.1 のもとで，次の i) または ii) を仮定すれば，A.1.5 は $P \sim P'$ となるための必要十分条件である．

i) A.1.2 が成立し，さらに (1.2) の μ_i $(1 \leq i \leq k)$ のうちの0でないもの全体を $\{\rho_j ; 1 \leq j \leq l\}$ とする時，

A.1.6. $\alpha \in \mathbb{N}^{\ell}$, $|\alpha| \equiv \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \geqq 2$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \rho_i - \alpha_j \neq 0, \quad (1 \leqq j \leqq \ell)$$

ii) $G(x)M(x)G^{-1}(x)$ が対角行列となるような $G(x) \in GL(n, \mathcal{O}(D(P)))$ が存在し，その0でない対角成分を $\{\rho_j(x);\ 1 \leqq j \leqq \ell\}$ とおく時，

A.1.7. $\varepsilon > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$|x| \equiv \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \varepsilon, \quad x \in D(P), \quad \alpha \in \mathbb{N}^{\ell}, \quad |\alpha| \geqq 2$$

$$\Longrightarrow \left|\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \rho_i(x) - \rho_j(x)\right| > |\alpha|^{-\nu}, \quad (1 \leqq j \leqq \ell)$$

系 2.2. 命題 2.1 の仮定が満たされれば，適当な座標系 $(x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_{\ell'})$ のもとで，(2.1) は，

$$P = \sum_{i,j=1}^{\ell} \rho_j^i(y)\, x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

と表わせる．($\ell + \ell' = n$)　特に，ii) の場合は，

$$P = \sum_{i=1}^{\ell} \rho_i(y)\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

と表わせる．

証明　系 2.2 を証明すれば，

$$\begin{cases} x_i \longrightarrow \sum_{k=1}^{\ell} C_{ik}(y)\, x_i \\ y_j \longrightarrow f_j(y) \end{cases}$$

という座標変換を考えることにより，命題 2.1 は明らかであるから（$D(P) = \{x_1 = \cdots = x_\ell = 0\}$ となっていることに注意）系 2.2 を証明する．ii) で $\mathfrak{m}$ が $\mathcal{O}$ の *maximal ideal* の場合

は、Siegel [11], Sternberg [12] 等により証明されている.

(2.1) の代わりに、

$$(2.4) \qquad \dot{x}_j = a_j(x) \qquad (1 \leq j \leq n)$$

という力学系を考えても同じである. 仮定より、適当な座標系 $(x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_{\ell'})$ をとれば, $D(P) = \{x_1 = \cdots = x_\ell = 0\}$ と表わせる. この時,

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{\ell} c_{ik}(y) x_k + \sum_{|\alpha| \geq 2} c_{i\alpha}(y) x^\alpha \\ \dot{y}_j = \sum_{k=1}^{\ell} d_{jk}(y) x_k + \sum_{|\alpha| \geq 2} d_{j\alpha}(y) x^\alpha \end{cases}$$

となったとする. 仮定より $(c_{ik}(y)) \in GL(\ell, \mathcal{O}(D(P)))$ となっていることがわかるので,

$$\begin{cases} x_i \longrightarrow x_i \\ y_j \longrightarrow y_j + \sum_{k=1}^{\ell} e_{jk}(y) x_k \end{cases}$$

という座標変換により, $d_{jk}(y) \equiv 0$ とできる. さらに,

$$\begin{cases} x_i \longrightarrow \sum_{k=1}^{\ell} f_{ik}(y) x_i \\ y_j \longrightarrow y_j \end{cases}$$

という変換を考えることにより, (2.5) は最初から次の形をしていると仮定してよい.

$$(2.5)' \qquad \begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{\ell} c_{ik}(y) x_k + H_i(x, y), \\ \dot{y}_j = H_{j+\ell}(x, y), \end{cases}$$

但し, $H_i(x, y)$ $(1 \leq i \leq n)$ は, x に関して1次以下の項を持たない. さらに,

i) の場合 $\begin{cases} C_{ik}(0) = \rho_i & \text{if } i = k, \\ C_{ik}(0) = 0 & \text{if } i > k. \end{cases}$

ii) の場合 $\begin{cases} C_{ik}(y) \equiv \rho_i(y) & \text{if } i = k, \\ C_{ik}(y) \equiv 0 & \text{if } i \neq k. \end{cases}$

次のような座標系 (z, w) を考えよう.

$$(2.6) \qquad \begin{cases} x_i = z_i + \varphi_i(z, w) \\ y_j = w_j + \varphi_{j+l}(z, w) \end{cases}$$

但し, φ_i は z に関して 1 次以下の項を持たない. この時,

$$\dot{x}_i - \sum_{k=1}^{l} C_{ik}(y) x_k = \sum_{p=1}^{l} \dot{z}_p \frac{\partial x_i}{\partial z_p} + \sum_{q=1}^{l'} \dot{w}_q \frac{\partial x_i}{\partial w_q} - \sum_{k=1}^{l} C_{ik}(y)(z_k + \varphi_k)$$

$$= \sum_{p=1}^{l} (\dot{z}_p - \sum_{k=1}^{l} C_{pk}(w) z_k) \frac{\partial x_i}{\partial z_p} + \sum_{q=1}^{l'} \dot{w}_q \frac{\partial x_i}{\partial w_q}$$

$$+ \sum_{p,k=1}^{l} C_{pk}(w) z_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_p} - \sum_{k=1}^{l} C_{ik}(w) \varphi_k$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} (C_{ik}(w) - C_{ik}(y))(z_k + \varphi_k) ,$$

$$\dot{y}_j = \sum_{p=1}^{l} (\dot{z}_p - \sum_{k=1}^{l} C_{pk}(w) z_k) \frac{\partial y_j}{\partial z_p} + \sum_{q=1}^{l'} \dot{w}_q \frac{\partial y_j}{\partial w_q}$$

$$+ \sum_{p,k=1}^{l} C_{p,k}(w) z_k \frac{\partial \varphi_{j+l}}{\partial z_p} ,$$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial z_p}, & \frac{\partial x_i}{\partial w_q} \\ \frac{\partial y_j}{\partial z_p}, & \frac{\partial y_j}{\partial w_q} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathcal{O})$ であるから, φ_i 達が

$$(2.7) \qquad \begin{aligned} &\sum_{p,k=1}^{l} C_{p,k}(w) z_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_p} - \sum_{k=1}^{l} C_{ik}(w) \varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{l} (C_{ik}(y) - C_{ik}(w))(z_k + \varphi_k) + H_i(x, y) \end{aligned}$$

$$(2.7)\qquad \sum_{p,k=1}^{l} C_{pk}(w)\, z_k \frac{\partial \varphi_{j+l}}{\partial z_p} = H_{j+l}(x, y)$$

を満たすようにとれれば，(2.5) は，

$$(2.8)\qquad \begin{cases} \dot{z}_i = \sum_{k=1}^{l} C_{ik}(w)\, z_k \\ \dot{w}_j = 0 \end{cases}$$

となる。従って，(2.7) の解の存在を示せばよい．

仮定より，$|\alpha| \geqq 2$ の時，

$$\sum_{p=1}^{l} \alpha_p C_{pp}(0) - C_{ii}(0) \neq 0 \quad , \quad \sum_{p=1}^{l} \alpha_p C_{pp}(0) \neq 0$$

となり，H_i 達は x に関して 1 次以下の項を持たないので

(2.7) は形式的巾級数解

$$(2.9)\qquad \varphi_j = \sum_{|\alpha| \geqq 2} \varphi_{j\alpha}(w)\, x^{\alpha} = \sum_{\substack{|\alpha| \geqq 2 \\ |\beta| \geqq 0}} \varphi_{j\alpha\beta}\, w^{\beta} x^{\alpha}$$

を唯一つ持つことがわかる．実際 $\varphi_{j\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ は，(2.7) によって $(|\alpha|, |\beta|, \sum_{p=1}^{l} p\alpha_p, n-j)$ の辞書式順序の順に，帰納的に定まる．従って，φ_j が原点で解析的なことを示せばよい．

<u>i) の場合</u>　仮定より，$C > 0$ が存在して，

$$(2.10)\qquad \left| \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \rho_i - \rho_j \right| \geqq C|\alpha| \quad \text{if } |\alpha| \geqq 2.$$

$x_i \longrightarrow e_i x_i$ ，$y_j \longrightarrow e_{j+l}\, y_j$ 　$(e_j \in \mathbb{C})$ の形の座標変換を考えれば，次の優級数が存在するとしてよい．

$$(2.11)\qquad H_j(z, w) \ll \frac{M s^2}{1-(s+t)} \;,\quad C_{ik}(w) \ll \frac{Mt}{1-t} + |C_{ik}(0)|$$

$$\left(|C_{ik}(0)| < \frac{C}{2n^2} \quad \text{if } i < k \right)$$

但し，　$s = z_1 + \cdots + z_l$ ，　$t = w_1 + \cdots + w_{l'}$　で，Mはある正の数である．

形式的巾級数　$u = \sum_{\substack{|\alpha|\geq 2 \\ |\beta|\geq 0}} u_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta$ が　$\varphi_j \ll u$ を満たすならば，

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{p,k=1}^{l} C_{pk}(w) z_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_p} + \sum_{p=1}^{l} C_{pp}(0) z_p \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_p} \\
& + \sum_{k=1}^{l} C_{ik}(w) \varphi_k - C_{ii}(0) \varphi_i \\
& + \sum_{k=1}^{l} (C_{ik}(y) - C_{ik}(w))(z_k + \varphi_k) + H_i(x, y) \\
& \ll \left(\frac{Mt}{1-t} + \frac{C}{2n^2}\right)\left(s \sum_{p=1}^{l} \frac{\partial u}{\partial z_p} + l u\right) \\
& \quad + \left(\frac{M}{1-t-l'u} - \frac{M}{1-t}\right)(s + l u) + \frac{M(s + l u)^2}{1-s-nu-t}
\end{aligned}
$$

（　$u \ll \frac{1}{2} s \sum_{p=1}^{l} \frac{\partial u}{\partial z_p}$　を使って）

$$
\ll s\left\{\left(\frac{3C}{4n} + f_1(s, t, u)\right) \sum_{p=1}^{l} \frac{\partial u}{\partial z_p} + f_2(s, t, u) s\right\}
$$

（ $\equiv F(s, t, u, \frac{\partial u}{\partial z})$　とおく）

但し，f_1, f_2 は，係数が正または0の s, t, u の形式的巾級数で，原点で解析的であって，$f_1(0, 0, 0) = 0$．

一方，$-\sum_{p,k}^{l} C_{pk}(w) z_k \frac{\partial \varphi_{j+k}}{\partial z_p} + \sum_{p=1}^{l} C_{pp}(0) z_p \frac{\partial \varphi_{j+k}}{\partial z_p} + H_{j+l}(x, y)$

$\ll F(s, t, u, \frac{\partial u}{\partial z})$　も成立するから

(2.10)より，形式的巾級数 u が

(2.13)　　$C \sum_{p=1}^{l} z_p \frac{\partial u}{\partial z_p} \ll F(s, t, u, \frac{\partial u}{\partial z})$

を満たせば，$\varphi_j \ll u$ となることがわかる．ところが，

$$(2.14)\quad \begin{cases} \left\{ \frac{c}{\alpha} - \ell f_1(s,t,u) \right\} \frac{\partial u}{\partial s} = f_2(s,t,u)\, s, \\ u|_{s=0} = 0 . \end{cases}$$

の解 u は原点で解析的であり，s に関して1次以下の項が無く，(2.13) を満たしている．従って φ_j も原点で解析的となる．

<u>ii) の場合</u>　i) の場合と同様に，次式を仮定してよい．

$$(2.11)'\quad H_j(z,w) \ll \frac{M s^2}{2-(s+t)}, \quad \rho_j(w) \ll \frac{M}{2-t}$$

$$\varepsilon_{j\alpha}(w) = \sum_{p=1}^{\ell} \alpha_p \rho_p(w) - \rho_j(w) \text{ とおく．}$$

但し，$j > \ell$ の時は，$\rho_j(w) \equiv 0$ とする．

$|\alpha| \geqq 2$ の時 $\varepsilon_{j\alpha}(0) \neq 0$ となるので (2.9) において $\varphi_{j\alpha}(w) \in \mathcal{O}(D(P))$ がわかる。従って，"正数 ε，N が存在して，$|w^0| < \varepsilon$ を満たす $\forall w^0$ に対し，$\varphi_j(w^0, z)$ が z の函数として $|z| < \varepsilon$ で整型かつ $|\varphi_j(w^0,z)| < N$" となることを示せばよい。以下，$|w^0| < 1$ を満たす $w^0 \in \mathbb{C}^{\ell'}$ を固定し，w^0 を略して $\varphi_{j\alpha}(w^0) = \varphi_{j\alpha}$ etc. と書く．さらに，

$$\begin{cases} \varphi_\alpha = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{j\alpha}| & \text{for } |\alpha| \geqq 2 \\ \varphi_\alpha = 1 \quad \text{for } |\alpha| = 1, & \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

とおくと，
$$\begin{cases} x_i \ll \sum_\alpha \varphi_\alpha z^\alpha, \quad y_j \ll 1 + \sum_\alpha \varphi_\alpha z^\alpha \\ x_1 + \cdots + x_\ell + y_1 + \cdots + y_{\ell'} \ll 1 + \sum_\alpha \varphi_\alpha z^\alpha \end{cases}$$

(2.7) と (2.11)′ より

$$\sum_\alpha \varepsilon_{j\alpha}\varphi_{j\alpha} Z^\alpha \ll \frac{M(\sum_\alpha \varphi_\alpha Z^\alpha)^2}{1-\sum_\alpha \varphi_\alpha Z^\alpha} + \left(\frac{M}{1-\sum_\alpha \varphi_\alpha Z^\alpha} - M\right)\left(\sum_\alpha \varphi_\alpha Z^\alpha\right)$$

$$\ll 2M \sum_{r=2}^{\infty} \left(\sum_\alpha \varphi_\alpha Z^\alpha\right)^r \qquad \text{for } 1 \leq j \leq n$$

$$\therefore \quad |\varepsilon_{j\alpha}\varphi_{j\alpha}| \leq 2M \sum_{\substack{r>1 \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_r=\alpha}} \varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_r}, \quad |\alpha| \geqq 2$$

$$\therefore \quad \varphi_\alpha \leq 2M\mu_\alpha \sum_{\substack{r>1 \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_r=\alpha}} \varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_r}$$

但し，$\mu_\alpha = \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_{j\alpha}|^{-1}$ とする．仮定より，w^0 によらない定数 $\nu' \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$|w^0| < \varepsilon \implies |\varepsilon_{j\alpha}| > 2n|\alpha|^{-\nu'} \quad \text{for } |\alpha| \geqq 2.$$

以下は，Siegel [11] p.24～p.29 と全く同一の議論によって，$\varphi_j(w^0, z) \ll \dfrac{s}{1-2^{5\nu'+4}\cdot Ms}$ が証明される．

q.e.d.

<u>注意 2.3.</u> (0.1) の P の 1 階の部分が，命題 2.1 の仮定の ii) と共に，A.1.7 の $-\rho_j(x)$ を $+b(x)$ で置き換えた不等式も満[イ)]足すれば，命題 1.2 の結論がでる．その証明は，系 2.2 を使って P を簡単な形に直してから再び命題 2.1 の証明と同様の議論をすればよい．

命題 2.1 の証明から次のことがわかる．即ち，命題 2.1 の仮定のもとに，表示 (2.1) を不変にする形式的巾級数による座標変換 $x_i \longrightarrow \varphi_i(x)$ は，$\varphi_i|D(P)$ と $\operatorname{grad}\varphi_i|D(P)$ と

イ) $|\alpha| \geqq 1$ に対して，

を定めた時．（もし存在すれば）唯一に決まり，$\varphi_i|D(P)$ と $\mathrm{grad}\,\varphi_i|D(P)$ 達が $D(P)$ 上の解析函数なら，その座標変換は解析的である．特に，$D(P)$ が一点の場合は，(2.1) を不変にする形式的座標変換は，必ず解析的座標変換になる．

§1.3. 例

この節では，A.1.1 ～ A.1.7 を満たさない例を挙げる．P を形式的巾級数の中で考える時は $\hat{P}$ と表わす事にする．

例 3.1. $P = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$ （2変数）

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\,P = \mathrm{Ker}\,\hat{P} = \{\text{定数値函数}\} \\ \mathrm{Im}\,P \not\ni xy = \hat{P}\left(\sum_{i\geq 0} i!\,x y^{i+1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\,(P+1) = \mathrm{Ker}\,(\hat{P}+1) = 0 \\ \mathrm{Im}\,(P+1) \not\ni y = (\hat{P}+1)\left(\sum_{i\geq 0} i!\,y^{i+1}\right) \end{cases}$$

例 3.2. $P = y\dfrac{\partial}{\partial x}$, $P' = (y+x^2)\dfrac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\,(P+1) = \mathrm{Ker}(\hat{P}+1) = 0 \\ \mathrm{Im}(P+1) \not\ni \dfrac{1}{1-x} = (\hat{P}+1)\left(\sum_{i,j\geq 0} (-1)^j \dfrac{(i+j)!}{i!}\,x^i y^j\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\,P \cap \mathrm{Im}\,P = \{\text{原点で零になる } y \text{ のみの函数}\} \\ \mathrm{Ker}\,P' \cap \mathrm{Im}\,P' = 0 \end{cases}$$

$\therefore P \not\sim P'.$

例 3.3. $P = y\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}$, $E(P) = \{\lambda^2, \lambda^2\}$

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\, P \ni xw - yz \\ \mathrm{Im}\, P \not\ni xw \notin \mathrm{Im}\, \hat{P} \end{cases}$$

例 3.4. $P = y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}$, $E(P) = \{\lambda^3\}$

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\, P \ni y^2 - 2xz \\ \mathrm{Im}\, P \not\ni y^2 \notin \mathrm{Im}\, \hat{P} \end{cases}$$

例 3.5. $P = y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}$, $E(P) = \{\lambda^2, \lambda - 1\}$

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\, P = \{ y \text{ のみの函数} \} \\ \mathrm{Im}\, P \not\ni \frac{z}{1-x} = \hat{P}\left(\sum_{i,j\geq 0} (-1)^j \frac{(i+j)!}{i!} x^i y^j z \right) \end{cases}$$

例 3.6. $$\begin{cases} P = mx\frac{\partial}{\partial x} - ny\frac{\partial}{\partial y}, & m, n \text{ は正整数.} \\ P' = (m - x^n y^m)x\frac{\partial}{\partial x} - ny\frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\,(\hat{P} + \frac{1}{2}) = \mathrm{Ker}\,(\hat{P}' + \frac{1}{2}) = 0$

$\mathrm{Coker}\,(P + \frac{1}{2}) = 0$ となるが一方

$(\hat{P}' + \frac{1}{2})\left(\sum_{i\geq 1} (2n)^i (i-1)!\, x^{in} y^{im}\right) = n x^n y^m \notin \mathrm{Im}\,(P' + \frac{1}{2})$

$\therefore\ P \not\sim P'$.

例 3.7. $P = x\frac{\partial}{\partial x} - \lambda y\frac{\partial}{\partial y}$ λ は正の無理数

$\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Ker}\, P' = \{$定数値函数$\}$

増大する整数の列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ と, 超越数 λ を

$$\begin{cases} a_1 = 1 \ , \ a_{n+1} \geqq 2a_n! \ , \ \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \\ b_n < a_n \lambda < b_n + 1 \end{cases}$$

を満たすように定めれば，$\hat{P} u = 1 - \frac{1}{1-x-y}$ の解の

$x^{b_n} y^{a_n}$ の係数は $a_n!$ より大きくなる．従って

$$\operatorname{Im} P \not\ni 1 - \frac{1}{1-x-y} \in \operatorname{Im} \hat{P}.$$

一方，λ が代数的数の時は，Roth の定理より

$\operatorname{Im} P = \{$原点で零になる函数$\}$ がわかる．

<u>例 3.8.</u> $P = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - 1$

$$\operatorname{Coker} P \simeq \operatorname{Ker} P = \{ cx + c'y \ ; \ c, c' \in \mathbb{C} \}$$

<u>例 3.9.</u> $P = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ ， $E(P) = \{\lambda - 1, \lambda - 2\}$

(3.1) $(P-1)u_1 = 0$ ， $u_1(0) = 0$ ， $\operatorname{grad} u_1(0) \neq 0$

は解を持つことがわかるのでその解を u_1 とする．

(3.2) $(P-2)u_2 = 0$ ， $u_2(0) = 0$ ， $\operatorname{grad} u_2(0) \neq 0$

が解を持つ場合は，$x = u_1$ ，$y = u_2$ と置けば

(3.3) $P = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$

(3.2) が解を持たない場合は，

(3.4) $(P-2)u_2 = u_1^2$ ， $u_2(0) = 0$ ， $\operatorname{grad} u_2(0) \neq 0$

が解を持つことがわかるので，$x = u_1$ ，$y = u_2$ と置くと

(3.5) $P = x\frac{\partial}{\partial x} + (2y + x^2)\frac{\partial}{\partial y}$

よって，P は (3.3) か (3.5) のどちらか一方に同型になる．

例 3.10. $$\begin{cases} P = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + (4z + y^2 + x^4)\frac{\partial}{\partial z} \\ P' = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + (4z - y^2 + x^4)\frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$y \to \sqrt{-1}\, y$ という変換により $P \sim P'$ がわかる.

一方. $$\begin{cases} (P-1)\,u_1 = 0 \\ (P-2)\,u_2 = 0 \\ (P-4)\,u_3 = u_1^4 - u_2^2 \end{cases}$$ という方程式を考えることにより, P を P' に移す様な実解析的座標変換は存在しないことがわかる.

Ch. II. 接触幾何学における第二種の特異点の構造

X を $(2n+1)$-次元の複素多様体とする. さらに, X の余接ベクトル束 T^*X の line subbundle L が与えられているとする. X の任意の点 P に対し P の近傍での L の section ω が P で消えていないならば, $(2n+1)$-form $\omega \wedge (d\omega)^n$ も P で消えない時, (X, L) を (又は単に X と書いて) 接触多様体といい, ω を fundamental 1-form という. 次に述べる様な一般論については, Carathéodory [2], Abraham [1] 等を参照されたい.

接触多様体 X, Y と写像 $f: X \to Y$ が与えられた時, Y 上の任意の fundamental 1-form ω_Y に対し, $f^*\omega_Y$ が X 上の fundamental 1-form となる場合, 写像 f を接触変換と言

う．この時，X と Y は同じ次元で，f は局所的同型写像となる．

$L^{\otimes(-r)}$ の *section* を r-次 の同次函数という．$r=0$ の時は単に函数といい，$L^{\otimes(0)}=\mathcal{O}$ と書く．この章では，接触多様体における局所理論を扱うので，$P \in X$ を固定し，Pを原点と呼ぶ．原点における $\mathcal{O}$，L の茎も同じように $\mathcal{O}$，Lと表わすことにする．

原点の近傍での局所座標系を $(t_1, \cdots, t_{2n+1})$ と表わすことにする．これに対して，*fundamental* 1-*form* が

$$\omega = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

となるような局所座標系 $(p_1, \cdots, p_n, x_1, \cdots, x_n, z)$ が存在する．この座標系を正準座標系という．さて，

$$\begin{array}{ccc} L^{\otimes(-r)} \times L^{\otimes(-s)} & \longrightarrow & L^{\otimes(1-r-s)} \\ \rotatebox{90}{$\in$}\ & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (f, g) & \longmapsto & [f, g] \end{array}$$

という写像を，$f \in \varphi \otimes \omega^{\otimes(-r)}$，$g \in \psi \otimes \omega^{\otimes(-s)}$ に対し

$$[f, g] = \Big\{ r\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} - s\psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big)\frac{\partial \psi}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial \psi}{\partial z}\Big)\frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \Big\} \otimes \omega^{(1-r-s)}$$

によって定義する．この，$[\cdot\,,\cdot\,]$ を *Lagrangean bracket* と言う．

$$\begin{cases} \xi_1 : \cdots : \xi_n : \xi_{n+1} = (-p_1) : \cdots : (-p_n) : 1 \\ x_{n+1} = z \end{cases}$$

という座標系 $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \xi_1, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1})$ を用いれば，

$$\omega = \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n + \xi_{n+1} dx_{n+1}$$

となり，$L^{\otimes(-r)}$ の section は，ξ に関し r-次同次の函数として表わせる．この時，

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

となるので，$[f, g]$ は Poisson bracket $\{f, g\}$ と考えてよい．

解析的集合 $V \subset X$ に対し，X 上の（同次）函数 f, g が V 上で消えているならば $[f, g]$ も V 上で消える時，V を包合的と言う．

<u>定義 0.1.</u> 包合的な解析的集合 $V \subset X$ に対し，点 $P \in V$ が第一種の特異点であるとは，P が解析的集合としての特異点であること．点 $P \in V$ が第二種の特異点（または退化点）とは P は第一種の特異点ではないが，$\omega|_V$ が P で消えている時をいう．このとき，V の退化点全体の集合を，V の退化集合と定義し，$D(V)$ と書くことにする．点 $P \in V$ が正則点であるとは，上のどちらの特異点でもないこと．

<u>定義 0.2.</u> X の中の解析的集合（正確には，その芽）V, V' が同型とは，接触変換 f（局所的なもの）が存在して，$f(V) = V'$ となること．この時，$V \sim V'$ と表わす．明らかにこれは同値関係である．

包合的な解析的集合が正則ならば，適当な正準座標系をとって，$V=\{p_1=\cdots=p_d=0\}$ と書ける．(cf. Carathéodory [2])
従って，次元が等しく正則で包合的な解析的集合はすべて同型となる． 命題 I.2.1. は，$\{a_1(x)p_1+\cdots+a_n(x)p_n=0\}$ と表わせる包合的な解析的集合（原点が第一種の特異点となる）が同型となるための条件を述べた命題と解釈することもできる．しかし，第一種の特異点に関する一般論は難しく，何らかの意味で特異点の resolution がされることが望ましい．

この章では，第二種の特異点の構造を調べることを目標とする． §2.1 では，線型的退化点というものを定義し，それを持つ包合的な解析的集合の同型類を決定する． §2.2 において，退化点が線型的退化点となるための十分条件を与える．それによれば，ほとんどすべての退化点が，線型的退化点となることがわかる．

包合的な解析的集合における特異点は，generic には，第二種の特異点である．又，第二種の特異点は，接触幾何学に特有のものであって，多様体の次元が偶数の時に定義される symplectic geometry には表われない．また symplectic geometry の問題は，すべて，1次元高い接触幾何学の問題として扱うことができる．

§2.1. 線型的退化点を持つ包合的多様体

<u>定義1.1</u>　$(2n+1)$- 次元接触多様体 X の原点を第二種の特異点とする包合的な解析的集合の全体を $\mathcal{V}$ と表わす．
さらに，そのうちで余次元が d のものを $\mathcal{V}_d$ と表わす．
$V \in \mathcal{V}_d$ の座標系 $(t_1, \cdots, t_k)$　$k = 2n+1-d$ によって

$$(1.1) \qquad \omega|_V = a_1(t)dt_1 + \cdots + a_k(t)dt_k$$

と表わした時，$a_1(t), \cdots, a_k(t)$ の生成する $\mathcal{O}(V)$ の *ideal* が *simple* ならば，原点を V の単純退化点と呼び，その様な V の全体を $\mathcal{V}_{d,s}$ と表わす．さらに，座標系 $t_1, \cdots, t_k$ を適当に選んだ時 $a_1(t), \cdots, a_k(t)$ をすべて t の1次式にできるならば，原点を V の線型的退化点と呼び，その様な V の全体を $\mathcal{V}_{d,\ell}$ と表わす．　明らかに，$\mathcal{V}_{d,\ell} \subset \mathcal{V}_{d,s} \subset \mathcal{V}_d$

<u>命題1.2.</u>　$^\forall V \in \mathcal{V}_d$ は，適当な正準座標系により

$$(1.2) \qquad V = \{ p_1 = \cdots = p_{d-1} = z + h(x', p') = 0 \}$$

と表わせる．但し，$x' = (x_d, \cdots, x_n)$，$p' = (p_d, \cdots, p_n)$ であり h は，定数項と1次の項を持たない函数である．

<u>系1.3.</u>　$d > n+1$ ならば $\mathcal{V}_d = \phi$．
$\mathcal{V}_{n+1}$ の元はすべて同型である．$\mathcal{V}_{n+1}$ の元を *Lagrangean manifold* と定義する．

<u>命題1.2の証明</u>　　$V=\{f_1=\cdots=f_d=0\}$，$f_i\in\mathcal{O}$ と表わせているとする．$df_1(0),\cdots,df_d(0)$ は1次独立である．正準座標系を (p,x,z) とすると，原点が退化点であることから，$\omega(0)=dz$，$df_1(0),\cdots,df_d(0)$ は1次従属となる．従って，indices $j_1,\cdots,j_m\,;\,j_{m+1},\cdots,j_{d-1}$ が存在して，

$$\det\frac{\partial(f_1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ f_d)}{\partial(p_{j_1},\cdots,p_{j_m},x_{j_{m+1}},\cdots,x_{j_{d-1}},z)}\neq 0$$

となるので陰函数の定理より

$$(1.3)\quad\left\{\begin{array}{lll} f'_k = p_{j_k} + g_k(p',x') & & 1\leq k\leq m \\ f'_k = x_{j_k} + g_k(p',x') & & m+1\leq k\leq d-1 \\ f'_d = z\ + g_d(p',x') & & \end{array}\right.$$

の共通零点としてVが表わせる．但し，p',x' は p_{j_k},x_{j_k} 達を除いた残りの変数である．

$[f'_k,f'_\ell]$ $(1\leq k\leq d-1,\ 1\leq \ell\leq d-1)$ は変数 x',p' にしかよらない．一方，Vが包合的であることから $[f'_k,f'_\ell]$ は(1.3)の函数達から生成された ideal に入る．従って，(1.3)の形を見れば，$[f'_k,f'_\ell]\equiv 0$ がわかる．$df_1(0),\cdots,df_{d-1}(0)$，$\omega(0)$ は1次独立であるから，$\hat{p}_j=f_j$ $(1\leq j\leq d-1)$ となる様な正準座標系 $(\hat{p},\hat{x},\hat{z})$ が存在する．$\partial f_d/\partial\hat{z}(0)\neq 0$ であるから，Vを次の形に表わすことができる．（^を略す）

$$V=\{p_1=\cdots=p_{d-1}=z+h(x,p_d,\cdots,p_n)=0\}$$

ところが，$[z+h(x,p'), p_j] = p_j + \frac{\partial h}{\partial x_j}(x, p')$ が，$1 \leqq j \leqq d-1$ に対して V 上で消えることから $\frac{\partial h}{\partial x_j} \equiv 0$ がわかる．従って，h は $p_1, \cdots, p_d$ のみならず，$x_1, \cdots, x_d$ にもよらない．h に1次の項が無いことは，$dp_1, \cdots, dp_{d-1}$，$dz + dh(0)$，$\omega(0) = dz$ が1次従属であることから明らか

q.e.d.

<u>命題1.4.</u> $V, V' \in \mathcal{V}_d$ が $V \sim V'$ となるための必要十分条件は，$\omega|V$ と $\omega|V'$ とが $(2n+1-d)$ 次元多様体上の 1-form として同型になることである．

<u>証明</u> 必要性は明らかだから，十分性のみ示す．

$$\begin{cases} V = \{p_1 = \cdots = p_{d-1} = z + h(x', p') = 0\} \\ V' = \{\hat{p}_1 = \cdots = \hat{p}_{d-1} = \hat{z} + \hat{h}(\hat{x}', \hat{p}') = 0\} \end{cases}$$

となる様な正準座標系 (p, x, z) と $(\hat{p}, \hat{x}, \hat{z})$ の存在が，前の命題よりわかる。V (resp. V') の座標系として $p_d, \cdots, p_n$, $x_1, \cdots, x_n$ (resp. ^ をつけたもの) をとれば，

$$\omega|V = p_d dx_d + \cdots + p_n dx_n + dh \quad \text{etc}.$$

仮定より，$g_j(x', p')$，$y_j(x', p')$ $(d \leqq j \leqq n)$ という $x_d, \cdots, x_n, p_d, \cdots, p_n$ の函数が存在して

$$p_d dx_d + \cdots + p_n dx_n + dh(x', p') = g_d dy_d + \cdots + g_n dy_n + d\hat{h}(y, g)$$

$$\therefore \quad \omega = dz - (p_1 dx_1 + \cdots + p_{d-1} dx_{d-1}) - (p_d dx_d + \cdots + p_n dx_n)$$

$$= d(z + h(x',p') - \hat{h}(y,q)) - (p_1 dx_1 + \cdots + p_{d-1} dx_{d-1}) - (q_d dy_d + \cdots + q_n dy_n)$$

従って，$(p_1, \cdots, p_{d-1}, q_d, \cdots, q_n, x_1, \cdots, x_{d-1}, y_d, \cdots, y_n, w)$　$w = z + h(x',p') - \hat{h}(y,q)$ という正準座標系をとれば $V = \{p_1 = \cdots = p_{d-1} = \hat{h}(y,q) = 0\}$　q.e.d.

次に，我々は $\mathcal{V}_{d,l}$ の構造を調べるために，次の補題を準備する．証明等は，Mal'cev [5] を参照されたい．

<u>補題1.5.</u>　$\mathbb{C}$ 上の $2n$-次元 symplectic vector space $\mathcal{S}$ の歪対称な2つの1次変換が同型となる（即ち，$\mathcal{S}$ 上の等長変換により相似となること）ためには，それらの変換の単因子が一致することが必要十分である．又，$\mathcal{S}$ 上の歪対称な1次変換の単純単因子系は次の条件を満たすもの全体 — それを $\mathfrak{X}_{2n}$ と書くことにする — になる．

即ち，$\mathcal{E} \in \mathfrak{X}_{2n}$ となるための必要十分条件は，

i) $\forall \rho \neq 0$ に対し，$(\lambda-\rho)^k$ と $(\lambda+\rho)^k$ とは同じ個数だけ $\mathcal{E}$ に含まれる．（$k=1,2,\cdots$）

ii) λ^{2k} は任意の数，λ^{2k+1} は偶数個が $\mathcal{E}$ に含まれる．

iii) $\mathcal{E}$ の元を乗じれば，λ に関し $2n$ 次の多項式となる．

を満足することである．

<u>定義1.6.</u>　$\forall V \in \mathcal{V}_d$ に対し，(1.1) と表わした時，

(1.4)　$$M(t) = \frac{\partial(a_1, \cdots, a_k)}{\partial(t_1, \cdots, t_k)}(t) \quad , \quad t \in D(V)$$

とおく．

$$M(0) = M_1 + M_2,\quad {}^tM_1 = -M_1,\quad {}^tM_2 = M_2$$

と表わす．ここで，${}^tM_1$ は M_1 の転置行列である．

異なった座標系をとった時，座標変換の変換行列を G とすれば，$M(0)$ は，$G M(0)\, {}^tG = N(0)$ に変換される．

$$N(0) = N_1 + N_2,\quad {}^tN_1 = -N_1,\quad {}^tN_2 = N_2$$

と置けば，$G M_1 {}^tG = N_1$，$G M_2 {}^tG = N_2$ となるので，$\lambda M_1 - M_2$ の単純単因子系は，V の座標系のとり方によらずに定まる。それを，$T_d(V)$ と表わすことにする．

$d=1$ の時は，(1.2) の表示より，$M_1 \in GL(2n, \mathbb{C})$ がわかる．そこで，$\forall\, \mathbb{a} = {}^t(a_1, \cdots, a_{2n})$，$\mathbb{b} = {}^t(b_1, \cdots, b_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n}$ に対し，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = {}^t\mathbb{a}\, M_1\, \mathbb{b} \in \mathbb{C}$ という双1次計量を定義すると $\mathbb{C}^{2n}$ は $2n$-次元 *symplectic vector space* $\mathcal{S}$ となる．又，$(\mathbb{a}, M_1^{-1} M_2 \mathbb{b}) = -(M_1^{-1} M_2 \mathbb{a}, \mathbb{b})$ となるので，$M_1^{-1} M_2$ は $\mathcal{S}$ 上の歪対称1次変換を定義する．従って前の補題より，$T_1(V) \in \mathfrak{X}_{2n}$ がわかる．

一般の d に対しては，(1.2) の表示と上の結果より，$T_d(V) \in \mathfrak{X}_{2(n+1-d)}$ がわかる．従って，我々は次の写像を定義することができる。

$$T_d : \mathcal{V}_d/\sim \longrightarrow \mathfrak{X}_{2(n+1-d)}$$

但し，$\mathcal{V}_d/\sim$ は，$\mathcal{V}_d$ の定義 0.2 による同型類を表わす．

命題1.7. T_d を $\mathcal{V}_{d,l}/\sim$ に制限した写像を $T_{d,l}$ と書けば

$$T_{d,l} : \mathcal{V}_{d,l}/\sim \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{2(n+1-d)}$$

証明. 命題1.2と命題1.4から，$d=1$ の場合のみ証明すれば十分なことがわかるので，$d=1$ とする．

まず，$T_{1,l}$ が surjective になることを，表示(1.2)の h の具体的な形を与えることによって示す．

(1.5) $$h = \langle p, Ap\rangle + 2\langle p, Cx\rangle + \langle x, Bx\rangle$$

$$p = {}^t(p_1, \cdots, p_n),\quad x = {}^t(x_1, \cdots, x_n),\quad {}^tA = A,\quad {}^tB = B.$$

であるとすれば，V の座標系として (p, x) をとれば，

$$-\omega|V = 2\{\langle p, Adp\rangle + \langle dp, Cx\rangle + \langle p, Cdx\rangle + \langle x, Bdx\rangle\} + \langle p, dx\rangle.$$

従って，(1.4) は，

$$-M(0) = \begin{pmatrix} 2A, & 2C \\ 2{}^tC + I_n, & 2B \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4A, & 4C + I_n \\ 4{}^tC + I_n, & 4B \end{pmatrix}$$

(1.6) $$(M(0) - {}^tM(0))^{-1}(M(0) + {}^tM(0)) = \begin{pmatrix} 4{}^tC + I_n, & 4B \\ -4A, & -4C - I_n \end{pmatrix}.$$

$(\lambda - \rho_i)^{k_i}$, $(\lambda + \rho_i)^{k_i}$ に対しては，$k_i \times k_i$-行列を

$$C_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\rho_i - 1) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \frac{1}{4}(\rho_i - 1) \end{pmatrix},\quad A_i = B_i = (0).$$

λ^{2k_j} に対しては，$k_j \times k_j$-行列を

$$C_j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B_j = (0)$$

と置き，A，B，C をそれぞれ，これ等 A_i, B_i, C_i 達の直和と定義すれば，$T_1(V)$ が与えられた単純単因子系に等しくなるような $V \in \mathcal{V}_{1,\ell}$ を作ることができる．

次に，$T_{1,\ell}$ が injective になることを示す．

$T_{1,\ell}(V) = T_{1,\ell}(V')$ であるとせよ．

$$\begin{cases} \omega|_V = \langle (M_1 + M_2)t, dt \rangle, & {}^tM_1 = -M_1, \ {}^tM_2 = M_2 \\ \omega|_{V'} = \langle (N_1 + N_2)t', dt' \rangle, & {}^tN_1 = -N_1, \ {}^tN_2 = N_2 \end{cases}$$

と表わされているとする．

$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = {}^t\mathbb{a} M_1 \mathbb{b}$，$(\mathbb{a}, \mathbb{b})' = {}^t\mathbb{a} N_1 \mathbb{b}$ により定義される2つの symplectic vector spaces $\mathcal{S}$，$\mathcal{S}'$（同次元だから互に同型）に対し，補題1.5と定義1.6とから，$(\mathcal{S}, M_1^{-1}M_2)$ と $(\mathcal{S}', N_1^{-1}N_2)$ は互に同型であることがわかる．その同型対応を $G : \mathbb{a} \longmapsto G\mathbb{a}$ とすると，

$$\begin{cases} G(M_1^{-1}M_2) = (N_1^{-1}N_2)G \\ M_1 = {}^tG N_1 G \end{cases}$$

$$\therefore \ M_2 = M_1 G^{-1} N_1^{-1} N_2 G = {}^tG N_2 G.$$

従って，$t'' = Gt'$ という座標系をとれば，

$$\omega|_{V'} = \langle (M_1 + M_2)t'', dt'' \rangle,$$

となるから，命題1.4より $V \sim V'$ がわかる．　　q.e.d.

§2.2. 単純退化点を持つ包含的多様体.

<u>定義 2.1.</u> 解析的集合 $V \subset X$ に対し，V の特異点全体の集合を $S(V)$ と表わす．V が積分解析的集合であるとは，

$\omega|_{V \setminus S(V)} \equiv 0$ となることと定義する．さらに，$S(V)=\phi$（i.e. V が正則）の時は，V を積分多様体と言う．

<u>命題 2.2.</u> 積分多様体 V は適当な正準座標系のもとで，

(2.1) $$V = \{p_1 = \cdots = p_n = x_1 = \cdots = x_d = z = 0\}$$

と表わせる．

<u>証明</u> n に関する induction を使う．($\dim X = 2n+1$)

$n=0$ の時は明らか．$n \geqq 1$ とする．

i) $f|_V \equiv g|_V \equiv 0$，$[f, g](0) \neq 0$ となる $f, g \in \mathcal{O}$ が存在する時．

適当な正準座標系により，$Y \equiv \{f=g=0\} = \{p_1 = x_1 = 0\}$ と表わせる．$(Y, \omega|_Y)$ は接触多様体になり，V が Y の積分多様体となるので，induction の仮定より，V が (2.1) の形に表わせることがわかる．

ii) i) でない時．

適当な正準座標系をとって，$\{p_1=0\} \supset V$ とできる．$Y = \{p_1 = x_1 = 0\}$ とおけば，i) でないことから $V \cap Y$ は正則となり，induction の仮定より $V \cap Y = \{p_1 = \cdots = p_n = x_1 = z = 0\}$

と表わせる．（即ち，$\dim V = n$）． 従って，

$$V = \{p_1 = p_2 + f_2 x_1 = \cdots = p_n + f_n x_1 = z + g x_1 = 0\}$$

（f_i, g は x のみの函数）と表わせる．V の局所座標として $(x_1, \cdots, x_n)$ をとる．$\omega|_V \equiv 0$ であるから，

$$\omega|_V \text{ の } dx_1 \text{ の係数} \equiv x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + g = 0 \qquad \therefore\ g \equiv 0$$

（cf. 命題I.1.2.） 次に，dx_i $(2 \leq i \leq n)$ の係数を調べれば，$f_i \equiv 0$ がわかる． q.e.d.

系2.3. 積分解析的集合の次元は n 次下である．次元の等しい積分多様体はすべて同型である．特に，次元が n の積分多様体は Lagrangean manifold である．

命題2.4. $\mathcal{V}_1 \ni V = \{f = 0\}$，$\frac{\partial f}{\partial z}(0) = 1$ とする．

この時，

$$[\cdot\,, f \otimes \omega^{(-r)}]: \begin{array}{ccc} L^{\otimes(-s)} & \longrightarrow & L^{\otimes(1-s-r)} \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ \varphi \otimes \omega^{(-s)} & \longmapsto & \psi \otimes \omega^{(1-s-r)} \end{array}$$

が定義される． $\psi = P\varphi$ において，P は V の内部微分である．

$$\begin{cases} P = \sum_{i=1}^{2n+1} b_i(t) \frac{\partial}{\partial t_i} + c(t) \\ P|V = \sum_{j=1}^{2n} b_j'(t') \frac{\partial}{\partial t_j'} + c'(t') \end{cases}$$

とおくと，次のことが成立する．

i) $b_1, \cdots, b_{2n+1}$ で生成される $\mathcal{O}$ の ideal を $(b_1, \cdots, b_{2n+1})$ etc. と表わすことにすれば，

$$(b_1,\cdots,b_{2n+1},f)/(f) = (b_1',\cdots,b_{2n}') = (a_1,\cdots,a_{2n})$$

但し，$(a_1,\cdots,a_{2n})$ は (1.1) の $a_1,\cdots,a_{2n}$ で生成される $\mathcal{O}(V)$ の ideal である．さらに，$r \neq 0$ ならば，$f \in (b_1,\cdots,b_{2n+1})$

ii) $C(0) = C'(0) = -s$

iii) $T_1(V) = \{(\lambda - p_i)^{m_i} \ ; \ 1 \le i \le k\}$ とすれば

$$\left\{\begin{array}{l} E(P) = \{(\lambda - \frac{1}{2}(1+p_i))^{m_i},\ \lambda - r\ ;\ 1 \le i \le k\} \\ E(P|V) = \{(\lambda - \frac{1}{2}(1+p_i))^{m_i}\ ;\ 1 \le i \le k\} \end{array}\right.$$

となる．($E(P)$ については，I. (1.2) を参照されたい)

<u>証明</u>　Lagrangean bracket の定義より，

$$(2.2)\quad P = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + p_j\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j} + \left(rf - \sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial f}{\partial p_j}\right)\frac{\partial}{\partial z} - s\frac{\partial f}{\partial z}.$$

さて，$V = \{z + h(x,p) = 0\}$　(cf. (1.2))

$$h(x,p) = \langle p, Ap\rangle + 2\langle p, Cx\rangle + \langle x, Bx\rangle + H(x,p)$$

(但し，${}^tA = A$, ${}^tB = B$ で，H は 2 次以下の項を含まない．)

と表わす．仮定より，$f = (z+h)\cdot g$ で $g(0) = 1$ となる．

従って，座標系 (p, x, z) のもとで，P から作った I. (1.1) の行列の原点における値は

$$\begin{pmatrix} 2{}^tC + I_n, & 2B, & 0 \\ -2A, & -2C, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{pmatrix}$$　となる．

(1.5), (1.6) と比較すれば，$T_1(V)$ から $E(P)$ がわかり，ii) の形になる．同様にして，$E(P|V)$ もわかる．命題の残りの部分は明らか．

q.e.d.

<u>定義2.5.</u> $^\forall V \in \mathcal{V}_d$ に対し，$D(V)$ は積分解析的集合となるので，$\dim D(V) \leq n$ となる．$\dim D(V) = n$ の時，V を退化が最大の包合的多様体という．$T_d(V)$ に $(\lambda+1)^{m_i}$ の形の元が含まれない時，V を退化が最小の包合的多様体という．

<u>命題2.6.</u> 余次元が d で退化が最大の包合的多様体はすべて同型である．

<u>証明</u> $d=1$ の時のみ証明すれば十分．(cf. 命題1.2, 命題1.4)

$V \in \mathcal{V}_1$，$\dim D(V) = n$ とすると

補題1.5 と定義1.6 と命題2.4 の i)，iii) より，iii) において $E(P|V)$ の元は，λ が n 個と，$\lambda-1$ が n 個から成っていることがわかる．従って，特に $D(V)$ には特異点がないことがわかり，$D(V)$ は Lagrangean manifold となる．(cf. 系2.3)

適当な正準座標系により，$D(V) = \{x_1 = \cdots = x_n = z = 0\}$ と表わせる．この時，$V = \{z + g(x,p) = 0\}$ であるとする．

$$h(x,p) = g(x,p) + \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \text{とおけば}$$

$$\omega|_{D(V)} \equiv 0 \quad \text{より} \quad \frac{\partial h}{\partial p_i}\Big|_{D(V)} \equiv \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_{D(V)} \equiv 0 \ , \ 1 \leq i \leq n$$

がわかり，h は1次以下の項を含まないので，

$$h = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{ij}(x,p)\, x_i x_j$$

と書ける．

$$(2.3)\quad \begin{cases} \Omega - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} - \sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}(x_1,\cdots,x_n,-\frac{\partial\Omega}{\partial x_1},\cdots,-\frac{\partial\Omega}{\partial x_n})x_i x_j \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_i}\Big|_{x_1=\cdots=x_n=0} = y_i \qquad (1\le i\le n) \end{cases}$$

は，$\Omega = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i + \sum_{|\alpha|\ge 2}\varphi_\alpha(y)x^\alpha$ という唯一つの形式的巾級数解を持つ．ただし，$\varphi_\alpha(y)$ は，原点で解析的である．

Ωが原点で解析的なことは，優級数の方法で容易に示せるが，ここでは次の様な方法をとる．

$$(2.4)\qquad p_j = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_j}\ ,\quad q_j = \frac{\partial\Omega}{\partial y_j}$$

とおけば，y_j，q_j が (x,p) の巾級数として求まり，

$$(2.5)\quad \begin{cases} y_j|_{x=0} = -p_j\ ,\quad q_j|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big|_{x=0} = -\alpha!\,\varphi_\alpha(-p_1,\cdots,-p_n)\ , \\ \qquad\text{但し，}\alpha = (\delta_1^i,\cdots,\delta_n^i)+(\delta_1^j,\cdots,\delta_n^j) \\ \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\Big|_{x=0} = \delta_i^j \end{cases}$$

一方，
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + d(h-\sum_{i=1}^{n}x_i p_i) &= \sum_{i=1}^{n}p_i dx_i + d\Omega \qquad (\text{cf. }(2.3)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i+\frac{\partial\Omega}{\partial x_i})dx_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Omega}{\partial y_i}dy_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} q_i dy_i \qquad (\text{cf. }(2.4)) \end{aligned}$$

$$\therefore\ dz - \sum_{i=1}^{n}p_i dx_i = d(z-\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + h(x,p)) - \sum_{i=1}^{n}q_i dy_i$$

故に，$p_i \longrightarrow q_i$，$x_i \longrightarrow y_i$，$z \longrightarrow z - \sum_{i=1}^{n}x_i p_i + h = z+g$

という変換は，形式的巾級数による接触変換である．この変換が解析的なことを示せば，適当な正準座標系によって，$V=\{z=0\}$ と書けることがわかるので，証明は終わる．

上の変換を F とし，新しい座標系を (p',x',z') とおく．

$V=\{z+g=0\}$ に対し，$s=0$ の時の命題2.4の $P|_V$ は，

$$(2.6)\qquad P|_V=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}+p_j\right)\frac{\partial}{\partial p_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$(2.7)\qquad =\sum_{j=1}^{n}p_j'\frac{\partial}{\partial p_j'}$$

$P|_V$ は，命題I. 2.1の仮定を満たすので，(2.6)を(2.7)の形に変換する解析的な座標変換G（接触変換とは限らない）が存在することがわかる．FG^{-1} は (2.7) の形を不変にする形式的座標変換であるが，(2.5)と，注意I. 2.3の後半の部分とから，FG^{-1} が解析的な座標変換であることがわかる．従って，F も解析的である．　　q.e.d.

<u>命題2.7.</u>　次の仮定A.2.1を満たす $V\in\mathcal{V}_d$ は $\mathcal{V}_{d,l}$ の元である．

<u>A.2.1.</u>　$T_d(V)=\{(\lambda+1-\mu_i)^{m_i}\ ;\ 1\leq i\leq k\}$ とおく時

i)　$\exists\theta\in R$ s.t. $\theta<\arg\mu_i<\theta+\pi$ かつ

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mu_j-\mu_i\neq 0\quad \text{for } \alpha\in\mathbb{N}^k,\ |\alpha|\geq 2,\ 1\leq i\leq k.$$

i)′　$m_i=1$ $(1\leq i\leq k)$ かつ $\exists\nu>0$ s.t.

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mu_j-\mu_i\right|\geq|\alpha|^{-\nu}\quad \text{for } \alpha\in\mathbb{N}^k,\ |\alpha|\geq 2,\ 1\leq i\leq k$$

のどちらかが成立する．

<u>注意2.8.</u>　$\forall V\in\mathcal{V}_d$ に対し，$T_d(V)$ の元の積は，

$\prod_{j=1}^{n+1-d}(\lambda-\rho_j)(\lambda+\rho_j)$ と表わせる．この時 $(\rho_1,\cdots,\rho_{n+1-d})$ は $\mathbb{C}^{n+1-d}$ のすべての点になり得る．また，$\rho_i, -\rho_j$ 達が互に異なっていれば，$T_d(V)$ の元は１次式のみから成る．一方，$\forall\varepsilon>0$ に対して，*Lebesgue measure* が零の $\mathbb{C}^{n+1-d}$ の部分集合 S が存在して，

$$(\rho_1,\cdots,\rho_{n+1-d})\notin S \quad\Rightarrow\quad \exists\, C>0 \quad s.t.$$

$$|\beta_{n+2-d}+\sum_{j=1}^{n+1-d}\beta_j\rho_j| \geqq C|\beta|^{-(n+1-d+\varepsilon)} \tag{2.8}$$

$$\text{for } \beta\in\mathbb{Z}^{n+2-d},\quad |\beta|\equiv|\beta_1|+\cdots+|\beta_{n+2-d}|\neq 0$$

となることが知られている．また，(2.8) が満たされれば，A.2.1. i)′ が成立することが容易にわかる．従って，"*generic*" には，命題 2.7 の仮定が満たされる．一方，(2.8) が満たされなくても，例えば，$|\mathrm{Re}\,\rho_j|<\frac{1}{3}$ ならば，A.2.1 i) が成立する．

<u>注意 2.9.</u>　命題 2.7 の仮定を満たす $V\in\mathcal{V}_d$ に対し，命題 1.7 とあわせれば，(1.2) の表示の具体的な形がわかる．例えば V が仮定 A.2.1 i)′ を満たすならば，

$$V=\{p_1=\cdots=p_{d-1}=z+\sum_{i=d}^{n}c_ip_ix_i=0\}\qquad(c_i\in\mathbb{C})$$

と書ける．

ここで，注意 2.8 における ρ_j を使えば，

$$c_i=\frac{1}{2}(\rho_{i+1-d}-1),\quad d\leqq i\leqq n\qquad \text{となる．}$$

<u>命題2.7の証明</u>　　$d=1$ を仮定してよい.

$$V = \{ z + h(p,x) = 0 \}$$

$$h = \langle p, Ap \rangle + 2\langle p, Cx \rangle + \langle x, Bx \rangle + H(p,x)$$

(但し, ${}^tA = A$, ${}^tB = B$, Hは2次以下の項を持たない)

と表わされている時, 2次式 g を次の様に定義する.

$$g = \langle q, Bq \rangle - \langle q, (2{}^tC + I_n)y \rangle + \langle y, Ay \rangle$$

この時, 次の方程式を考えよう.

$$(2.9)\quad \begin{cases} u = h(-\frac{\partial u}{\partial x}, x) - g(\frac{\partial u}{\partial y}, y) \\ u = \langle x, y \rangle + 3\text{次以上の項} \end{cases}$$

$v = u - \langle x, y \rangle$　(= 2次以下の項無し) とおくと

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - y_i \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y_j} = \frac{\partial u}{\partial y_j} - x_j \quad \text{より}$$

$$(2.10)\quad \begin{aligned} v = {} & \langle 2Ay, \tfrac{\partial v}{\partial x} \rangle - \langle 2Cx, \tfrac{\partial v}{\partial x} \rangle - \langle 2Bx, \tfrac{\partial v}{\partial y} \rangle \\ & + \langle (2{}^tC + I_n)y, \tfrac{\partial v}{\partial y} \rangle + R \end{aligned}$$

という方程式になる. ここで,

$R = \langle A\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \rangle + \langle B\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \rangle$ + (2次以下の項を含まない x, y, $\frac{\partial v}{\partial x}$ の函数).

$$P = \langle -2Cx + 2Ay, \tfrac{\partial}{\partial x} \rangle + \langle -2Bx + (2{}^tC + I_n)y, \tfrac{\partial}{\partial y} \rangle - 1$$

とおけば, (2.10) は　$Pv = -R$　となる.

Pに対して, I. (1.1) の行列を作れば,

$$\begin{pmatrix} -2C, & 2A \\ -2B, & 2{}^tC + I_n \end{pmatrix}$$ となるので, (1.6) と比べて,

その単純単因子系が $\{(\lambda-\frac{1}{2}\mu_i)^{m_i}\ ;\ 1\leq i\leq k\}$

となることがわかる．従って，適当な座標系 $t_1,\cdots,t_{2n}$ をとれば，

$$P=\sum_{j=1}^{2n}\lambda_j t_j\frac{\partial}{\partial t_j}+\sum_{j=1}^{2n-1}\delta_j t_{j+1}t_j\frac{\partial}{\partial t_j}-1$$

（但し，$\delta_j=0$ 又は 1，$\forall j,\ \exists i$ s.t. $\lambda_j=\frac{1}{2}\mu_i$）

$R=$（$\frac{\partial v}{\partial t}$ の2次式）＋（2次以下の項を含まない t と $\frac{\partial v}{\partial t}$ の函数）

となる．よって，$Pv=-R$ は

(2.11) $\quad \left|\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j\lambda_j-1\right|\neq 0 \quad$ for $\alpha\in\mathbb{N}^{2n}$, $|\alpha|\geq 3$

が満たされれば，形式的巾級数解（2次以下の項をもたない）が唯一つ存在することがわかる．ところが，仮定 A.2.1 と，定義 1.6 より，(2.11) が成立することがわかる．

$p_j=-\frac{\partial u}{\partial x_j}$，$q_j=\frac{\partial u}{\partial y_j}$ によって，

形式的変換 $(p,x)\longrightarrow(q,y)$ が定義される．

$$\begin{aligned}-\omega|_V&=dh(p,x)+\sum_{j=1}^{n}p_j\,dx_j\\&=d(u(x,y)+g(q,y))+\sum_{j=1}^{n}p_j\,dx_j\\&=dg(q,y)+\sum_{j=1}^{n}q_j\,dy_j\end{aligned}$$

において，g が2次式であるから，上の変換が解析的変換であることを示せば $V\in\mathcal{V}_{d,\ell}$ がわかる．

$(p,x)\rightarrow(q,y)$ が解析的変換であることは，命題2.6における と同様な方法でわかる．実は，D(V) が一点であるからその証明はより易しい．(cf. 注意 I.2.3) q.e.d.

注意2.10. 命題I.2.1に対応して，命題2.7を命題2.6も含む形で拡張することができるが，ここでは省略する．

例.2.11. $n=1$ としよう．

$$\begin{cases} V = \{z - \frac{1}{3}xp = 0\} \\ V' = \{z - \frac{1}{3}xp + x^3 = 0\} \end{cases}$$

に対して，命題2.4の $P|V$ と $P'|V'$ を作れば（$s=0$ とする）

$$\begin{cases} P|V = \frac{2}{3}p\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x} \\ P'|V' = (\frac{2}{3}p + 3x^2)\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

となる．$P|V \not\sim P|V'$（cf. 例I.3.9）であることより $V \not\sim V'$ がわかる．従って，$V' \notin V_{1,\ell}$

$T_1(V) = T_1(V') = \{(\lambda - \frac{1}{3}), (\lambda + \frac{1}{3})\}$ に注意．

例2.12 1階偏微分方程式を解くということは，接触幾何学の言葉で言えば，与えられた解析的集合（包合的と仮定してよい）に含まれる Lagrangean manifold を求めるということになる（cf. Carathéodory [2]）

$$(2.11)\quad \begin{cases} (\frac{du}{dx})^2 - x\frac{du}{dx} + 8u + 2x^2 = 0 \\ u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0 \end{cases}$$

という方程式は，$V = \{8z + p^2 - px + 2x^2 = 0\}$ に対応している．Vは原点を退化点としている．

$T_1(V) = \{(\lambda - 1/4), (\lambda + 1/4)\}$ に注意すれば

$V \sim V' = \{8z' - 3p'x' = 0\}$ (cf. 注意 2.9)

実際、変換は $\begin{cases} p' = p + x \\ x' = p + 2x \\ z' = z + \frac{1}{2}p^2 + px + x^2 \end{cases}$ で与えられる.

V'に含まれる Lagrangean manifold は $\{z' = p' = 0\}$ と $\{z' = x' = 0\}$ の2つがあり，これに対応する (2.11)の解は，

$u = -\frac{1}{2}x^2, \ -x^2$ となる. 全く同様に,

$$(2.12) \quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dx}\right)^3 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - (x+u)\frac{du}{dx} + 8u + 2x^2 = 0 \\ u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0 \end{cases}$$

は，原点で解析的な解を2つ持つことがわかる.

一般に，次の命題が成立する.

<u>命題 2.13.</u> 方程式

$$(2.13) \quad \begin{cases} f\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, x_1, \cdots, x_n, u\right) = 0 \\ u(0) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(0) = 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

において ($z = u$, $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ とおく)

$$f(0) = 0, \quad \mathrm{grad}_{(x,p)} f(0) = 0, \quad \mathrm{grad}_z f(0) \neq 0$$

とする。$V = \{f(p, x, z) = 0\}$ に対し，$T_1(V)$ が 仮定A.2.1 の i)' を満たし，さらに $i \neq j \Rightarrow \mu_i \neq \mu_j$ とする.

この時，(2.13) の解の数は，xに関して2次式で，xに関し3次以上の項を mod として (2.13) を成り立たせる

解の数に等しい．その数は 2^n 個以下であり，generic には 2^n 個になる．

Ch. III. 退化した擬微分方程式

X を $(n+1)$-次元 の複素多様体とする．X の余接射影束 P^*X は自然に，接触多様体となる．$\mathcal{P}^f$ を P^*X 上の有限階の擬微分作用素の層の環とする．$\mathcal{P}^f$ の定義とその基本的性質については，柏原・河合 [3]，S-K-K 等を参照していただくことにして，ここでは述べない．

この章では，点 $x_0^* \in P^*X$ を固定し，そこでの局所理論のみを扱う．局所座標系として $(x_1, \cdots, x_{n+1}, \eta_1, \cdots, \eta_{n+1})$ 又は $(p_1, \cdots, p_n, x_1, \cdots, x_n, z)$ を使う．但し，前者は，点 $(x_1, \cdots, x_{n+1}, \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j dx_j)$ を表わし，$(\eta_1, \cdots, \eta_{n+1})$ は同次座標系で，x_0^* が $(0, \cdots, 0 ; dx_{n+1})$ に対応しているとする．前者と後者の関係は $p_j = -\eta_j/\eta_{n+1}$，$z = x_{n+1}$ である．fundamental 1-form は $\omega = \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j dx_j = dz - \sum_{j=1}^{n} p_j dx_j$ である．(cf. Ch. II)

$P(x, D_x)$, $Q(x, D_x)$ を m 階の擬微分作用素とする．その主シンボル $P_m(x, \eta)$ と $Q_m(x, \eta)$ が一致し，$dP_m(x_0^*) \neq 0$ で $V = \{P_m = 0\}$ が退化点を持たないならば，x_0^* の近傍で

$$P(x, D_x)\, U(x, D_x) = U(x, D_x)\, Q(x, D_x)$$

となる様な可逆な擬微分作用素が存在する．（S-K-K, Chap. II. Theorem 2.1.2.）

§3.1 において，上の V が退化点を持つ場合に同じ問題を考える．その場合には次のシンボルが意味をもってくる．

$f : P^*X \longrightarrow P^*Y$ という接触変換が与えられた時

$\Phi : f^{-1}\mathcal{P}_X^f \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_Y^f$ という同型写像（quantized contact transformation という）が存在し，Φ からひきおこされるところの主シンボルの変換は，f によってひきおこされる変換と一致する．（S-K-K, Chap. II. §4.3）

方程式 $\mathcal{M}$ とは coherent left $\mathcal{P}^f$-Module のことである．§3.2 では未知函数が 1 個の場合，即ち，$\mathcal{P}^f$ の left ideal $\mathcal{J}$ によって，$\mathcal{M} = \mathcal{P}^f/\mathcal{J}$ と表わされている場合のみを扱う．方程式 $\mathcal{P}^f/\mathcal{J}$ の symbol ideal J は

$$J = \{P \text{の主シンボル}\ ;\ P \in \mathcal{J},\ \operatorname{ord} P = 0\}$$

で定義される．J が simple ideal であって，J の零点集合（それを $\mathcal{M}$ の台と言うが，それは必ず包合的）が退化点を持たないならば（この時，方程式 $\mathcal{M}$ が simple characteristic であると言う）方程式 $\mathcal{P}^f/\mathcal{J}$ は quantized contact transformation により，partial de Rham system に変換される（S-K-K, Chap. II. Theorem 5.1.2）

我々は §3.2 において，方程式の台が退化点を持つ場合を考察する．

§3.1 退化した主シンボルを持つ擬微分作用素

この節では，$P(x,D_x) \in \mathcal{P}^f$ が次の仮定を満たしているとする．

<u>A.3.1.</u> $P(x,D_x) = \sum_{j \leq m} P_j(x,D_x)$， $(P_j(x,\eta) \in L^{\otimes(-j)})$

と表わした時，$dP_m(x_0^*) \neq 0$ であり，x_0^* が $V = \{P_m = 0\}$

の退化点となっている．

$U \in \mathcal{P}^f$ を可逆な一階の作用素とすると $UPU^{-1} - P$ は

$(m-1)$ 階の作用素となる．その主シンボルを $J_{m-1}(x,\eta)$ とする．この時，次の命題が成立する．

<u>命題 3.1.</u> i) $J_{m-1}|_{D(V)}$ は $P_m(x,\eta)$ のみによって決まる函数であり，$J_{m-1}(x_0^*) \neq 0$． （$D(V)$ は V の退化点の集合）

ii) $Q \in \mathcal{P}^f$ の主シンボルが P の主シンボルと一致している時，可逆な $\mathcal{P}^f$ の元 V，W が存在して

(1.1) $$PV = WQ$$

を満たすならば，

(1.2) $$(P_{m-1} - Q_{m-1})|_{D(V)} \in J_{m-1}|_{D(V)}\,\mathbb{Z}$$

<u>証明</u> i) J_{m-1} が P_j $(j \leq m-1)$ によらないことは明らかであるから，U，U' を 1 階の可逆な作用素とする時，

$UPU^{-1} - U'PU'^{-1}$ の $(m-1)$ 階のシンボルが $D(V)$ 上で消えることを示せば十分である．

(1.3) $$U'^{-1}(UPU^{-1} - U'PU'^{-1})U = (U'^{-1}U)P - P(U'^{-1}U)$$

の $(m-1)$ 階のシンボルは $[V_0(x,\eta), P_m(x,\eta)]$ である．
（但し，V_0 は $U'^{-1}U$ の主シンボルを表わす）従って，命題 II. 2.4 より，それは $D(V)$ 上で消えることがわかる．一方，$dP_m(x_0^*) \neq 0$ より $J_{m-1}(x_0^*) \neq 0$ がわかる．

ii) (1.1) より，V と W の主シンボルが一致することがわかる．
$\operatorname{ord} V = k$ であるとし，U を 1 階の可逆な $\mathcal{P}^f$ の元とする．

$$(WU^{-k})^{-1} P (VU^{-k}) = U^k Q U^{-k}$$

ところが，WU^{-k}，VU^{-k} は互に主シンボルの等しい 0 階の $\mathcal{P}^f$ の元であるから，$(WU^{-k})^{-1} P (VU^{-k}) - P$ の $(m-1)$ 階の部分は $D(V)$ 上で消えている．$U^k Q U^{-k} - Q$ の主シンボルを $D(V)$ に制限したものは $k J_{m-1}(x,\eta)|_{D(V)}$ であるから

$$(P_{m-1} - Q_{m-1})|_{D(V)} = k J_{m-1}|_{D(V)} \qquad q.e.d.$$

<u>命題 1.2.</u> A.3.1 を満たす 2 つの擬微分作用素 P，Q の主シンボルが一致し，order が正であるとする．

$$T_1(V) = \{(\lambda - \rho_i)^{m_i} \ ; \ 1 \leq i \leq k\}$$

とおく時（cf. 定義 II. 1.6），命題 3.1 の条件 (1.2) と次の仮定 A.3.2 と A.3.3 が満たされるならば，可逆な擬微分作用素 U が存在して，

(1.4) $\qquad P U = U Q \qquad$ となる．

<u>A.3.2</u> V は x_0^* を単純退化点とする．

A.3.3. i) $(\lambda+1)^{\ell} \notin T_1(V)$ for $\ell \geqq 2$

ii) $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $1 \leqq i \leqq k$ に対し

$$p_i + 1 = 0 \quad \text{または} \quad \theta < \arg(p_i + 1) < \theta + \pi$$

証明 (cf. S-K-K, Chap. II. Theorem 2.1.2)

suffix を簡単にするため $Q(x, D_x)$ は1階の作用素であると仮定する(order が正なら証明は本質的に同じ)

$$Q(x, D_x) = \sum_{j \geqq -1} Q_{-j}(x, D_x), \quad Q_{-j}(x, \eta) = q_{-j}(x', z, p) \otimes \omega^{\otimes j} \quad etc.$$

と書くことにする. ($x' = (x_1, \cdots, x_n)$ である). 定数倍することにより, $\frac{\partial q_1}{\partial z}(0) = 1$ と仮定してよい.

変換 $D_{x_{n+1}}^{\ell} Q(x, D_x) D_{x_{n+1}}^{-\ell}$ を考えることにより,

$P_0(x, \eta)|_{D(V)} = Q_0(x, \eta)|_{D(V)}$ が成立するとして証明すれば十分であることがわかる. (cf. 命題3.1の証明)

$R = P - Q$ とおくと (1.4) は

$$(1.5) \qquad UQ - QU = RU$$

但し, $R(x, D_x) = \sum_{j \geqq 0} R_{-j}(x, D_x)$, $R_{-j}(x, \eta) = r_{-j} \otimes \omega^{\otimes j}$.

$$(1.6) \qquad r_0(x', z, p)|_{D(V)} \equiv 0$$

$\forall F \in L^{\otimes k_1}$, $\forall G \in L^{\otimes k_2}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\ell \in \mathbb{N}$ に対し

$$(F, G)^{\alpha, \ell} \overset{def}{=} \frac{1}{\alpha! \ell!} D_\eta^{(\alpha, \ell)} F \cdot D_x^{(\alpha, \ell)} G$$

$\left(D_x^{(\alpha,\ell)} = \frac{\partial^{|\alpha| + \ell}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n} \partial x_{n+1}^{\ell}} \quad etc. \right)$ と定義する.

(1.5) の両辺の $(-k)$ 次の部分を比較すれば,

$$[U_{-k}, Q_1] - R_0 \cdot U_{-k} = \sum_{\substack{k=i+j+|\alpha|+\ell \\ j<k}} (R_{-i}, U_{-j})^{\alpha,\ell} \tag{1.7}$$

$$+ \sum_{\substack{k=i+j+|\alpha|+\ell \\ j<k}} (Q_{-i}, U_{-j})^{\alpha,\ell} - \sum_{\substack{k=i+j+|\alpha|+\ell \\ j<k}} (U_{-j}, Q_{-i})^{\alpha,\ell}$$

特に，$k=0$ の時は，

$$[U_0, Q_1] - R_0 \cdot U_0 = 0 \tag{1.7$'$}$$

一方，$H_k \overset{\mathrm{def}}{=} [\cdot\ , Q_1] - R_0 : L^{\otimes k} \longrightarrow L^{\otimes k}$

とおけば，A.3.1 ～ A.3.3 と定義 II. 1.6 と命題 II. 2.4 より H_k が命題 I. 1.2 の仮定を満たすことがわかる．さらに，$U_0|D(V) = 1$ という初期条件のもとで (1.7)$'$ の解 U_0 が唯一つ存在し（(1.6) に注意），一方 U_{-k} ($k \geq 1$) については，(1.7) から帰納的に唯一つに定まることもわかる．

従って，$\sum_{j\geq 0}^{\infty} U_{-j}(x, D_x)$ が擬微分作用素を定義すること，即ち，$U_{-j}(x,\eta) = u_{-j}(x', p, z) \otimes \omega^{\otimes j}$ と書いた時，

"x_0^* の近傍 V が存在して，

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{\sup_{x^*\in V} |u_{-j}(x^*)|/j!} < \infty \text{"} \tag{1.8}$$

となることを証明すればよい．優級数の方法を使おう．

座標系として (p, x', z) を使うと，$\forall \varphi \in L^{\otimes 0} = \mathcal{O}$ に対し，

$$\begin{cases} D_{x_i}(\varphi \otimes \omega^{\otimes k}) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \otimes \omega^{\otimes k} & (1 \leq i \leq n) \\ D_{x_{n+1}}(\varphi \otimes \omega^{\otimes k}) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \otimes \omega^{\otimes k} & \\ D_{\eta_i}(\varphi \otimes \omega^{\otimes k}) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_i} \otimes \omega^{\otimes k+1} & (1 \leq i \leq n) \\ D_{\eta_{n+1}}(\varphi \otimes \omega^{\otimes k}) = (-k - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_i}) \otimes \omega^{\otimes k+1} & \end{cases} \tag{1.9}$$

$1+\rho_i$ $(1\leqq i\leqq k)$ のうち0でないものを $\lambda_1,\cdots,\lambda_{k'}$ とすれば，$\exists C_1>0$ s.t. $\left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k'}\beta_j\lambda_j+\ell\right|\geqq C_1(2|\beta|+\ell)$

$$\text{for } \forall\beta\in\mathbb{N}^{k'},\ \forall\ell\in\mathbb{N}$$

となるので，命題I. 1. 2の証明を見れば（大島[7]），適当な座標系 $(y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_{m'})$ を選んで　$(m+m'=2n+1$

$s=y_1+\cdots+y_m$，$t=z_1+\cdots+z_{m'}$，$u=s+t$　とおけば

$\exists C_2>0$，$1\geqq\exists r>0$，$\forall k\geqq 1$

$$H_k^*\overset{\text{def}}{=}\left(C_1-\frac{C_2u}{r-u}\right)s\frac{\partial}{\partial s}-\frac{C_2u}{r-u}s\frac{\partial}{\partial t}$$
$$+kC_1-k\frac{C_2u}{r-u}-\frac{C_2u}{r-u}$$

に対して

"$H_k^*\varphi(s,t)\gg H_k\psi(y,z)\Rightarrow\varphi\gg\psi$"　となる．

但し，$\gg$ は (y,z) の形式的巾級数として優級数であることを表わすものとする．

さて，次の様な記号を導入する．

$$v\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\rho-u}=\frac{1}{\rho-(y_1+\cdots+y_m+z_1+\cdots+z_{m'})},\quad(\rho>0)$$

$$\mathcal{F}\overset{\text{def}}{=}\{cv^\ell\ ;\ c>0,\ \ell\in\mathbb{N}-\{0\}\}$$

$$D\overset{\text{def}}{=}\frac{d}{du}:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}\quad(\text{i.e. } cv^\ell\longmapsto c\ell v^{\ell+1})$$

$F_1,F_2:\mathcal{F}\longrightarrow\{(y,z)\text{の形式的巾級数}\}$ に対し，

"$F_1\gg F_2\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}F_1\varphi\gg F_2\varphi$ for $\forall\varphi\in\mathcal{F}$"

正数 ρ は次式達が成立するように十分小さくとって，固定する．

$$
(1.11) \quad \begin{cases} \rho < \dfrac{C_1 r}{C_1 + 2C_2} \quad ; \quad u_0 \ll v, \\ r_{-i} \ll (i+1)!\, v^{i+2} \ \text{for } i \geqq 0 \ , \ g_{-j} \ll (j+1)!\, v^{j+2} \ \text{for } j \geqq -1 \\ \sum_{\tau=1}^{n} p_\tau \dfrac{\partial}{\partial p_\tau} \ll vD \quad , \quad \dfrac{\partial}{\partial z} \ll vD, \\ \dfrac{\partial}{\partial p_\tau} \ll vD \ , \ \dfrac{\partial}{\partial x_\tau} \ll vD \quad \text{for } 1 \leqq \tau \leqq n \end{cases}
$$

(1.7), (1.9) ～ (1.11) を見れば，次式 (1.12) を満たす $\varphi_k \in \mathcal{F}$ $(k \in \mathbb{N})$ は，(y, z) の中級数として，u_{-k} の優級数となることがわかる。

$$
(1.12) \quad \begin{cases} \varphi_0 \gg v \\ H_k^* \varphi_k \gg W_k \qquad (k = 1, 2, \cdots) \end{cases}
$$

但し，

$$
W_k = \sum_{\substack{k = i+j+|\alpha|+l \\ i \geqq -1,\ j < k}} 2 \frac{(i+1)!}{\alpha!\, l!} \left\{ (vD)^{|\alpha|} \prod_{\tau=1}^{l} (|i+\tau-1| + vD) v^{i+2} \right\} \cdot (vD)^{|\alpha|+l} \varphi_j
$$
$$
+ \frac{(i+1)!}{\alpha!\, l!} \left\{ (vD)^{|\alpha|} \prod_{\tau=1}^{l} (j+\tau-1+vD) \varphi_j \right\} \cdot (vD)^{|\alpha|+l} v^{i+2}
$$

まず，W_k を計算しよう

$D^l \gg l v D^{l-1}$ であるから

$$
(1.13) \qquad (vD)^n \ll 2^n v^n D^n
$$

$$
\left(\begin{array}{l} \because \text{帰納法により} \quad (vD)^n \ll (vD)(2^{n-1} v^{n-1} D^{n-1}) \\ \qquad = 2^{n-1} v^n ((n-1) v D^{n-1} + D^n) \ll 2^n v^n D^n \end{array} \right)
$$

また，$(l + vD) v^j \ll (l+j) v^{j+2} = (1 + \frac{l}{j}) \cdot (vD) v^j$ より

$i \geqq -1$, $j \geqq 1$, $j \geqq i$ の時，

$$
\prod_{\tau=1}^{l} (|i+\tau-1| + vD) v^j \ll \prod_{\tau=1}^{l} (i+\tau+1+vD) v^j
$$
$$
\ll \left\{ \prod_{\tau=1}^{l} \left(1 + \frac{i+\tau+1}{j+2\tau-2}\right) \right\} (vD)^l v^j
$$

一方，$\dfrac{i+\tau+1}{j+2\tau-2} \leqq 3$ となるので，

(1.14) $\quad \prod_{\tau=1}^{\ell} (|i+\tau-1|+vD)v^j \ll 4^\ell (vD)^\ell v^j$

さて，ここで

(1.15) $\quad \varphi_k = k!\, M^k v^{Nk+1} \quad (M \geqq 1,\ N \geqq 1)$

とおくと，$N \geqq 1$ であるから (1.14) が適用できて，

$$W_k \ll \sum_{\substack{k=i+j+|\alpha|+\ell \\ i\geqq -1,\ j<k}} \frac{3(i+1)!}{\alpha!\,\ell!} 4^\ell \{(vD)^{|\alpha|+\ell} v^{i+2}\}\cdot(vD)^{|\alpha|+\ell}\varphi_j$$

$$\ll \sum_{\substack{k=i+j+\tau \\ i\geqq -1,\ j<k}} \frac{3(i+1)!}{\tau!} 4^\tau (n+1)^\tau \{(vD)^\tau v^{i+2}\}\cdot(vD)^\tau\varphi_j$$

((1.13) を適用し，$2^4(n+1) = C_3$ とおくと)

$$\ll \sum_{\substack{k=i+j+\tau \\ i\geqq -1,\ j<k}} \frac{3\cdot C_3^\tau\cdot(i+1)!}{\tau!} v^{2\tau}(D^\tau v^{i+2})\cdot(D^\tau\varphi_j)$$

$$= \sum_{\substack{k=i+j+\tau \\ i\geqq -1,\ j<k}} 3\cdot C_3^\tau\cdot(i+1)!\cdot v^{3\tau+i+2}\frac{(\tau+i+1)!}{\tau!\,(i+1)!}\cdot D^\tau\varphi_j$$

$$\ll \sum_{\substack{k=i+j+\tau-1 \\ i,j,\tau\geqq 0,\ j<k}} (2C_3)^{i+\tau+1}\cdot i!\cdot v^{3\tau+i+1}\cdot D^\tau\varphi_j$$

一方，

$$H_k^* v^j = \left(C_1 - \frac{2C_2u}{r-u}\right)\lambda D v^j + k\left(C_1 - \frac{2C_2u}{r-u}\right)v^j + (k-1)\frac{C_2u}{r-u}v^j$$

$$\left(C_1 - \frac{2C_2u}{r-u}\right)v = (C_1+2C_2)\frac{\frac{C_1 r}{C_1+2C_2} - u}{r-u}\cdot\frac{1}{\rho-u}$$

$$\gg \frac{C_1+2C_2}{r-u} \gg \frac{C_1+2C_2}{r} \qquad (\because (1.11))$$

従って，$k \geqq 1$ の時，

$$H_k^* v^{Nk+1} \gg k\frac{C_1+2C_2}{r}v^{Nk}$$

さて，i, j, τ は非負整数で，$k = i+j+\tau-1$，$k > j$ の時 $N = 10$ とおけば，

$$Nk - \{(3\tau+i+1)+\tau+(Nj+1)\} = 10(k-j) - (4\tau+2+i)$$

$$\geqq 10(k-j) - 4(\tau+i) - 2 = 6(k-j) - 6 \geqq 0.$$

となる．従って，

$$D^{\tau}\varphi_j = j!\, M^j \frac{(10j+\tau)!}{(10j)!}\, v^{\tau+10j+1}$$

であることに注意すれば，

$$(1.16) \qquad (k!\, M^k)\cdot\left(k\frac{C_1+2C_2}{r}\right) \geqq \sum_{\substack{k=i+j+\tau-1\\ j<k}} (2C_3)^{i+\tau+1} \cdot i!\cdot j!\, M^j \frac{(10j+\tau)!}{(10j)!}$$

を満たす様な M が存在する時，その M に対し (1.15) の φ_k は (1.12) を成立させる．M の存在を示せば，$\varphi_k \gg u_k$ より，(1.8) がわかるので証明が終わる．

$$\sum_{\substack{k=i+j+\tau-1\\ j<k}} \frac{1}{k!\,M^k k}\cdot\frac{(2C_3)^{i+\tau+1}\ i!\ j!\ M^j\cdot(10j+\tau)!}{(10j)!}$$

$$= \sum_{\substack{k=i+j+\tau-1\\ j<k}} (2C_3)^2\, \frac{i!\ j!}{k!\ k}\,\frac{(10j+\tau)!}{(10j)!}\left(\frac{2C_3}{M}\right)^{k-j}$$

$$= 4C_3^2 \sum_{\substack{1\leqq l\leqq k\\ 0\leqq i\leqq l+1}} \frac{i!\ (k-l)!\ (10k-9l-i+1)!}{k\cdot k!\cdot(10k-10l)!}\left(\frac{2C_3}{M}\right)^{l}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{m} i!\,(m-i)! \leqq (m-1)\,(m-1)! + 2m! \leqq 3m! \text{ より}\right)$$

$$\leqq 12\, C_3^2 \sum_{1\leqq l\leqq k} \frac{(k-l)!\ (10k-9l+1)!}{k\cdot k!\cdot(10k-10l)!}\left(\frac{2C_3}{M}\right)^{l}$$

$$= 12\, C_3^2 \sum_{1\leqq l\leqq k} \frac{10k-9l+1}{k}\left(\prod_{\tau=0}^{l-1}\frac{10k-9l-\tau}{k-\tau}\right)\left(\frac{2C_3}{M}\right)^{l}$$

$$\leqq 120\, C_3^2 \sum_{1\leqq l\leqq k}\left(\frac{20\,C_3}{M}\right)^{l} = \frac{1200\,C_3^3}{M}\sum_{1\leqq l\leqq k}\left(\frac{20C_3}{M}\right)^{l-1}$$

(1.16)を成立させるには，前式の値が $\frac{C_1+2C_2}{\gamma}$ より小さくなる様にMを選べばよい．実際

$$M \geqq \max\left(\frac{2400\, C_3^3\, \gamma}{C_1+2C_2},\ 4C_3\right)$$

を満たす様にMを十分大きくすればよい． q.e.d.

系1.3. 階数が正の $P \in \mathcal{P}^f$ が A.3.1〜A.3.3を満たす時，Pと可換で可逆な $\mathcal{P}^f$ の元 U を特徴づけることができる。即ち，Uは0階であって，$U_0(x,\eta)|_{D(V)}$ を与えることによって唯一に定まる．さらに，特に D(V) が一点ならば，

（この時は，A.3.3 より弱く，

"$\alpha_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (p_i+1) \neq 0 \quad \text{for } \alpha \in \mathbb{N}^{k+1},\ |\alpha| \neq 0$"

が成立する場合でも）

Pと可換で可逆なものは，恒等写像の定数倍しか存在しないことがわかる。

注意1.4. 命題1.2の仮定において，階数が正であることは必要である．例えば，PとQの主シンボルが共に x_{n+1} の場合(1.4)を満たす可逆なUが存在するための必要十分条件は，

"$V' = \{\eta_1 = \cdots = \eta_n = 0\}$ とおく時

$$P_{-1}(x,\eta)|_{V'} \equiv Q_{-1}(x,\eta)|_{V'} \mod \mathbb{Z}$$ "

である．一方，$D(V) = \{\eta_1 = \cdots = \eta_n = x_{n+1} = 0\}$ であるが，

$$P_{-1}(x,\eta)|_{D(V)} \equiv Q_{-1}(x,\eta)|_{D(V)} \mod \mathbb{Z}$$

が成立すれば，(1.1)を満たすV，Wが存在する．実際，可逆な$\mathcal{P}^f$の元をかけて階数を正にしてから命題1.2を適用すればよい．

§3.2. 退化した台をもつ擬微分方程式系

ここでは，方程式系を複素領域で考え，この章の最初に述べた様に，次のことを仮定する．

<u>A.3.4.</u> 方程式$\mathcal{M}$は$\mathcal{P}^f/\mathcal{J}$と表わされており，$\mathcal{M}$のsymbol ideal Jはsimpleである．

<u>命題2.1.</u>（S-K-K, Chap. II. Theorem 5.1.2）

A.3.4を満たす方程式$\mathcal{M}$の台が退化点を持たない余次元dの包合的多様体とする．この時，方程式$\mathcal{M}$は，x_0^*の近傍で，次の方程式$\mathcal{N}$に同型となる．

$$(2.1) \qquad \mathcal{N}: \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad i=1,\cdots,d$$

§2.1，§2.2と§3.1の結果を使えば，命題2.1と全く同様の方法で次の命題達を証明することができる．

<u>命題2.2.</u> A.3.4を満たす方程式$\mathcal{M}$の台が，最大に退化した包合的多様体とする．この時，方程式$\mathcal{M}$は，x_0^*の近傍

で，次の方程式 $\mathcal{N}$ に同型になる．

$$(2.2)\quad \mathcal{N}: \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0 , & i = 1, \cdots, d-1 \\ x_{n+1}\dfrac{\partial u}{\partial x_{n+1}} + f(x_d, \cdots, x_n)\, u = 0 \end{cases}$$

但し，$0 \leqq \mathrm{Re}\, f(0) < 1$ である．

注意2.3. 命題2.2において，$d = n+1$ の場合 $\mathcal{M}$ は，最大過剰決定系になる。$f \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ である．（cf. S-K-K. Chap. II. §4）

命題2.4. 方程式 $\mathcal{M}$ がA.3.4を満たし，$\mathcal{M}$ の台 V は余次元が d で退化点を持ち，次の仮定を満たすとする．

A.3.5. $T_d(V)$ は1次式のみから成る．即ち

$$T_d(V) = \{(\lambda - \rho_j), (\lambda + \rho_j) ;\ 1 \leqq j \leqq n+1-d\}$$

と表わせ，しかも

i) $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ s.t. $\theta < \arg(1 \pm \rho_j) < \theta + \pi$

ii) $\alpha_{n+2-d} + \sum_{i=1}^{n+1-d} \alpha_i \rho_i \pm \rho_j \neq 0$ が

$\alpha_{n+2-d} \geqq 1$ かつ $\alpha_{n+2-d} - \sum_{i=1}^{n+1-d} |\alpha_i| =$ 正の奇数 又は -1

を満たす $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^{n+2-d}$，$1 \leqq \forall j \leqq n+1-d$ に対して成立する．

この時 $\mathcal{M}$ は x_0^* の近傍で次の方程式 $\mathcal{N}$ に同型となる．

$$(2.3)\quad \mathcal{N}: \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0 , & i = 1, \cdots, d-1 \\ x_{n+1}\dfrac{\partial u}{\partial x_{n+1}} + \sum_{j=d}^{n} c_j x_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + c\, u = 0 \end{cases}$$

但し，$c_j = \frac{1}{2}(P_j - 1)$ ，$c \in \mathbb{C}$ ，$0 \leq \mathrm{Re}\, c < 1$.

注意 2.5　一般の場合，ある条件のもとで，標準形として次のようなものがとれる．

$$(2.4)\quad \mathcal{M}: \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq d-1 \\ x_{n+1}\dfrac{\partial u}{\partial x_{n+1}} + \sum_{j=d}^{m} f_j(x')x_j\dfrac{\partial u}{\partial x_j} + f(x')u = 0 \end{array} \right.$$

但し，$x' = (x_{m+1}, \cdots, x_n)$ ，$f_j(0) \neq 0, -1$ ，$0 \leq \mathrm{Re} f(0) < 1$.

例 2.6.　$n = 2$ とする．x_0^* の近傍での擬微分方程式

$$(2.5)\qquad P(x, D_x)u = 0$$

に対し，$dP_m(x_0^*) \neq 0$ で（P_m は P の主シンボル），$V = \{P_m = 0\}$ の退化点が x_0^* であり，$T_1(V) = \{\lambda^2\}$ となるとしよう．（2.5）は命題 2.4 の仮定は満たさないが，命題 1.2 が適用でき，Ch. II. の結果とあわせれば，次の方程式に同型となることがわかる．　（$x_0^* = (0; dx_2)$）

$$(2.5)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + c\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

但し．$0 \leq \mathrm{Re}\, c < 1$.

参考文献

[1] R. Abraham : Foundation of Mechanics, Benjamin, New York, 1967.

[2] C. Carathéodory : Calculus of Variations and Partial Differential Equations of First Order, Part I, Holden-Day, Amsterdam, 1965. Translated from the Germann original, 1935.

[3] 柏原正樹，河合隆裕 : Pseudo-differential operators in the theory of hyperfunctions, Proc. Japan Acad., 46 (1970), 1130-1134.

[4] 小松彦三郎 : On the index of ordinary differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 18 (1971), 379-398.

[5] A. I. Mal'cev : 線型代数学 2，東京図書，1961. Translated from the Russian original, 1953.

[6] B. Malgrange : Remarques sur les points singuliers des équations différentielles, C. R. Acad. Sci. Paris, 273 (1971), 1136-1137.

[7] 大島利雄 : On the theorem of Cauchy-Kowalevsky for first order linear differential equations with degenerate principal symbols, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 83-87.

[8] E. Picard : Traité d'analyse III, Gauthier-Villaris, 1908.

[9] H. Poincaré : Première thèse, Œurves I, Gauthier-Villaris, 1928.

[10] 佐藤幹夫，河合隆裕，柏原正樹：Microfunctions and pseudo-differential equations, Proc. Conf. at Katata, Lecture Notes in Math. No. 287, Springer, Berlin, 1973, Part II.

[11] C. L. Siegel : Über die Normalform analytisher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Nach. Akad. Wiss. Gott., 1952, 21-30.

[12] S. Sternberg : Celestial Mechanics Part II, Benjamin, New York, 1967.