数理解析研究所講究録
第192巻 1973年 432-442

定数係数線型偏微分方程式系の超函数解の接続について

東大 理　　金子 晃

集合 K ($\neq \phi$) は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合の開下半空間 $H=\{x_n<0\}$ にある部分とし，U を H におけるその凸開近傍とする。$L=\overline{K}$ ($\mathbb{R}^n$ における閉包) とおく。[2] では実解析解の接続を論ずるための準備として，§1 において単独方程式 $p(D)u=0$ に対する次の接続可能性定理を得た。ここで $D=(D_1,\cdots,D_n)$，$D_j=\sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ である。

定理. $\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\mathcal{B}_p(U)=0$ となるのは p の零点多様体 $N(p)=\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ p(\zeta)=0\}$ の上で次の不等式が満たされるとき，かつそのときに限る：任意の $\varepsilon>0$ に対し或定数 C_ε が存在して，

$$H_L(\zeta)\leq H_{L\setminus K}(\zeta)+\varepsilon|\zeta|+C_\varepsilon,\quad \zeta\in N(p).$$

ここに $H_L(\zeta)$ は指数函数を評価するときに現われる L の支持函数と呼ばれるもので，ここでは $H_L(\zeta)=\sup\limits_{x\in L}\mathrm{Re}\langle x,\sqrt{-1}\zeta\rangle$ を採用する。

この条件はまた幾何学的に次のようにも云い換えられる。（c.f. [3]）

<u>系.</u>　$\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\mathcal{B}_p(U)=0$ であるためには p が超函数論の意味で双曲型であり，かつ K の各点から未来に向って描いた伝播錐は半空間 H の中では K からはみ出さないことが必要十分である。

これからの話では，$p(D)$ を一般の方程式系にしたとき上の結果がどのように修正された形で成立するかを調べることにする。

$M=\operatorname{coker} p'$（$p'$ は p の転置行列）とおき

(1)　$0\leftarrow M\leftarrow \mathcal{P}^s \xleftarrow{p'} \mathcal{P}^t \xleftarrow{p_1'} \mathcal{P}^{t_2}\leftarrow\cdots$

を M の一つの自由分解とする。よく知られているように，$p(D)u=0$ の超函数解の層 $\mathcal{B}_p$ に対し，次は一つの flabby 分解となる。（小松 [4]）

(2)　$0\longrightarrow \mathcal{B}_p\longrightarrow \mathcal{B}^s\xrightarrow{p(D)}\mathcal{B}^t\xrightarrow{p_1(D)}\mathcal{B}^{t_2}\longrightarrow\cdots$

これから種々のコホモロジー群を計算することができる。まず U が凸開集合であることから，

(3)　$0\longrightarrow \mathcal{B}_p(U)\longrightarrow \mathcal{B}(U)^s\xrightarrow{p(D)}\mathcal{B}(U)^t\xrightarrow{p_1(D)}\mathcal{B}(U)^{t_2}\longrightarrow\cdots$

は完全となる。（小松 [4]），故に

(4)　$H^i(U,\mathcal{B}_p)=0$　　$i\geqq 1$

一方，複体

$$0 \longrightarrow [H_K^0(U,\mathcal{B})]^s \xrightarrow{p(D)} [H_K^0(U,\mathcal{B})]^{t} \xrightarrow{p_1(D)} [H_K^0(U,\mathcal{B})]^{t_2} \to \cdots$$

から定義により

(5) $\qquad H_K^1(U,\mathcal{B}_p) = H_K^0(U,\mathcal{B}_{p_1})/p[H_K^0(U,\mathcal{B})]^s$

を得る。さらに $\mathcal{B}_p$ に対する基本完全列

(6) $\qquad 0 \longrightarrow H_K^0(U,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H^0(U,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H^0(U\setminus K,\mathcal{B}_p)$
$\qquad\qquad \longrightarrow H_K^1(U,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H^1(U,\mathcal{B}_p)$

を用い，ここに(4)の $H^1(U,\mathcal{B}_p)=0$ を代入すると，$\mathcal{B}_p(U)$ $= H^0(U,\mathcal{B}_p)$ 等と書き直して

(7) $\qquad H_K^1(U,\mathcal{B}_p) \cong \mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)}$

を得る。ここに $\widehat{\mathcal{B}_p(U)} = \mathcal{B}_p(U)/H_K^0(U,\mathcal{B}_p)$。

さらに，開集合の三つ組 $X\supset Y\supset Z$ に対する基本完全系列

$$0 \longrightarrow H_{X\setminus Y}^0(X,F) \longrightarrow H_{X\setminus Z}^0(X,F) \longrightarrow H_{Y\setminus Z}^0(Y,F)$$
$$\longrightarrow H_{X\setminus Y}^1(X,F) \longrightarrow H_{X\setminus Z}^1(X,F) \longrightarrow H_{Y\setminus Z}^1(Y,F)$$
$$\longrightarrow H_{X\setminus Y}^2(X,F)$$

を $X=\mathbb{R}^n$, $Y=\mathbb{R}^n\setminus(L\setminus K)$, $Z=\mathbb{R}^n\setminus L$, $F=\mathcal{B}_p$ に対して適用すると切除定理を用いることにより

(8) $\quad 0 \longrightarrow H_{L\setminus K}^0(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H_L^0(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H_K^0(U,\mathcal{B}_p)$
$\qquad \longrightarrow H_{L\setminus K}^1(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H_L^1(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H_K^1(U,\mathcal{B}_p)$
$\qquad \longrightarrow H_{L\setminus K}^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H_L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_p)$

を得る。まず

<u>補題1.</u> $\quad 0 \longrightarrow H_{L\setminus K}^0(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H_L^0(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_p) \longrightarrow H_K^0(U,\mathcal{B}_p)$

$\longrightarrow 0$ は常に完全である。

証明．最後の項における完全性を調べることだけが残っている。

$$
(9)\qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & H^0_{L\setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_K(U, \mathcal{B}_p) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & {[\mathcal{B}[L\setminus K]]^s} \arrow[r] \arrow[d, "p(D)"] & {[\mathcal{B}[L]]^s} \arrow[r] \arrow[d, "p(D)"] & {[H^0_K(U, \mathcal{B})]^s} \arrow[r] \arrow[d, "p(D)"] & {[H^1_{L\setminus K}(U, \mathcal{B})]^s} \\
0 \arrow[r] & {[\mathcal{B}[L\setminus K]]^t} \arrow[r] & {[\mathcal{B}[L]]^t} \arrow[r] & {[H^0_K(U, \mathcal{B})]^t} \arrow[r] & {[H^1_{L\setminus K}(U, \mathcal{B})]^s} \arrow[u, phantom, "\overset{0}{\shortparallel}"]
\end{tikzcd}
$$

は完全な行と列をもつ可換図式である。$\mathcal{B}$ の flabby なことから $H^1_{L\setminus K}(U, \mathcal{B}) = 0$。さて，$u \in H^0_K(U, \mathcal{B}_p)$ をとろう．$v \in [\mathcal{B}[L]]^s$ を $v|_K = u$ となるようにとる。仮定により

$$p(D)v|_K = 0 \qquad \therefore\ p(D)v \in (\mathcal{B}[L\setminus K])^t$$

これを Fourier 変換してみる。整函数（のベクトル）$p(D)\tilde{v}$ は空間 $\widetilde{\mathcal{B}[L\setminus K]}$ の元と同じ増大度をもち，しかも局所的に $p(\xi)$ による正則函数の像に入っている。故に（弱い形の）Fundamental Principle により $p(\xi)\tilde{v} = p(\xi)\tilde{w}$ となる $w \in [\widetilde{\mathcal{B}[L\setminus K]}]^s$ の元を見出すことができる。Fourier 逆変換することにより

$$p(D)(v - w) = 0 \qquad v \in \mathcal{B}[L],\ w \in \mathcal{B}[L\setminus K]$$

故に　　$v - w \in H^0_K(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p)$.

一方明に　$v - w|_K = u$ であるから最後の項は完全である。

q.e.d.

系2.　$H^0_K(U, \mathcal{B}_p) = 0$ であるためには p が決定系なることが必要且十分である。

証明.　コンパクト集合L等については $H^0_L(U, \mathcal{B}_p) = 0$ と p が決定系なることとが同値なことは既に知られている。(小松[5])。故に p が決定系ならば補題1の完全列から直ちに $H^0_K(U, \mathcal{B}_p) = 0$ を得る。逆に $H^0_K(U, \mathcal{B}_p) = 0$ ならKの任意のコンパクトな部分集合 K_1 に対し $H^0_{K_1}(U, \mathcal{B}_p) \subset H^0_K(U, \mathcal{B}_p) = 0$。故に p は決定系である。　q.e.d.

次に

補題3.　$$H^2_{L \setminus K}(\mathbb{R}^n; \mathcal{B}_p) = H^1_{L \setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1})$$
$$H^2_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) = H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1})$$

証明.　明に

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{p_1} \longrightarrow \mathcal{B}^{t} \xrightarrow{p_1(D)} \mathcal{B}^{t_2} \longrightarrow \cdots$$

は $\mathcal{B}_{p_1}$ の flabby 分解となる。故に $\mathcal{B}_{p_1}$ の切断加群のコホモロジーは複体

$$0 \longrightarrow [H^0_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})]^{t} \xrightarrow{p_1(D)} [H^0_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})]^{t_2} \longrightarrow \cdots$$

等により計算できる。これは最初のものを除き $\mathcal{B}_p$ に対する複体と番号が一つずれているだけである。故に

(10) $$H^i_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) = H^{i-1}_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \qquad i \geq 2$$

等々。 q.e.d.

補題4. $H^2_{L\setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \longrightarrow H^2_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p)$ は常に単射である。

証明。上の結果により $H^1_{L\setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1}) \longrightarrow H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1})$ を調べればよい。ところで

(11) $$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0_{L\setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1}) \longrightarrow H^0_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1}) \longrightarrow H^0_K(U, \mathcal{B}_{p_1}) \\ &\longrightarrow H^1_{L\setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1}) \longrightarrow H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1}) \end{aligned}$$

であるから，上が単射であるためには $H^0_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{p_1}) \longrightarrow H^0_K(U, \mathcal{B}_{p_1})$ が全射なることが必要且十分である。後者の主張は補題1を $p_1(D)$ に対して適用すれば得られる。q.e.d.

系列（8）に以上の知識を導入すると

(12) $$0 \longrightarrow H^1_{L\setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \longrightarrow H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \longrightarrow H^1_K(U, \mathcal{B}_p) \longrightarrow 0$$

なる完全系列が得られる。以上をまとめると

命題5. $$\begin{aligned} &\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)} \\ &\cong H^1_K(U, \mathcal{B}_p) \\ &\cong H^0_K(U, \mathcal{B}_{p_1})/p[H^0_K(U, \mathcal{B})]^S \\ &\cong H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p)/H^1_{L\setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \end{aligned}$$

$H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p)$ 等は $\mathrm{Ext}^I(M, \mathcal{P})$ なる加群に同伴した代数多様体の族上の正則函数のベクトルのある種の空間で表現できるのであった。（[1] p. 432）

$$(13)\quad \begin{aligned} &H^1_{L\setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \cong \widehat{\mathcal{B}[L\setminus K]}\{\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}), d'_p\} \\ &H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \cong \widehat{\mathcal{B}[L]}\{\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}), d'_p\} \end{aligned}$$

ここに正則函数のベクトルに対する条件を簡単に書けばそれぞれ対応する空間$\widehat{\mathcal{B}[L]}$等と同種の増大度条件を満たし，局所的にネーター作用素d'_pの像に入っているものである。d'_pとしてはpに対するネーター作用素のうち，n次元の成分に対するものを除いた残りを用いるのであった。同型(13)及び(7)を(12)に代入すれば結局

定理6. 次の同型が存在する。

$$(14)\quad \begin{aligned} &\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)} \\ &\cong \widehat{\mathcal{B}[L]}\{\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}), d'_p\}/\widehat{\mathcal{B}[L\setminus K]}\{\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}), d'_p\}. \end{aligned}$$

これを用いて

定理7. $\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)}=0$なるためには代数多様体$N(\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}))$の上で任意の$\varepsilon>0$に対し或定数$C_\varepsilon>0$が存在して

$$(15)\quad H_L(\zeta) \leq H_{L\setminus K}(\zeta) + \varepsilon|\zeta| + C_\varepsilon, \quad \zeta \in N(\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}))$$

なる不等式が成立することが必要且十分である。

証明。 十分の方は上の同型から直ちにわかる。必要の方を証明しよう。$\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)}=0$を仮定して$\widehat{\mathcal{B}[L\setminus K]}\{\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}), d'_p\} = \widehat{\mathcal{B}[L]}\{\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}), d'_p\}$から上の不等式を導けばよい。完全系列（[1] p.421）

$$(\mathcal{B}[L])^{s} \xrightarrow{p(D)} \mathcal{B}_{p_1}[L] \xrightarrow{d_p'} \widetilde{\mathcal{B}[L]}\{Ext^1(M,\mathcal{P}), d_p'\} \longrightarrow 0$$

を用いる。$\mathrm{Ker}\, p_1(\zeta) = \mathrm{Ker}[p_1(\zeta): \mathcal{P}^{t} \longrightarrow \mathcal{P}^{t_2}]$ の $\mathcal{P}$ 上の自由基底を $F_1(\zeta), \cdots, F_l(\zeta)$ とすると $\mathcal{B}[L]$ は flat $\mathcal{P}$-module（小松 [5]）だから $\mathcal{B}_{p_1}[L] = \mathcal{B}[L] \otimes \mathrm{Ker}\, p_1(\zeta)$. 従って $\mathcal{B}_{p_1}[L] = \mathcal{B}[L] * F_1(D)\delta + \cdots + \mathcal{B}[L] * F_l(D)\delta$ と書ける。$L \setminus K$ についても同様である。$a \in K$ を任意に選ぼう。$\delta(x-a) \in \mathcal{B}[L]$ だから特に $F_j(D)\delta(x-a) \in \mathcal{B}_{p_1}[L]$, $j = 1, \cdots, l$. 従って $d_p'[F_j(\zeta)e^{ia\zeta}] \in \widetilde{\mathcal{B}[L]}\{Ext^1(M,\mathcal{P}), d_p'\}$ 仮定によればこれは $\widetilde{\mathcal{B}[L \setminus K]}\{Ext^1(M,\mathcal{P}), d_p'\}$ に属さなければならない。特に $\widetilde{\mathcal{B}[L \setminus K]}$ と同じ増大度を持たねばならぬ。$d_p'[F_j(\zeta)e^{ia\zeta}]$ は一般にはややこしいベクトルであるが，その成分には必ず

(16) $$G(\zeta) \equiv F(\zeta)e^{ia\zeta}\Big|_{Ext^1(M,\mathcal{P})}$$

なる形の函数が含まれている。ここに $F(\zeta)$ はある多項式である。これが

$$|G(\zeta)| \leqq C_\varepsilon\, e^{\varepsilon|\zeta| + H_{L \setminus K}(\zeta)}$$

という $\widetilde{\mathcal{B}[L \setminus K]}$ 級の不等式を満たすということから，求める不等式（15）が得られる。以下の推論は背理法を用いた [2] における単独方程式の場合のそれと全く同様であって多項式の因子は全然問題にならない。 q.e.d.

最後に条件(15)を伝播錐の言葉で書き換えるために次の定義を用意する。

定義8. $\mathbb{C}^n$ の部分代数多様体 N が双曲型であるとは $\mathbb{R}^n$ の原点を頂点とする開錐 C° で次の性質をもつものが存在することとする：任意の $\varepsilon>0$ 及び原点を頂点とする C° の任意の固有部分錐 Γ に対し正数 $C_{\varepsilon,\Gamma}$ を適当にとれば

$$|\mathrm{Im}\,\zeta|\leqq\varepsilon|\zeta|+C_{\varepsilon,\Gamma}\quad;\quad\zeta\in N\ \&\ \mathrm{Im}\,\zeta\in\Gamma.$$

(ここに Γ が C° の固有部分錐であるとは Γ の単位超球面 S による切り口 $\Gamma\cap S$ が C° の完全内部に入っていることをいう。)またこのとき上の性質をもつ C° のうち最大のものを N の双対伝播錐と呼ぶ。

さて，N が余次元1，すなわち代数的超曲面のときには定義8の性質をもつ最大の開錐は凸であることが知られている。(例えば Atiyah-Bott-Gårding [7] 参照)。ところが N の余次元が1より大きいと，凸になるとは限らない。例えば $N=\{\zeta\in\mathbb{C}^3;\ \zeta_1^2+\zeta_2^2-\zeta_3^2=0,\ \zeta_1=0\}$ のときには $C^\circ=\{\eta\in\mathbb{R}^3;\ \eta_1\neq0$ 又は $\eta_2^2\neq\eta_3^2\}$ となる。このような場合の双曲性及び伝播錐の意義については筆者は良く知らない。しかし幸いなことに M が何であっても $N(\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}))$ は純1余次元の多様体であることが知られている。(例えば Palamodov [6]．第VIII章)。故に $N=N(\mathrm{Ext}^1(M,\mathcal{P}))$

に対する双対伝播錐は凸である。その双対錐を C と書こう。条件(15)は $N(Ext^1(M,\mathfrak{P}))$ のみに依存し，この *imbedded prime* 等の精密な構造には関係していないので，C を用いて条件(15)を次の形に書き直すことは[3] *Lemma* 1.6 における初等的議論の全くの引き写しでよい。

<u>系9.</u> $\mathcal{B}_p(V\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(V)}=0$ なるためには代数多様体 $N(Ext^1(M,\mathfrak{P}))$ が双曲型であり，かつその双対伝播錐の双対錐を C とするとき，K の任意の点 a に対し

$$a+C\cap\{x_n<0\}\subset K$$

なる幾何的条件が成り立つことが必要且つ十分である。

References

[1] Kaneko,A., On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets II, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo,Sec.1A,18(1972),415-433.

[2] ———, Theorems on the extension of solutions, Sûri-kaiseki-kenkyûsho Kôkyûroku,162(1972),21-36.

[3] ———, On continuation of regular solutions of partial differential equations with constant coefficients, to appear in J.Math.Soc.Japan.

[4] Komatsu,H., Resolutions by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant co-efficients, Math.Annalen,176(1968),77-86.

[5] ———, Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations, Séminaire Lions-Schwartz,1966/7; reprinted in Proc.Symp.on Algebraic Geometry with application to Hyperfunction theory at Katata,1969.

[6] Palamodov,V.P., Teisû-keisû-senkei-bibun-sayôso, Moskva, 1967.

[7] Atiyah,M.F.-Bott,R.-Garding,L., Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math.24(1970),109-189.

//