数理解析研究所講究録
第 195 巻 1973 年 35-40

化学反応に関して

―アブストラクト―

東大 理　小西芳雄

§1. 序. 次のような連立偏微分方程式を考えよう:

$$(1) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = AU + F(U).$$

ここに

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad u_i = u_i(t, x), \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \ t > 0,$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, \cdots, u_n) \\ \vdots \\ f_n(u_1, \cdots, u_n) \end{pmatrix}$$

また

$$AU = \begin{pmatrix} \mathrm{div}(D_1 \,\mathrm{grad}\, u_1) \\ \vdots \\ \mathrm{div}(D_n \,\mathrm{grad}\, u_n) \end{pmatrix}$$

D_i : 拡散係数 $\geqq 0$. (1)に対する初期値(境界値混合)

問題の例が，生態学，化学反応論，物性論などに多く現われてくる（山口 [3]，138頁参照）．

筆者は次の二点に興味を持った：

(i) 境界条件に非線型性が現われうる点；

(ii) 拡散係数 D_i が濃度 u_i に依存しうる点．

§2．一般的方針． (i)，(ii) 各々の場合，A，F に然るべき定義域を持たせ，ある函数空間 X の非線型作用素 $\mathbb{A}$，$\mathbb{F}$ を定める．すると (1) は Banach 空間での抽象的な非線型常微分方程式

(1)′ $$\frac{dU(t)}{dt} = \mathbb{A}U(t) + \mathbb{F}U(t) \qquad t>0$$

と思えて，初期条件

(3) $$U(0) = U_0 \quad (\in D(\mathbb{A}) \cap D(\mathbb{F}))$$

の下で解くことになる．「非線型半群の理論」を使い，非線型作用素 $\mathbb{A}+\mathbb{F}$ の指数函数 $\{e^{t(\mathbb{A}+\mathbb{F})}\}_{t\geq 0}$ を構成し

$$U(t) = e^{t(\mathbb{A}+\mathbb{F})}U_0$$

とおけばよいことになる．

もう少し具体的に述べよう：(1)′，(3) を抽象的な

陰的な差分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{U_\varepsilon(t)-U_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \mathbb{A}U_\varepsilon(t)+\mathbb{F}U_\varepsilon(t) & t \geqq \varepsilon \\ U_\varepsilon(t)=U_0 & \varepsilon > t \qquad (\varepsilon > 0) \end{cases}$$

でおきかえれば，比較的容易に$U_\varepsilon(t)$が求まる場合が多かろう．つまり

(α) $R(I-\varepsilon\mathbb{A}-\varepsilon\mathbb{F}) \supset D(\mathbb{A}) \cap D(\mathbb{F})$

をためし

$$U_\varepsilon(t)=(I-\varepsilon\mathbb{A}-\varepsilon\mathbb{F})^{-[t/\varepsilon]}U_0$$

とおく．$(I-\varepsilon\mathbb{A}-\varepsilon\mathbb{F})^{-1}$が意味をもち，$U_\varepsilon(t)$が求める$U(t)$に$[0,\infty)$で広義一様収束するためには

(β) $\mathbb{A}$の消散性

と

(γ) 差分解$U_\varepsilon(t)$に対する先験的評価(安定性)

が重要である．$\mathbb{F}$は多くの場合$U_\varepsilon(t)$の「大きさ」に依存するLipschitz定数をもつ作用素であるから．

$\mathbb{A}$は非線型とはいえ，Laplacianの抽象的性質の重要なものは備えているであろうから(α),(β),(γ)の験証は困難でないのである．しかし線型の場合の如くやたらに加えたり引いたり出来ないため，(γ)に際し多少

やっかいな点があることを付記しておく.

§3. 具体例. 三村[2]で扱われた抗原抗体反応の方程式を有界な容器内で考え, (i)及び(ii)の方向の研究をしてみた. 詳細は小西[1]にゆずる.

[1] Y. Konishi: Sur un système dégénéré des équations paraboliques semi-linéaires avec les conditions aux limites non linéaires. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, 19 (1972), 353-361.

[2] M. Mimura: On the Cauchy problem for a simple degenerate diffusoin system. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 5 (1969), 11-20.

[3] 山口昌哉：非線型現象の数学. 朝倉書店.

附 録

以上連立方程式を考えてきたが, (解の存在, 一意性, 正則性のみを考察する限り) 結局はFのない単独の場合に帰着されてしまうことがわかった. 単独の場合に結果を出しておけばよいことになる.

§4. $u_t = \mathrm{div}(D(u)\,\mathrm{grad}\,u)$ について. これは

$$\varphi(u) = \int_0^u D(r)\,dr$$

とおけば

$$u_t = \Delta\varphi(u)$$

とかける．$\Delta\varphi(\cdot)$ は然るべき定義域をもたせれば L^1 で dissipative．「Crandall-Liggett の定理」を考慮に入れると，

$$(4) \qquad u - \lambda\Delta\varphi(u) = f \qquad \lambda > 0$$

なる楕円型方程式に問題が帰着されよう．有界領域の場合にこのようなことをやってみた：

[4] Y.Konishi: On the nonlinear semi-groups associated with $u_t = \Delta\beta(u)$ and $\varphi(u_t) = \Delta u$ (J. Math. Soc. Japan に投稿).

§5. 非有界領域での(4). 同じことを一般の領域でやろうとすると困難にぶつかる．(4)が解きにくいから．$\varphi(u) = v$ なる変換をしてみると(4)は

$$(4)' \qquad \varphi^{-1}(v) - \lambda\Delta v = f$$

なる「半線型 Poisson 方程式」となる．(4)′が解きにくいわけは

$$-\lambda\Delta v = f$$

が解けないためである．但し 1:1 はでる．この辺の様子を作用素論的に調べてみた：

[5] Y.Konishi:Note on potential operators on L^p (Proc. Japan Acad. に発表予定).

次の論文の定理1.5に示唆された:

[6] T.Watanabe: Some recent results on processes with stationary independent increments. Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory,Kyoto, 2, 93-110 (1972).