数理解析研究所講究録
第195巻 1973年 52-60



# Propagation of Chaos について.

静大 教養　　田中 茂

## §1. 序

M. Kac は Boltzmann の方程式が，多粒子の衝突過程の運動方程式であることを示すために，Propagation of Chaos の概念を提起し [1]，これを H. P. McKean が確率過程と結びつけて，種々の半線型微分方程式の問題に適用した [2]，[3]。

この Propagation of Chaos を，Kac の1次元モデルの場合について説明し，他の種々の場合について，簡単にのべたい。くわしい証明をつけるとくどくなるので，ここでは考え方の説明に重点をおき，形式的な計算だけにとどめた。くわしい証明などは，上記 McKean の論文 [2]，[3] および H. Tanaka [4]，T. Ueno [5]，[6]，[7] 等を参照されたい。

## §2. Kacの1次元モデル

$R^1$上の確率分布の密度関数全体を $\mathcal{P}_1$ とし、この $\mathcal{P}_1$ の上で、次の半線型微分方程式を考える。

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{R^1}\{u(t,x^*)u(t,y^*) \\ \qquad\qquad\qquad - u(t,x)u(t,y)\}dy\,d\theta \\ u(0,x) = f(x), \end{cases}$$

ここで、$x^* = x\cos\theta - y\sin\theta$, $y^* = x\sin\theta + y\cos\theta$, また(1)の微分方程式の右辺を $B[u(t)](x)$ で表わす。

(1)において、$x$を粒子の速度，$u(t,x)$ を時刻$t$における速度$x$をもった粒子の分布の密度関数と考えれば、これはBoltzmann方程式の1次元モデルと考えられる。このモデルでは，速度が$x$と$y$の粒子が衝突したのちには，$\theta$を一様分布でえらんで、$x\cos\theta - y\sin\theta$ と $x\sin\theta + y\cos\theta$ の速度に変る。この衝突では，エネルギーは保存されるが運動量は保存されない。

(1)の解はWildの和で一意的に求められる[3]が、それを $u(t,x) = T_t f(x)$ とおくと $T_t$ は $\mathcal{P}_1$ 上の非線型な半群である。分枝過程の時と同様に、この $T_t$ を線型化することをまず考えよう。

## §3.　$T_t$ の線型化

$C_n$ を $R^n$ 上の有界可測関数全体とし，$C_\infty$ を $R^\infty$ 上の関数で，$\{C_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ の関数の適当に収束する和に表わされるもの全体とする。$C_\infty$ の二元 $\varphi, \psi$ に対し，

$$(2)\qquad \langle f^\infty, \varphi \rangle = \langle f^\infty, \psi \rangle, \qquad {}^\forall f \in \mathcal{P}_1$$

が成り立つとき，$\varphi$ と $\psi$ とを同一視しておく。ここで，$\langle\ ,\ \rangle$ は，それぞれの適当な空間での積分の意味である。

$\varphi \in C_n$ に対し，$D\varphi \in C_{n+1}$ を次の様に定義する。

$$(3)\qquad D\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \varphi(x_k^*) - \varphi(x_1, \cdots, x_n) \} d\theta$$

（$x_k^*$ は，$(x_1, \cdots, x_n)$ の第 $k$ 座標を $x_k \cos\theta - x_{n+1} \sin\theta$ でおきかえたものとする。）　この $D$ を $C_\infty$ に拡張しておく。この $D$ は，$\varphi \in C_1$ に対し，

$$(4)\qquad \langle B[f], \varphi \rangle = \langle f^2, D\varphi \rangle$$

をみたすことは容易にわかる。

$D$ を生成作用素とする $C_\infty$ 上の線型微分方程式

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = Dv(t) \\ v(0) = \varphi \end{cases}$$

の解を $v(t)=H_t\varphi$ とおくと，$H_t$ は $C_\infty$ 上の線型半群である。(1) の解 $u(t)$ と $\varphi\in C_1$ に対し，形式的に，

(6) $$\frac{d}{dt}\langle u(t),\varphi\rangle=\langle B[u(t)],\varphi\rangle=\langle u(t)^2, D\varphi\rangle$$

が言え，これをくり返すことにより，

(7) $$\frac{d^n}{dt^n}\langle u(t),\varphi\rangle=\langle u(t)^{n+1}, D^n\varphi\rangle=\langle u(t)^\infty, D^n\varphi\rangle$$

が言えるから，Taylor 展開をすれば，

(8) $$\langle T_tf,\varphi\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\langle f^\infty, D^n\varphi\rangle=\langle f^\infty, H_t\varphi\rangle$$

となり，この意味で $H_t$ は $T_t$ の線型化であるといえる。

さらに，$\varphi\in C_n$，$\psi\in C_m$ に対し，$\varphi\otimes\psi\in C_{n+m}$ を

(9) $$\varphi\otimes\psi(x_1,\cdots,x_{n+m})=\varphi(x_1,\cdots,x_n)\psi(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})$$

で定義し，この $\otimes$ を $C_\infty$ に拡張して定義すると，$D$ は $C_\infty$ で derivation の性質

(10) $$D(\varphi\otimes\psi)=(D\varphi)\otimes\psi+\varphi\otimes(D\psi)$$

をもつので，$H_t$ は，

(11) $$H_t(\varphi\otimes\psi)=(H_t\varphi)\otimes(H_t\psi)$$

をみたす。これを Collision property とよび，$H_t$ を

Collision 半群とよんでいる。この性質を用いれば，$\varphi\in C_m$ に対し，次の式も示せる。

(12) $$\langle (T_t f)^m, \varphi\rangle = \langle f^\infty, H_t\varphi\rangle$$

## §4. Propagation of Chaos

$\varphi\in C_n$ に対し，$D_n\varphi\in C_n$ を次の様に定義する。

(13) $$D_n\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\varphi(x_{ij}^*)-\varphi(x_1,\cdots,x_n)\}d\theta$$

($x_{ij}^*$ は $(x_1,\cdots,x_n)$ の第 $i$ 座標を $x_i\cos\theta-x_j\sin\theta$ に，第 $j$ 座標を $x_i\sin\theta+x_j\cos\theta$ におき変えたものとする。) この $D_n$ は，(1) と同様の衝突をしながら運動する $n$ 個の粒子系の生成作用素と考えられる。

任意の $\varphi\in C_m$ と $f\in\mathcal{P}_1$ とに対し，

(14) $$\lim_{n\to\infty}\langle f^n, D_n\varphi\rangle=\langle f^\infty, D\varphi\rangle$$

が成り立つから，$D_n$ を生成作用素とする半群を $H_{n,t}$ とすると，

(15) $$\lim_{n\to\infty}\langle f^n, H_{n,t}\varphi\rangle=\langle f^\infty, H_t\varphi\rangle$$

がいえる。$H_{n,t}$ が自己同型であることが容易に示せるので，

(12) と (15) を組み合せると、任意の $\varphi \in C_m$ と $f \in \mathcal{B}_1$ で、

$$\text{(16)} \qquad \lim_{n\to\infty} \langle H_{n,t} f^n, \varphi \rangle = \langle (T_t f)^m, \varphi \rangle$$

がいえる。これは，$n$ 粒子の衝突運動の方程式

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\,U_n(t)}{dt} = D_n U_n(t) \\ U_n(0) = f^n \end{cases}$$

の解 $H_{n,t} f^n$ は，粒子の数を大きくすれば，(1) の解を独立に多数集めたものに近づくことを示している。このことを，Propagation of Chaos という。

## §5. 確率過程の近似

McKean は Propagation of Chaos を，確率過程の近似の問題に精密化している。この概略を以下にのべる。

(1) の解を $u^f(t,x)$ とおいたとき，微分方程式

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p^f(t,x,y)}{\partial t} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{R^1} \Big\{ p^f(t,x,y\cos\theta - z\sin\theta)\times \\ \qquad \times u^f(t, y\sin\theta + z\cos\theta) - p^f(t,x,y) \Big\}\, dz\, d\theta \\ p^f(0,x,y) = \delta_0(x-y) \end{cases}$$

の解 $p^f(t,x,y)$ は，次の性質

$$\int_{R^1} f(x)\, P^f(t,x,y)\, dx = u^f(t,y) \tag{19}$$

$$\int_{R^1} P^f(t,x,y)\, P^{u^f_t}(s,y,z)\, dy = P^f(t+s,x,z) \tag{20}$$

をみたすことが示せる。この $P^f(t,x,y)$ を遷移確率とする広い意味のマルコフ過程（出発点 $x$ のみでなく，出発時の分布 $f$ にも依存する確率過程）が考えられるが，これを (1) に対応する確率過程と考え，$\{P^f_x, X_t\}$ と書くことにする。このとき，$D_n$ を生成作用素とする $R^n$ 上のマルコフ過程を $\{P^{(n)}_{\underline{x}}, \underline{X}^{(n)}_t\}$ とおけば，任意の $A = A_1\times\cdots\times A_m \in R^m$ に対して，

$$\int\cdots\int_{R^{n-m}} P^{(n)}_{(x_1,\cdots,x_n)}(\underline{X}^{(n)}_t \in A\times R^{n-m})\, f(x_{m+1})\cdots f(x_n)\, dx_{m+1}\cdots dx_n \tag{21}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \prod_{k=1}^{m} P^f_{x_k}(X_t \in A_k)$$

が成り立つことを証明できる。この意味で Propagation of Chaos が確率論的にとらえられる。

## §6. その他の場合

McKean は，3次元 Maxwell ガスで cut-off のある場合や，Burger 方程式の離散モデルの場合などにも，全

く同様の議論で Propagation of Chaos が成り立つことを[3]に示している。また、次の非線型微分方程式

$$
(22) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{R^1} C(x,y)u(t,x)u(t,y)\,dy \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}
$$

の場合にも，$\varphi \in C_n$ に対し，

$$
(23) \quad \begin{aligned} D\varphi(x_1,\cdots,x_{n+1}) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}(x_1,\cdots,x_n) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} C(x_k,x_{n+1})\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_1,\cdots,x_n) \end{aligned}
$$

とおくことにより，Propagation of Chaos の成り立つことを[2]で示している。

また，3個以上の粒子の間に衝突がある場合については，H. Tanaka [4]，T. Ueno [5]，[6]，[7] がくわしく取り扱っている。

## 参考文献

[1] M. Kac: *Probability and Related Topics in the Physical Sciences.* New York (1959)

[2] H. P. McKean: *A class of Markov processes*

associated with non-linear parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. 56, (1966)

[3] ——— : An exponential formula for solving Boltzmann equation for a Maxwell-ian gas. J. Combinatorial Th. 2, (1967)

[4] H. Tanaka : Propagation of chaos for certain Markov processes of jump type with non-linear generators. Proc. Japan Acad. 45, (1969)

[5] T. Ueno : A class of Markov processes with bounded non-linear generators. Japanese J. Math. 4, (1969)

[6] ——— : A class of purely discontinuous Markov processes with interactions. I, II. Proc. Japan Acad. 45 (1969)

[7] ——— : A class of Markov processes with interactions. I, II. Proc. Japan Acad. 45 (1969)