数理解析研究所講究録
第196巻 1973年 1-9

解析的な第一積分

東大 理　高野恭一

この講演の目的は、非線型（解析的）常微分方程式の大域的性質についての、W. Kaplanの研究の一部（[4], [5]）を紹介することである。

§1. 序.

考える方程式は

(1) $$\frac{dw}{dz} = f(z, w)$$

で、zはcomplex variable, w, fはcomplex n-vectors, $f(z,w)$はentireあるいはmeromorphicとしておく。

よく知られているように、Bruns([2],[8])は3体問題において、6個の重心積分，3個の角運動量積分，1個のエネルギー積分以外には、代数的な積分が存在しないこと、またPoincaré([6], [8])，Siegel([7])は制限3体問題において、Jacobiの積分以外には、<u>一価</u>正則な、あるいは代数的な積分が存在しないことをそれぞれ証明している。（解の存在定

理と一意性定理より、local に積分が存在するのは、自明で、ここで問題にしているのは、global な積分である。）

Bruns, Poincaré, Siegel の結果は、一般の多価正則な積分の存在を排除している訳ではない。Kaplan は、積分の定義を拡げて、その存在を考察している。Kaplan のいう積分とは『$\mathbb{C}^{n+1}$ 上で、measure 0 なる点を除いたところで定義され、そこで多価正則な定数でない関数で、解の上で定数となるもの』である。

積分の存在を示すためには、初期条件 (z^0, w^0) なる (1) の解 $w = g(z; z^0, w^0)$ がどこまで解析接続できるか、考察する必要がある。そこで、次の定義をあらかじめしておく。

$$\mathcal{E}(z^0) \equiv \bigcup_{w^0 \in \mathbb{C}^n} \{ (z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \, ; \, w = g(z; z^0, w^0) \}$$

としたとき、

Def. ほとんどすべての z^0 に対して、$\mu(\mathbb{C}^{n+1} - \mathcal{E}(z_0)) = 0$ (μ: Lebesgue measure) なるとき、(1) は Property A をもつという。

以下、$n = 1$ の場合と $n \geq 2$ の場合と、別々に扱うが、使う道具は、Painlevé の定理、unit disk 上での bounded type な meromorphic function に関する諸定理、Fubini の定理などである。

§2. $n=1$ の場合

<u>Th.1</u> <u>$f(z,w)$ を entire とすると、(1)の任意の解、$w=g(z;z^0,w^0)$ は、measure 0 の $E(\subset \mathbb{C})$ を除いて $\mathbb{C}$ 上解析接続できる。</u>

(証明概略)。$w=g(z;z^0,w^0)$ をあらゆる道にそって可能なかぎり解析接続してえられる open Riemann 面を $\mathcal{R}$ とし、$\mathcal{R}$ の universal covering surface を $\mathcal{R}^*$ とし、$\mathcal{R}^*$ を

$$z=\varphi^*(\zeta),\quad w=\psi^*(\zeta)\quad,\quad |\zeta|<\rho,\quad (\rho=1 \text{ or } \infty)$$

とあらわす。

E の capacity が positive として矛盾を導く。まず $\rho=1$, φ^*: bounded type であることがわかる。よって、φ^* は $|\zeta|=1$ 上の measure zero の点を除いて、nontangential な道にそって近づいたとき、finite limit をもつ。この道にそって ζ を境界に近づけたとき、Painlevé の定理から $\psi^*(\zeta)\to\infty$ i.e. $\frac{1}{\psi^*(\zeta)}\to 0$. Meier の定理を用いると、ほとんどすべての θ に対して、$\frac{1}{\psi^*(\zeta)}$ (従って $\psi^*(\zeta)$) は任意の Stolz 領域 $S(\theta)$ 内で 0 を除いた(従って ∞ を除いた)あらゆる値を無限回とる。再び Painlevé の定理を用いると、矛盾 (Q.E.D.)

Th. 1 と Fubini の定理を用いると、ただちに、

<u>Th.2</u> <u>$f(z,w)$ を entire とすれば、(1)は Property A をもつ</u>

Th.2 より、ある z^0 を適当にとると、$\mu(\mathbb{C}^2 - \mathcal{E}(z^0)) = 0$ であるから、ほとんどすべての (z, w) に対して、z^0 と z を結ぶ道 $\gamma(z, w, z^0)$ とある値 w^0 が存在して、$g(z; z^0, w^0)$ は $\gamma(z, w, z^0)$ にそって (z, w) まで接続可能。(z, w) に対して、この w^0 を対応させる関数を $\varphi(z, w)$ とおけば $\varphi(z, w)$ は明らかに Kaplan の def. による積分である。
よって、

<u>Th.3</u> <u>$f(z, w)$ を entire とすれば (1) は積分をもつ。</u>

§3. $n=1$ と $n \geqq 2$ の相違、Iversen property など。

$n = 1$ の場合、既に示したように、Property A をもつが、M. Jurchescu ([3]) は、$f(z, w)$ が meromorphic であっても (1) は Iversen property をもつことを示した。Iversen property とは

「(1) の任意の解 $g(z; z^0, w^0)$ は、z^0 から出発する道 γ を任意にとったとき、γ にいくらでも近い道にそって解析接続できる」

ことである。

この節では、Bieberbach-Fatou の写像を用いて、$n \geqq 2$ の場合に、Property A も、Iversen property ももたない例を示

す。Bieberbach-Fatou の写像とは、$\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ の中への bi-holomorphic な写像で、その像写像 I が外点をもつものである。([1])。この写像を次のようにかく。

$$\phi_1(w_1, w_2) = z_1 \qquad \left(f_1(z_1, z_2) = w_1 \right.$$
$$\phi_2(w_1, w_2) = z_2 \qquad \left. f_2(z_1, z_2) = w_2 \right)$$

$(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2, \quad (z_1, z_2) \in I.$

z_2 を fix すると、

$$\frac{dw_k}{dz_1} = \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(\phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \qquad k=1, 2$$

であるから、

$$F_k(w_1, w_2) \equiv \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(\phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \quad k=1, 2$$

とおくと、F_k は entire である。そこで

$$(2) \qquad \frac{dw_k}{dz_1} = F_k(w_1, w_2) \qquad k=1, 2$$

なる方程式を考える。$\mathbb{C}^2 - I \supset U$ nonempty, open をとり、$V \equiv \{(z_1, w_1, w_2) ; (z_1^0 - z_1 + \phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \in U\}$ とすると、V は $\mathbb{C}^3$ の中の nonempty open set でかつ

$$\mathcal{E}(z_1^0) \cap V = \phi .$$

であることがたしかめられる。i.e. 方程式(2)に対しては、

「$\underline{\forall z_1^0 \text{ に対して、} \mu(\mathbb{C}^3 - \mathcal{E}(z_1^0)) > 0}$」

これより明らかに、(2)に対しては、Property A も Iversen Property も成立しない。

§4. $n \geqq 2$の場合の結果.

<u>Th.4</u> <u>$f(z, w)$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ で meromorphic とする。ほとんどすべての (z^0, w^0) に対して、(1)の解 $w = g(z; z^0, w^0)$ は、ほとんどすべての z へ解析接続できるとする。であるとすると、(1)は n コの独立な積分 $\varphi_k(z, w)$ $k=1, \cdots, n$ をもつ。</u>

(証明). Fubini の定理より、ほとんどすべての z^0 に対して、$\mu(\mathbb{C}^{n+1} - \mathcal{E}(z^0)) = 0$. あとは Th.3 と同様. (Q.E.D.)

次に、autonomous system

$$(3) \qquad \frac{dw}{dz} = f(w)$$

を考える。$f(w)$ は $\mathbb{C}^n$ 上で analytic とする。次の Lemma は、かんたんに証明できる。

<u>Lemma.</u> <u>$\mathbb{C}$ 上の道 : $z = z(t)$, $0 \leq t < 1$ をとる。初期値 (z^0, w^0) $(z^0 = z(0),\ w^0 = w(z(0)))$, なる解を $w(z(t))$ としたとき、$t \to 1_{-1}$ のとき $w(z(t))$ が finite limit w^1 をもつとする。もし $z(t)$ が $t \to 1_{-1}$ のとき finite limit をもたなければ w^1 は f の zero 点である.</u>

Th.4 と上の Lemma を用いると、次の定理を得る.

<u>Th.5</u> <u>$f(w)$ は entire で、かつその zero 点は高々可算個とすると、(3) は $n-1$ 個の積分 $\varphi_k(w)$, $k=1, \cdots, n-1$ をもつ。</u>

（証明概略）. 今 $w=g(z;z^0,w^0)$ （$f(w^0)\neq 0$） に対して、Riemann 面 $\mathcal{R}$, その上の universal covering surface $\mathcal{R}^*$ がきまる。$\mathcal{R}^*$ は次のように表わせる.

$$z=\varphi^*(\zeta),\quad w=\psi^*(\zeta)\ ,\quad |\zeta|<\rho,\ \rho=1,\ \infty\ .$$

少なくとも 1 つの $\psi_k^*(\zeta)$ は、ほとんどすべての値をとることを示す。

(i) $\rho=1$ の場合、

少なくとも 1 つの $\psi_k^*(\zeta)$ は unbounded type であることを示せば十分。すべての $\psi_k^*(\zeta)$ が bounded type とすると、ほとんどすべての $|\zeta|=1$ に対して、$\psi^*(\zeta)$ は、finite radial limit をもつ。また、$\psi^*(\zeta)$ は non-constant で、$f(w)$ の zero 点は countable であるから、ほとんどすべての $|\zeta|=1$ に対して、$\psi^*(\zeta)$ は、$f(w)$ の zero 点でない finite radial limit をもつ。このような、$\zeta=e^{i\theta}$ に対して、$\varphi^*(\zeta)$ は、finite radial limit をもたない。（Painlevé の定理より。）.
よって. Lemma より. $\psi^*(\zeta)$ の limit は $f(w)$ の zero 点でなければならない。これは矛盾。

(ii) $\rho=\infty$ のときは、Picard の定理から明らか。

上の k を n としてよい。そこで

$$\text{(4)}\qquad \frac{dw_k}{dw_n}=\frac{f_k(w)}{f_n(w)}\qquad k=1,\ \cdots\ (n-1)\ ,$$

を考えると、今示したことにより、ほとんどすべての w^0（

$f(w^0) \neq 0$ でよい）に対して、(4)の解はほとんどすべての w_n に解析接続できる。従って Th.4 より本定理が云われる.(Q.E.D.)

autonomous system に関する Th.5 より non-autonomous system (1) に関する次の定理がでる.

<u>Th.6. $f(z, w)$ を entire とすれば、(1)は n 個の独立な積分 $\varphi_k(z, w)$, $k=1, \ldots n$ をもつ。</u>

(証明.) $z = w_{n+1}$ とおけば、(1)と同値な autonomous system

$$\frac{dw_k}{dz} = f_k(w_{n+1}, w_1, \ldots\ldots w_n), \ k=1, \cdots, n, \quad \frac{dw_{n+1}}{dz} = 1$$

が云われ、$(f_1, \cdots f_n, 1)$ の zero点はない。(Q.E.D.)

(3), (1) の右辺が $f(w)/g(w)$, $f(z, w)/g(z, w)$ の場合にも、($g(w)$, $g(z, w)$ は scalar 関数)、f, g が entire $g \neq 0$,かつ $f(w)$ あるいは $(f(z, w), g(z, w))$ の zero点の個数が高々可算個ならば、Th.5, Th.6 は正しいが、証明は省略する。

文献.

[1] Bochner & Martin, Several complex variables, p.45 – p.48, Princeton.

[2] Bruns, Acta Math. 11 p.25

[3]. M. Iurchescu, Aspura funcţiilor analitice definite prin ecuaţii diferenţiale nealgebrice, Bul. Şti. Secţ. Şti. Mat. Fiz. 7 (1955), 347–354.

[4] W. Kaplan, Analytic ordinary differential equations in the large, Proceedings of United States - Japan Seminar on Differential and Functional Equations, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967, 133–151.

[5] W. Kaplan, Analytic first integrals of ordinary differential equations, Comment. Math. Helv. 47 (1972), 205–212.

[6] Poincaré, Acta Math. 13 p.259 ~

[7] C.L. Siegel, Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems, Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936) 225–233.

[8] E.T. Whittaker, Analytical Dynamics, Cambridge Univ. Press.