数理解析研究所講究録
第 193 巻 1973 年 129-130

平均値定理について

名大. 中井 喜信

И.М. Виноградов の平均値定理(例えば. K. Chandrasekharan "Arithmetical Functions", Springer, die Grundlehren der mathe. Wissen. in Einzeldarstellungen Bd 167 の第4章)

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 d\beta_1\cdots d\beta_k \left|\sum_{X_0<x\leq X_0+N} e\left(\sum_{t=1}^{k}\beta_t x^t\right)\right|^{2l} \ll_{(k,l)} N^{2l-\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)^j}$$

但し　$l \geqq \frac{1}{4}k(k+1)+jk$

の類似として. 次に述べる事が成立します。

今　$k\geqq 2$　なる整数を固定し. N, l は自然数とします。記号 (r,s) は $r+s\leq k$, $r\geq 0$, $s\geq 1$ なる範囲を動く事にします. 又 μ, ν はいずれも $\geqq k$ なる整数とし. X_0, Y_0 は任意の整数とします. 又 $d\alpha$ は $\prod_{(r,s)} d\alpha_{rs}$ の意味にとります。この時

ここでは $e(\alpha) \underset{\text{def}}{=} e^{2\pi i\alpha}$ とします.

$$J_k\begin{pmatrix} q & \mu \\ N & \nu \end{pmatrix} \overline{\overline{\text{df.}}} \int\cdots\int_0^1 d\alpha \left(\sum_{Y_0 < y \leq Y_0 + N} \left| \sum_{X_0 < x \leq X_0 + q} e\left(\sum_{(r,s)} \alpha_{rs} y^r x^s \right) \right|^{2\mu} \right)^{\nu}$$

とおきます。

[Lemma]　$\mu \geqq k \geqq 2$, $\nu \geqq \max\left(k + \sum_{(r,s)} (\lambda r + \lambda' s),\ k^2\right)$ $l = \max_{(r,s)} (\lambda r + \lambda' s)$,（λ と λ' とは固定された自然数），及び $N \geqq p^{\lambda}$, $q \geqq \max(p^k, p^l)$, p は素数で $> k$.

以上の仮定のもとに

$$J_k\begin{pmatrix} q & \mu \\ N & \nu \end{pmatrix} \leqq 4^{\nu} \cdot \nu^{k+1} \cdot \left(\mu^{2k^3} + k^{\nu(2\mu-1)}\right) \cdot \left(N_1 q_1^{2\mu}\right)^k \cdot p^{\nu(\lambda + 2\mu\lambda') - \sum_{(r,s)} (\lambda r + \lambda' s)} \times J_k\begin{pmatrix} q_1 & \mu \\ N_1 & \nu - k \end{pmatrix}$$

が成立する。但しここに $q_1 = \left[\frac{q}{p^{\lambda'}}\right] + 1$, $N_1 = \left[\frac{N}{p^{\lambda}}\right] + 1$.

[定理]　$k \geqq 2$, $\mu \geqq k$, $\nu \geqq k \cdot (j+2) + \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$, $q \geqq (2(k+1))^{k \cdot (1 - \frac{1}{k})^{-j}}$, j は整数で $\geqq 0$, とすると

$$J_k\begin{pmatrix} q & \mu \\ q & \nu \end{pmatrix} \leqq \left\{ \nu^{2k^2} \left(4^{1 + 3\log 2 \cdot \frac{2\mu+1}{k}} \mu\right)^{\nu} \right\}^{(2\mu+1)(j+1)} \times q^{\nu(1+2\mu) - \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j+1}}$$

が成立する。

ここで $\mu \cdot \nu \gg k^4$ なる条件は必要です。証明は引用した Chandrasekharan の本の類似を行えば、得られます。