数理解析研究所講究録
第 196 巻 1973 年 24-35

Laurricellaの超幾何級数 F_D より生ずる Riemann の問題と保型函数

京大 理 寺田俊明

超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ を Riemann が新しい観点から研究したのが Riemann-Hilbert の問題の発端であることはよく知られている。1857年に彼は，0，1，∞ で適当に与えられた分岐の様式を持ち，一次独立な分枝を二つだけ持つ函数は超幾何微分方程式をみたすことを示した．1873年に Schwarz は，α,β,γ が適当な値のとき，超幾何微分方程式の解 $\omega_1(x)$，$\omega_2(x)$ で，ω_1/ω_2 の逆函数が単位円内の保型函数となるものがあることを見付けた．それは F が代数函数となる為の条件を研究中のことであった．次いで Picard はそれ等を二変数に拡張した．Osgood 空間 $(P^1)^2$ の函数であって，各 $x=0$, $x=1$, $x=\infty$, $x=y$, $y=0$, $y=1$, $y=\infty$ で適当に与えられた分岐の様式を持ち，三つの一次独立な分枝を持つものは，Appell の微分方程式をみたし，従って Appell の超幾何級数 $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$ と一致する．ま

たこの方程式の三つの一次独立な解 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は自然に，考えている領域の普遍被覆空間から $\mathbb{P}^2$ への写像を与えるが，$\alpha, \beta, \beta', \gamma$ が適当な値のとき，その逆写像は一価となり，（一次変換をしておけば）超球内の保型函数を定める．

上述のことは具体的な函数を作る方法を与えている点で興味深い．多変数函数論の現状を見ると，一般論は大体終って現在は各論，特に函数そのものの研究が大切なときである．よって Picard の仕事を整理，修正し多変数に拡張することを当面の目標とする．

今迄に得られた結果は次の通りである．

I．$S_{ij} = \{(x);\ x_i = x_j\}$ $(i, j = 0, 1, \cdots, n+1, \infty;\ x_0 \equiv 0,\ x_{n+1} \equiv 1,\ x_\infty \equiv \infty)$ を n 次元 Osgood 空間 $(P^1)^n$（変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$）の固有面，$D = (P^1)^n - \bigcup_{0 \leq i < j \leq \infty} S_{ij}$ をその領域，$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}, \lambda_\infty$ を整数でない定数で，$\lambda_\infty + \sum_{0 \leq \alpha \leq n+1} \lambda_\alpha = n+1$ をみたすものとする．Dで多価正則で次の条件をみたす函数 $F(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1};\ x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を考える．

1° F の $n+2$ 個の分枝は一次従属である．

2° F には $n+1$ 個の一次独立な分枝がある．

3° 各 $\mathring{S}_{ij}$ $(= \{(x);\ x_i = x_j \neq x_\alpha\ (\alpha \neq i, j)\})$ には適当な一点があり，その点の近傍での F の任意の函数要素は次の様な $n+1$ 個の函数の一次結合である．（Aa）$\lambda_i + \lambda_j \neq$ 整数，

$j\neq\infty$ のとき，$n+1$ 個の正則函数と $(x_i-x_j)^{\lambda_i+\lambda_j-1}\times$(正則函数)，(Aa) $\lambda_i+\lambda_j\neq$ 整数，$j=\infty$ のとき，n 個の $\left(\frac{1}{x_i}\right)^{1-\lambda_i}\times$(正則函数) と $\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\lambda_\infty}\times$(正則函数)，(Ba) $j\neq\infty$，$\lambda_i+\lambda_j-1=$ 非負整数のとき，$n-1$ 個の正則函数と $(x_i-x_j)^{\lambda_i+\lambda_j-1}\times$(正則函数) と $(x_i-x_j)^{\lambda_i+\lambda_j-1}\log(x_i-x_j)\times$(正則函数) $+$ (正則函数)，$j\neq\infty$ で $\lambda_i+\lambda_j-1=$ 負整数のとき，n 個の正則函数と $\log(x_i-x_j)\times$(正則函数) $+$ $(x_i-x_j)^{\lambda_i+\lambda_j-1}\times$(正則函数)，(Ba) $j=\infty$，$\lambda_i+\lambda_j=$ 整数のときは (Aa) と同様な修正をする．(つまり，$\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\lambda_i-1}F$ が (Ba) と同様の分岐構式を持つ)

するとこの函数は次の微分方程式をみたす．

$$
(*)^{1)}\begin{cases}
x_i(x_i-1)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}+\Big[x_i(x_i-1)\displaystyle\sum_{\substack{1\leq\alpha\leq n\\ \alpha\neq i}}\dfrac{1-\lambda_\alpha}{x_i-x_\alpha}+\lambda_0+\lambda_i-2\\
\quad+(4-\lambda_0-2\lambda_i-\lambda_{n+1})x_i\Big]\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+(\lambda_i-1)\displaystyle\sum_{\substack{1\leq\alpha\leq n\\ \alpha\neq i}}\dfrac{x_\alpha(x_\alpha-1)}{x_i-x_\alpha}\dfrac{\partial F}{\partial x_\alpha}\\
\quad+\lambda_\infty(1-\lambda_i)F=0\\
(x_i-x_j)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}+(\lambda_j-1)\dfrac{\partial F}{\partial x_i}-(\lambda_i-1)\dfrac{\partial F}{\partial x_j}=0 \qquad (i\neq j)
\end{cases}
$$

1893年 Lauricella は Appell の方法を真似ていくつかの超幾何級数を定義したが，同時に彼はその一つ

$$
F_D(\alpha,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\gamma;x_1,x_2,\cdots,x_n)
=\sum\frac{(\alpha,m_1+m_2+\cdots+m_n)}{(\gamma,m_1+m_2+\cdots+m_n)}\frac{(\beta_1,m_1)}{(1,m_1)}\frac{(\beta_2,m_2)}{(1,m_2)}\cdots\frac{(\beta_n,m_n)}{(1,m_n)}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}
$$

($(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$) が (＊) の原点での一つの解であり，さらに

$$F_D = \text{const.}\int_1^\infty \varphi(u,(x),(\alpha))\,du$$

$$\varphi(u,(x),(\alpha)) = \varphi(u) = u^{\lambda_0-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_n)^{\lambda_n-1}(u-1)^{\lambda_{n+1}-1}$$

なる積分表示をもつことを示した．但し $\alpha = \lambda_\infty$, $\beta_i = 1-\lambda_i$ $(1 \leq i \leq n)$, $\gamma = \lambda_{n+1}+\lambda_\infty$ である．

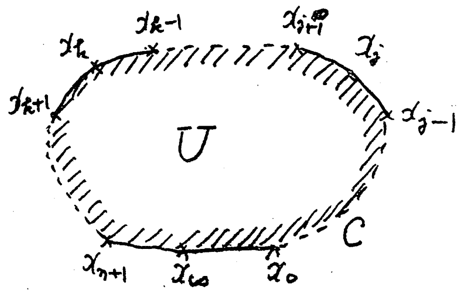
また

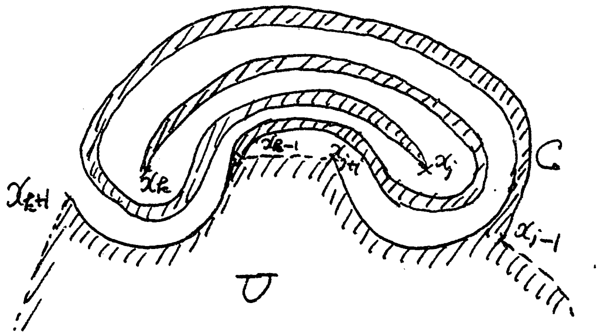
$$\omega_i = e^{2\pi\sqrt{-1}(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1})}\int_{x_0}^{x_i} \varphi(u)\,du$$

（正確な積分路は後で示す） とおくと，$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n+1}$ は D の普遍被覆空間 $\tilde{D}$ で一価正則で，(＊) の一次独立な解[2] であり，最初に与えられた条件をみたす．[2]

積分路 C_i を定義する前に，まず D の基本群 π_1 の生成元をもとめる． u－平面に $x_0^{(0)}(=0)$, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$, $x_{n+1}^{(0)}(=1)$ $x_\infty^{(0)}(=\infty)$ をとり，それ等をこの順に曲線で結んで Jordan 単純閉曲線 $C^{(0)}$ を作る。 $C^{(0)}$ の左側にある領域を $U^{(0)}$ とす． $u = \pi_{ij}^{(0)}(t)$ $(i=1,2,\cdots,n,\ j=2,3,\cdots,n+1,\infty,\ i<j,\ 0\leq t\leq 1)$ を $x_i^{(0)}$ から出発し，$U^{(0)}$ の外を通って $x_j^{(0)}$ まで進み $x_j^{(0)}$ を正の方向に一周して又 $U^{(0)}$ の外を通って $x_i^{(0)}$ に戻る曲線，π_{ij} を代表元が D 内の曲線：$x_\alpha = x_\alpha^{(0)}$ $(1\leq\alpha\leq n,\ \alpha\neq i)$, $x_i = \pi_{ij}^{(0)}(t)$ で与えられる道の類とすると，この π_{ij} $(1\leq i\leq n,$

$j=2,\cdots,n+1,\infty,\ i<j$）の全体が$D$の基本群の生成元であり，しかも$H_1(D,Z)$の基となる．次に$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$を$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$より出発して連続的に動かし，それにつれて$C^{(0)}, U^{(0)}$と同様にしてJordan単純閉曲線とそれの囲む領域の組(C,U)を(x)と共に連続的に変るように定める．この組(C,D)のホモトピー類全体に自然な位相を入れると，それと$\tilde{D}$とは自然な対応で位相同型となる．





例えば$\tilde{D}$の点Pが上左図に対応するとき$\pi_{jk}P$ $(j<k)$には上右図が対応する．この時積分路C_iは，Uの内部を通って$x_0(=0)$, x_i, x_0, x_iをそれぞれ一回ずつ正，正，負，負の方向に廻って元に戻る道である．なお$y(u)$の分枝は，U_0内でのを一つ決めておくと，すべての$((x),(u))$について自動的に決まる．

(*)を求める途中の結果として，最初に分岐様式を与えた時の"(正則函数)"はどれもS_{ij}上で恒等的に零でないことと

$$J(\omega)=\begin{vmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \cdots, & \omega_{n+1} \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\omega_{n+1}}{\partial x_1} \\ - & - & - & - \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_n}, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_n} & \cdots, & \dfrac{\partial\omega_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \mathrm{const.} \prod_{0\le i<j\le n+1} (x_i-x_j)^{\lambda_i+\lambda_j-2}$$

とが分る.

II. Iの最後の結果より $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n+1})$ は $\tilde{D}$ から n 次元射影空間の中への自然な解析的同型写像と見なされる. (ω) のモノドロミー群[3]は自然に $\mathbb{P}^n$ の一次変換群の部分群 G を定め, (ω) の逆写像 $(\omega)^{-1}$ は D への写像として G で不変である(しかし一般に一価でない). 従って, $(\omega)^{-1}$ が一価なら, それはその定義域での, G を群とする保型函数を定めることが期待できる(実際には定義域は拡がる). $(\omega)^{-1}$ が一価となるための必要条件は, $\lambda_{i_0 i_1\cdots i_p} (\equiv \lambda_{i_0}+\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-p)$ がすべての $1\le p\le n$ とすべての相異なる $i_0, i_1 \cdots i_p$ $(i_\nu = 0, 1, \cdots, n+1, \infty)$ の列について整数の逆数又は零となることであるが[4], それで十分であるかどうかは今のところ分らない. $n=1$ で $0<\lambda_i<1$, $0<\lambda_\infty$ $(i=0,1,2)$ ならこれで十分であり, このとき $1<\lambda_\infty<2$ なら(つまらない例だが)リーマン球上の保型函数, $0<\lambda_\infty<1$[5] ならば単位円上の保型函数が $(\omega)^{-1}$ によって定義される(後者の場合, 例えば $\lambda_0+\lambda_1\neq 0$

ならば (ω) は $x_1=0$ で代数的分岐をする写像に拡張され, $x_1=0$ の (ω) による像は基本領域の頂点となる. $\lambda_0+\lambda_1=0$ なら (ω) は対数分岐をし, $x_1=0$ の像は cusp となる. 同様なことが $n\geqq 2$ の場合も起る. 前者の場合は $x_1=0, 1, \infty$ すべて代数分岐点である.) $n=2$ ですべての i, j (=0, 1, 2, 3, ∞) について $\lambda_i+\lambda_j-1\ (=\lambda_{ij})$ が正整数の逆数か零[5], 又は $\lambda_0=\lambda_3=\frac{3}{8}$, $\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{4}$ (このとき $\lambda_0+\lambda_3-1<0$)[5] ならば $(\omega)^{-1}$ は一価で, 従って保型函数ができる. $n=3$ の場合は $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2/3$[5] が今迄に知られている唯一の例であり, $n\geqq 4$ の場合, $(\omega)^{-1}$ が一価となる例はまだ無い ($n=3$ の場合. 他にも例があり, $n=4, 5$ の場合にも例があるものと思われる.)

$n\geqq 2$ で今迄に分っている例では, 函数体はすべて有理的[6]である. 基本領域はどの $\lambda_{i_0 i_1\cdots i_p}$ も零でなければコンパクト, そうでなければコンパクトでない. $n=1$ の時は, 基本領域がコンパクトであることが函数体が有理函数体となるための必要十分条件である. 志村五郎氏は1964年に超球内の不連続群であって保型函数体が有理的である例をいくつか作ったが, 上述の例はそれ等に対応するものと思はれる (対応することは確かだが, どれ程厳密な対応であるかはまだ知らない.).

(本文終)

1) $F_1, F_2, \cdots, F_{n+1}$ を F の一次独立な分枝とすると，

$$\begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \\ F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ F_{n+1} & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial x_i \partial x_j} \end{vmatrix} \prod_{0 \le \alpha < \beta \le n+1} (x_\alpha - x_\beta)^{-(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)} = 0$$

が成立する。 各 F, $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ の係数の各 $S_{\alpha\beta}$ での零（極）の位数を調べ，さらに完全積分可能条件を用いると（*）が得られる。

2) (ω) のモノドロミー群が π_1 の線型表現として既約なこと，Lauricella により $\omega_\infty - \omega_1$ の適当な枝が解であること，積分表示を詳しく調べることに依る。

3) ω_α の π_{ij} を代表する道に沿っての解析接続を $P_{ij}\omega_\alpha$ であらわし，$\mu_{i_0 i_1 \cdots i_p} = \exp 2\pi\sqrt{-1}(\lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_p})$ とおくことにすると δ と $\{(C, U)\}$ の対応により (ω) のモノドロミー群が計算できる（これは Picard の方法）。

$j \neq 0, \infty$ のとき $(\alpha = 1, 2, \cdots, n+1)$

$$P_{ij}\omega_\alpha = \omega_\alpha \quad (\alpha \neq i, j)$$

$$P_{ij}\omega_j = \omega_j + \mu_i(1-\mu_j)\omega_i - (1-\mu_i)(1-\mu_j)\sum_{\substack{i<\alpha<j \\ \text{又は } j<\alpha<i}} \omega_\alpha - (1-\mu_i)\omega_j$$

$$P_{ij}\omega_i = \omega_i + \omega_j - P_{ij}\omega_j$$

$$P_{i\infty}\omega_j = \frac{1}{\mu_i}\omega_j \qquad (j \neq i,\ j = 0, 1, 2, \cdots, n+1)$$

$$P_{i\infty}\omega_i = \frac{1}{\mu_i}\left[(\mu_i - 1)\sum_{1 \le \alpha < i}\omega_\alpha + \mu_{i\infty}\omega_i + \mu_\infty(\mu_i - 1)\sum_{i < \alpha \le n+1}\omega_\alpha\right]$$

$$P_{i0}\,\omega_j = \omega_j - \mu_{01\cdots j-1}(1-\mu_j)\Big[(1-\mu_i)\sum_{1\le\alpha<i}\omega_\alpha + \omega_i\Big) \quad (i\neq j,\ j=1,\cdots,n+1)$$

$$P_{i0}\,\omega_i = \omega_i - \big(1-\mu_0+(1-\mu_i)\mu_{01\cdots i-1}\big)\Big[(1-\mu_i)\sum_{1\le\alpha<i}\omega_\alpha + \omega_i\Big]$$

4) $S_{i_0 i_1\cdots i_p} = \{(x)\,;\ x_{i_0}=x_{i_1}=\cdots=x_{i_p}\}$ の附近(つまり S_{ij} が一般の位置でなく交わっている処)での (ω) の様子を調べるために，すべての $S_{i_0 i_1\cdots i_p}$ で Hopf の σ-process を行なって，新しくできた多様体($(P^1)^n$ に今の σ-process を行なって生じたもの)ではすべての $\sigma(S_{i_0 i_1\cdots i_p})$ 達($S_{i_0\cdots i_p}$ に σ-process を行なってできたもの，特に $\sigma(S_{i_0 i_1}) = S_{i_0 i_1}$)が一般の位置で交わる様にする. 積分表示を新しい自然な局所座標であらわして，$\sigma(S_{i_0 i_2\cdots i_p})$ の近くで逆が一価となる条件を求めるとこれが出る.

5) 計算によると λ がすべて実数のとき任意の i, j について

$$A = \sum_{1\le\alpha,\beta\le n+1} A_{\alpha\beta}\, P_{ij}\omega_\alpha\, \overline{P_{ij}\omega_\beta} = \sum_{1\le\alpha,\beta\le n+1} A_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha\,\overline{\omega_\beta}$$

$\left(A_{\alpha\beta} = \sqrt{\mu_{\alpha\beta}}\ (\alpha<\beta),\quad A_{\alpha\beta} = \overline{\sqrt{\mu_{\alpha\beta}}}\ (\alpha<\beta),\ A_{\alpha\alpha} = \dfrac{\overline{\sqrt{\mu_{\alpha\alpha}}} - \mu_i\sqrt{\mu_{\alpha\alpha}}}{1-\mu_\alpha} \right)$

なる二次形式がある. 一方 $0<\lambda_i<1$ であってすべての λ_i が有理数ならば ω_i 達は $v=\varphi(u)$ なる代数曲線の周期と考えられ，従って Riemann の不等式が成立する. この不等式の左辺がサイクルの基の取替えにより不変なこと，表現の既約性より A が実数倍を除いて唯一の不変二次形式であることにより A は常に正(又は負)である. この時 A の符

号を適当に定めると，$0<\lambda_\infty<1$ ならば A は n 個の正の固有値と一個の負の固有値をもつ．A が (τ) と (λ) に連続的に依存することにより，特別な値をとって A の符号を調べると，A は常に負であることが分る．つまり (ω) は $\tilde{D}$ から（適当に座標を決めると）超球の中への写像である．本文中の例の場合 $(\omega)^{-1}$ が一価であることは次の様にして分る（この時 (ω) は $\tilde{D}$ から超球内へではなく，一部又は全部の $S_{\infty\tau_1\cdots\tau_p}$ で内分岐するある領域からの写像である）．超球は Poincaré-Bergman の距離をもつ．(ω) のモノドロミー群に対応する一次分数変換はこの距離に関する超球の合同変換であることにより，$(\omega)^{-1}$ は超球内到る処解析接続できる。球は単連結だから $(\omega)^{-1}$ は一価である．（$n=1$, $1<\lambda_\infty<2$ の場合の証明も殆んど同様）

6） P^n と双有理同型な多様体から余次元２以上の解析集合を除いてできた多様体上の函数体と同型なことによる。

7） 例えば (λ) が次の値であればよい．

(1) $\lambda_i=3/5$ $(0\le i\le 3)$　(2) $\lambda_i=5/8$ $(0\le i\le 3)$，(3) $\lambda_i=5/9$ $(0\le i\le 3)$
(4) $\lambda_0=\frac{1}{2}$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=7/12$　(5) $\lambda_i=\frac{7}{12}$ $(0\le i\le 3)$，(6) $\lambda_0=1/2$
$\lambda_1=13/24$，$\lambda_2=\lambda_3=5/8$　(7) $\lambda_0=7/15$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3/5$　(8) $\lambda_0=1/2$
$\lambda_1=\lambda_2=7/12$，(9) $\lambda_i=2/3$ $(0\le i\le 3)$　(10) $\lambda_i=3/4$ $(0\le i\le 3)$
(11) $\lambda_0=\lambda_3=1/2$，$\lambda_2=7/8$，$\lambda_3=5/8$　(12) $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=2/3$，$\lambda_3=7/12$
(13) $\lambda_0=\lambda_1=1/2$，$\lambda_2=\lambda_3=2/3$　(14) $\lambda_1=\lambda_2=3/4$，$\lambda_0=\lambda_3=1/2$

この内 (1) ~ (8) のみ基本領域がコンパクトである．なお Le Vavasseur により $n=2$ のとき $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_p}$ がすべて $\frac{1}{\text{整数}}$ 又は零となる (λ) が全部求められている．また (1), (2), (6), (9), (10) は Picard による．

参考文献

G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili. Rendiconti di Palermo t. VII, 1893, 111-158.

E. Picard, Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques, Ann. Ecole Norm. sup. II, 10, 1881, 304-322

——, Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires, Acta Math. 2, 1883, 114-126

——, Sur les groupes de certaines équations différentielles linéaires, Bull. des Sci. Math. sér. II, T. 9, 1885, 202-209

——, Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables, Ann. Ecole Norm. sup. III, 2, 1885, 357-384

——, 同じ標題, Bull. Soc. Math. de France 15, 1887, 148-152.

B. Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen. Abh. König. Ges. Wiss. Göttingen Bd. 7.

H. A. Schwarz, Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, Jour. de Crelle t. 54, 1873, 292-335

G. Shimura, On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables. Osaka Jour. Math. 1, 1964, 1-14.

Le Vavasseur, Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la serie hypergéométrique à deux variables $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$. These, Fac. Sci. Paris, 1893.

T. Terada, Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. à paraître.