数理解析研究所講究録
第192巻 1973年 409-419



# Delicate Determinant of the matrix of Differential operators

京都大學　數研　矢野 環

Yearning for Mr. Kawai's *voise*

## §. 0 Introduction

I cannot, for my soul, remember precisely when, I first considered "determinant" cas non-commutatif. It was perhaps, towards October 1970, immediately after consolidating the foundation of "non-commutative Euclidean rings", that I vaguely defined the "determinant". That definition, however, was abandoned, since it seemed strange and was unnecessary for me at that time. Long time had since elapsed, and Prof. Sato presented the definition of "determinant of matrices of pseudo-differntial operators of finite order". It coincides with my former definition, but more elegantly formulated. In the following, I explain about it, and check the diversity against the "uncouth" definitions. Unfortunately, we must say that the first who defined the "det" for matrices over a skew-field is, J. Dieudonne (cf.Artin [ ] pour details).

In §1 we define "the determinant w.r.t. λ" axiomatically, and derive some properties. Our axioms are quite different from those of J.Dieudonne, but actually "det" coincides with ours. In §2, we define the det. for $\mathscr{D}^f, \mathscr{D}^f[t]\,(\mathscr{P}^f, \mathscr{P}^f[t])$. And the superiority of "our det." over "uncouth det." is made clear. In §3, we give some applications, especially for Cauchy-Kowalevskaja system, and refer to the canonical form of matrices over $\mathscr{D}^f, \mathscr{P}^f$. Conjectures are listed.

I want to thank M. Sato for definition of det., and M. Yamaguchi who informed me the work of S. Mizohata.

## §. 1. Definition of Determinant.

$R$ : a ring with 1. $\quad R^* = R - \{0\}$.

$\bar{C}$ : a. commutative multiplicative monoid with $0$.

$\bar{C} = C \sqcup \{0\}$ $\quad C$ isn't neces. multiplicatively closed.

$M_n(R)$ : the total matrix algebra $/R$.

$GL_n(R)$ : invertible matrices in $M_n(R)$.

### 1] Axioms.

given $\lambda : R \longrightarrow \bar{C}$ unitary multiplicative map.

$\lambda(r_1 r_2) = \lambda(r_1)\lambda(r_2)$, $\lambda(1) = 1$, $\lambda(0) = 0$, $\varepsilon \equiv \lambda(-1)$

A 1. $\quad \lambda_1 = \lambda$, $\quad \lambda_n : M_n(R) \longrightarrow \bar{C}$

A 2. $\quad \lambda_n(AB) = \lambda_n(A)\,\lambda_n(B)$

A 3. $\quad \lambda_n \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \lambda_{n_1}(A)\,\lambda_{n_2}(B) \qquad n = n_1 + n_2$

Def. 1. If $\lambda_2, \lambda_3, \cdots$ exist, $\det_\lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ is called "determinant w.r.t. $\lambda$".

Remark: $\lambda_n(I_n) = 1$ by A1, A3.

If $R$ has no zero divisor, $\lambda$ is induced by $\lambda|_{R^*} : R^* \to C$, as is easily seen.

Theorem 1. The axioms are categorical if $R$ can be embedded in a (skew) field. And for such $R$, $\det_\lambda$ exists.

Cor. 1. Theorem also holds for $R[t]$, where $R$ is as in it.

(In fact, if $k$ is a sfield, $k[t]$ is so called (?) "generalized Euclidean ring" and so, "common multiple condition" holds. Hence the cor.)

The proof of theorem is tedious and somniferous, so we omit it. I'm certain ~~that~~ Prof. Sato said ~~that~~ theorem 1 holded for general $R$.

The axioms being categorical,

Cor. 2. When $R = K$ is a sfield, J. Dieudonné's "det" coincides with ours.

2] Construction of $\det_\lambda$ for $R=K$ (a field).

The universal selection for $\lambda$ should be the abelianizer $K^\times \longrightarrow K^\times/[K^\times, K^\times]$. , $\lambda(0)=0$.

$n \geq 2$. $M_n(K) \ni A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$. If $A$ is singular, $\det A \equiv 0$.

If not, $A_i = (a_{i1}, B_i)$, $\exists X_\nu \in K$, $\Sigma X_\nu A_\nu = (1, 0, \cdots, 0)$

Choose any $X_i \neq 0$, $C_i \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{i-1} \\ B_{i+1} \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \in M_{n-1}(K)$ then by definition,

$$\det A \equiv \varepsilon^{i+1} \lambda(X_i^{-1}) \det C_i$$

. This is indep of the choice of $X_i \neq 0$

e.g. $n=2$ $\lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda(\gamma\alpha\gamma^{-1}\delta - \gamma\beta) & \gamma \neq 0 \\ \lambda(\alpha\delta) & \gamma = 0. \end{cases}$

If $\beta \neq 0$ also, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ yields $\det \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \lambda(\beta\delta\beta^{-1}\alpha - \beta\gamma)$ by the definition, and two expressions can change one another.

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma\alpha\gamma^{-1}\delta - \gamma\beta) &= \lambda(\gamma)\lambda(\alpha)\lambda(\gamma^{-1}\delta\beta^{-1} - \alpha^{-1})\lambda(\beta) \\ &= \lambda(\beta)\lambda(\delta\beta^{-1} - \gamma\alpha^{-1})\lambda(\alpha) \\ &= \lambda(\beta\delta\beta^{-1}\alpha - \beta\gamma) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = (a_1, \cdots, a_n)$$

$A_i$ : row vector
$a_j$ : column vector

Prop 1. $\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + \mu A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det(a_1, \cdots, a_i + a_j\mu, \cdots, a_n) = \det A$
$i \neq j$

Prop 2. $\det \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ A_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \det(a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n)}) = \varepsilon^{|\sigma|} \det A$

$|\sigma| = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} \sigma)$

Prop 3. $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C' & B \end{pmatrix} = \det A \det B$.

Prop 4 $A$ is singular iff $\det A = 0$.

Z In general, $A$ and ${}^tA$ are completely different in its nature. It may happen $\det A \neq 0$ and $\det {}^tA = 0$.

When $R = K$. Ax. 3 can be weakened as

Ax. 3′ $\quad \lambda_{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix} = \lambda_n(A)$.

3]. $R = R$. embeddable in a sfield.

$K = (R^*)^{-1}R = R(R^*)^{-1}$ is a field of quotient of $R$.

We define "$\det_\lambda$" for $\tilde{\lambda} : K \to Q(C') \sqcup \{0\}$,

$\tilde{\lambda}_n : M_n(K) \to Q(C') \cup \{0\}$ and descend to $M_n(R)$.

The next prop. is indispensable.

Prop 5. $\tilde{\lambda}_n(M_n(R)) \subset \bar{C}$. (Not yet! 3/1)

$C' = \lambda(R^*)$. $Q(C')$ is an group including $C'$.

## §.2. "det" for $\mathcal{D}^f$, $\mathcal{P}^f$, $\mathcal{D}^f[t]$, $\mathcal{P}^f[t]$.

1] $R=\mathcal{D}^f$.

$\mathcal{D}^f$とかくときは, ある点でのgermのつもり.

$\bar{C}=\bigsqcup_{m=0}^{\infty}\mathcal{D}^f_m/\mathcal{D}^f_{m-1}$ 積は, $\overline{\mathcal{D}^f}=\bigoplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{D}^f_m/\mathcal{D}^f_{m-1}$

でとるとおもう. $\lambda$はprincipal symbolをとる操作.

$\mathcal{D}^f$では公倍元条件が成立するので ($n=1$はeasy cf. T.Yano[ ], $n\geq 2$ M.Kashiwara[ ]).detが定義される.

Leray流のdetとのちがいはAx1〜3をみれば, そのcategoricalnessより, Leray流ではAx2がみたされない場合のあることがわかる. その一致についてのべるため, Leray流の定義を復習する.

$P=(p_{ij}(x,D))$ $\quad\gamma_{ij}=\mathrm{order}(p_{ij})$

$N=\max_{\sigma}\sum\gamma_{i\sigma(i)}$ とすれば $\gamma_{ij}\leq s_i+t_j$

$\sum(s_i+t_i)=N$ なる integers $(s_i)$ $(t_j)$ がある.

$\mathring{p}_{ij}(x,D)=$ ($p_{ij}$の order $s_i+t_j$ のprincipal part)

$\mathring{P}(x,D)=(\mathring{p}_{ij})$ を $P$のprincipal partとよび,

$L(x,\xi)=\det(\mathring{p}_{ij}(x,\xi))$ をとれば, それは

$\det(p_{ij}(x,\xi))$ の $\xi$に関する hom. $N$次のpartと一致している. $N=$ out-order $P$ とかくことにする.

(outward order のつもり)

一方我々の立場でとった $\det_\lambda P$ の order を
ess-order $P$ (essential order) と書く. ess-order $< N$
ならば $L \equiv 0$ となってしまうのであるが,

**Theorem** out-order $P =$ ess-order $P$

$$\Leftrightarrow \quad L(x,\xi) = \det_\lambda P.$$

out-order $P \gtrless$ ess-order $P$ のときは, $\det(p_{ij}(x,\xi))$ の
生き残った最高階の次数は, ess-order $P$ より高いことも
低いこともあり, もはや $\det(p_{ij}(x,\xi))$ は何の意味もない.

2] $R = \mathcal{D}^f[t]$

$\overline{\mathcal{D}^f}[t]$ の元に, Newton polygon (上に凸) をかいた
ときに, 各辺より下にきてしまうような係数をもった $t^i$ の
項は 0 にする, という処理をほどこしたもの全体を考える.
それらは, 積を $\overline{\mathcal{D}^f}[t]$ でとった上で再び上の処理を
ほどこしたものを積と考えて, monoid になる. それを
$\overline{C}$ とする. $t^2 + xt + \xi^2 \longrightarrow t^2 + \xi^2$

$(t-1)(t-\xi) = t^2 - (\xi+1)t + \xi \;\rightarrow\; t^2 + \xi t + \xi$ etc.

$\lambda$ は, $\mathcal{D}^f[t]$ の元を, まず係数の principal part
をとった上で, 上の処理をするものと解する. これは multi-
plication map になる.

Th. 1 の Cor. 1 より det が定義される. 特に

$\det_\lambda(tI - P)$ により $P(x, D)$ の characteristic polynomial が定義される.

$\overline{C}$ のうち, Newton polygon が対角線以下にくるもの

(i.e. $a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m$ で $\mathrm{order}\, a_i \leq i$)

全体は submonoid をなす. それを $C_K$ とかき, Kovalevskian polynomials と称する. そのためには, はじめの辺が, $(0,0)$ から出て傾き 1 以下ならよい.

$\det_\lambda(tI - P(x, D))$ が $C_K$ に属することと, $\det(tI - P(x, \xi))$ が $C_K$ に属することとは, 互いに従属しない (一般には).

$\det(tI - P(x, D))$ は次の様にしても作れる.

$P \in M_n(\mathcal{D}^f)$, $K = Q(\mathcal{D}^f)$, $K^n$ を $M_n(K)-K$ bimodule とおもう. 適当に $e_1$ をとり, $e_1, Pe_1, P^2 e_1, \cdots$ のうち初めての relation を $P^{r_1} e_1 + P^{r_1 - 1} e_1 a_1^1 + \cdots + P e_1 a_1^{r_1 - 1} + e_1 a_1^{r_1} = 0$ とし, それらで span した right subspace でわった space で (direct summand にうつすといいが) $e_2$ をとり $e_2, Pe_2 \cdots$ の relation をとり $\cdots$ とし, 全部すんだら

$$(t^{r_1} + t^{r_1 - 1} a_1^1 + \cdots + a_1^{r_1})(t^{r_2} + t^{r_2 - 1} a_2^1 + \cdots + a_2^{r_2})(t^{r_3} + \cdots)$$

を $\lambda$ でうつすと, もとめるものになる. これは後に行列の標準化でもつかう.

## §3. 行列の標準化．Cauchy-Kowalevskaja system.

紙数残り少ない．つめこむ．

### 1) 標準化．

$K=Q(\mathcal{D}^f)$ とする．char. poly は $M_n(K)$ について作れた．単因子論の存在は前からわかってたが（cf. T. Yano[ ]）一意性がくずれる．多少の条件のもとで，$\begin{pmatrix} P & 1 & & \\ & P & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & P \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} P & & \\ & \ddots & \\ & & P \end{pmatrix}$ の単因子とよぶべきものが一致してしまう．(e.g. $P=\frac{d}{dx}$) それなら，char. poly が同じになれば inner auto でうつりかえればよいが，そうはいかない．$\begin{pmatrix} & D \\ 1 & -(D+1) \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} & D \\ 1 & -D \end{pmatrix}$ などは，うつりようがない．この例は 0 階の元 + (−1階) のものが各元に対してもともと inner でうつらないことに起因しているのかもしれない．しかしともかく，

**Theorem** $\forall P \in M_n(K)$, $\exists U \in GL_n(K)$

$$PU = UQ \qquad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & & 0 \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q_\ell \end{pmatrix}$$

$Q_i$ は $\begin{pmatrix} & & & g^{r_i}_i \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & g^2_i \\ & & 1 & g^1_i \end{pmatrix}$ の形．

上で言ったように，$Q$ は unique にはきまらず，$\begin{pmatrix} & D^2 \\ 1 & -2D \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} D & \\ & D \end{pmatrix}$ は互いにうつったりする．また標準化が他にあるとはおもえないが．

2) Cauchy-Kowalevskaja system.

$j,k=1,\dots,m$

$P=(p_{ij}(x,D))$ に対し, order $p_{ij}\le m_j-m_k+1$ の

ときは $D'=(D_1,\dots,D_{n-1})$ ← 当然 $x_n=0$ で initial data をとって,

$D_n-P(x,D')$ について C-K が成立することはよく

知られている. 普通の det をとり方をした場合, 一般には,

P が $x_n$ を含んでいなくても,

$\det(t-P(x,\xi'))$ が $C_K$ に入ることと, $D_n-P(x,D')$

に対して C-K が成立することは全く関係ないことが

知られている. しかし, 我々の意味で $\det_\lambda$ をとれば,

上の状況は改善されるようである. (証明あり)

I will not fail to prove the

Theorem.

$D_n-P(x,D')$ に対して C-K 成立

$\Longleftrightarrow$ $\det(t-P(x,D'))\in C_K$ (at least when $P(x',D')$)

? or $\det(D_n-P(x,D'))$ を $\xi_n$ について見たら $\in C_K$.

せめて $\Leftarrow$ くらいは.

M. Kashiwara. 偏微分方程式系の代数的研究 東大修論.

T. Yano Analytic hyperfunction $n=1$. 数学, 16-1.

定理など補足し，証明を加えたりする時間がなくなったので，溝畑先生の仕事に関連したことを書き加えるにとどめる．溝畑先生の，Systemに関するC-Kの成立についての必要条件．十分条件については，いずれ発表される予定である。私の方は，進行中．

1. $$P = \begin{pmatrix} D^3 & -(1-x)D^3 \\ \frac{1}{1-x}D^3 & -D^3 \end{pmatrix} \qquad D = \frac{\partial}{\partial x}$$

$D_t - P(x,D)$ については，$x=0$ でC-Kが成立しないことが実例で示せる。しかし char. poly を普通にとると，

$p(\lambda,\xi) = \lambda^2$ でKowalevskianにみえる．ところが

$\det(\lambda I - P(x,D)) = \lambda^2 + \frac{3}{1-x}\xi^2\lambda$ で，我々の意味ではKowalevskianでない．

2. $$P = \begin{pmatrix} D^2 + a_{11}D & (1-x)D^3 \\ -\frac{1}{1-x}D + c_0 & -D^2 + a_{22}D \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{3}{2}\frac{1}{1-x} - \frac{k}{2}(1-x)^{1/3} \\ a_{22} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{k}{2}(1-x)^{1/3} \end{aligned}$$

$D_t - P(x,D)$ についてはC-Kが成立することが証明されている．しかし

$p(\lambda,\xi) = \lambda^2 - \frac{2}{1-x}\xi\lambda - \frac{1}{1-x}\xi^3 + \cdots$ となって

Kowalevskianにみえない．我々のやり方で計算すると，

$\det(\lambda I - P(x,D)) = \lambda^2 + 0 + \varphi\xi^2$ $\varphi$ は $x$ の function

となって，Kowalevskianの形になっている．