

経験分布を基にした決定関数 の一致性

藤 教 研 野 田 一 雄

§0 はじめに 一問題の設定

D統計量を始めとした Kolmogorov-Smirnov 型の統計量とか Mises 汎関数あるいは U 統計量などは経験分布を基にした統計量である。このような経験分布を基にした決定関数としては、パラメータの推定に限らず、回帰に関する問題や標本空間の分割など、関数を推定の対象にする場合にも有効な足かかりを与える。また、一般に Bayes 解やミニマックス解の形が複雑な場合、この性質を調べるのに、経験分布を基にした決定関数を媒介にすると考えやすくなることがある。このようなことから、経験分布を基にした決定関数を一般的にとりあつかうこと、さしあたりはその漸近的な性質を議論することは意味をもつと考えられる。

まず問題の定式化から述べる。

基底の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, 標本空間 $(X, \mathcal{B}, P \in \mathcal{P})$

とする。標本は $i.i.d$ であることと想定して、サイズ n の標本空間としては積空間 $(\mathcal{X}^n, \mathcal{B}^n, P^n \in \mathcal{P}^n)$ と考える。また $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の確率測度の全体を \mathcal{D} とする。ある確率測度の族 $\mathcal{Q} : \mathcal{P} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$ および行動の空間 $(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ の上で定義される損失 $L(P, a)$, $P \in \mathcal{Q}$, $a \in \mathcal{A}$ の一定の正規性の条件のもとで与えらることをする。そして危険は

$$r_n(P, a) = \int_{\mathcal{X}^n} \int_{\mathcal{A}} L(P, a) \varphi(da | x^{(n)}) P^n(dx) \quad P \in \mathcal{Q}, \varphi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n \quad (0.1)$$

ある様型構造をもつものとする。ただし $\Phi_{\mathcal{Q}}^n$ は決定関数 $\varphi(A | x^{(n)})$, $A \in \mathcal{O}$, $x^{(n)} \in \mathcal{X}^n$ のある空間である。 $(\Phi_{\mathcal{Q}}^n$ は族 \mathcal{Q} に依存して定められるものとする。この理由は §9 で述べる。)

与えられた損失 L の正規性から $\inf_{\varphi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n} r_n(P, \varphi)$ が実現する $\varphi_P^* \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ が存在するものと仮定する。 $\inf \varepsilon$ とする範囲 $\varepsilon \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ に限定した場合、同様に $\inf \varepsilon$ が実現する $\varphi_P^* \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ が存在し、この $\inf_{\varphi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n} r_n(P, \varphi)$ が実現するものと仮定する。そしてこれを、 P に対する最適決定関数と呼ぶことにしよう。

この場合、一般に $\varphi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ の良さは $r_n(P, \varphi) - r_n(P, \varphi_P^*)$ と考えればよいことになる。

次ぎに一般化された経験分佈 \tilde{P}_n を定義する。いま $\tilde{P}_n(B | x^{(n)})$ が、

- ① $B \in \mathcal{B}$ と固定されたら, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ の \mathcal{B}^m -可測関数であり,
 $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ と固定されたら, $B \in \mathcal{B}$ の確率測度であること,
 ② $\tilde{P}_{(m)}(\cdot | x^{(m)}(\omega))$ が $P \in \mathcal{P} = a.e. \omega$ (v) で弱収束すること,
 以上2条件が成り立つとき, これを一般化された経験分布と呼ぶことにしよう。このように $\tilde{P}_{(m)}$ の全体を $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)}$ により表わし, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ と固定されたら, $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)} \subset \mathcal{Q}$ であると仮定する。

便宜上, $\{P_k; k=1, 2, 3, \dots\} \subset \mathcal{D}$ が $P_0 \in \mathcal{D}$ に弱収束するとき, $P_k \Rightarrow P_0$ により表わすことにする。

例 通常の意味における経験分布 $\tilde{P}_{(m)}$ が成り立つとすれば, \mathcal{X} は可分距離空間 \mathcal{B} の σ -Borel σ -代数であるときは, 上記①, ②の条件が満たされている。②については, 一般化された Glivenko-Cantelli 実理から従う。例えば [4] 参照。■

さて, $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{Q}}^*$ なる写像 $\varphi_{\tilde{P}_{(m)}}(A | x^{(m)})$ と表現されるもの, 即ち $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$, $A \in \mathcal{O}$ と固定されたら $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{Q}}^*$ なる写像と成り立つものは, 一般化された経験分布 $\tilde{P}_{(m)}$ を基にした決定関数と呼ぶことにしよう。(Bayes 解存と問題にするときは, 族 $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)}$ 上の一定の σ -代数を考え, これに同値する $\varphi_{\tilde{P}_{(m)}}$ の可測性を考える必要が出てくる。)

前に定義された $\mathcal{P}_{\tilde{P}_{(m)}}^*$ は同じく一般化された経験分布を基

にした決定関数であり、我々は危険に関する一貫性

$$r_n(P, \Phi_{P_{(m)}}^*) - r_n(P, \Phi^*) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (0.3)$$

の成立を調べることを問題にしよう。すなわち、 $\Phi_{P_{(m)}}^*$ を未知である Φ^* のいかなる推定量のごとく考え、その危険に関する一貫性を求めようというわけである。

例 Mises の汎関数は上述の $\Phi_{P_{(m)}}^*$ の例でもある。すなわち、実数空間 $(\mathbb{R}^p, \mathcal{C}^p)$ を標本空間とし、分布関数 $F(x)$ である $i.i.d.$ 確率変数 X_1, X_2, \dots と α と n について n とする。 $g(x_1, \dots, x_m)$ を変数に関して対称な \mathcal{C}^m -可測実関数として、regular functional

$$\theta(F) = \int_{\mathbb{R}^{pm}} g(x_1, \dots, x_m) F(dx_1) \dots F(dx_m) \quad (0.4)$$

を $\theta = \theta(F)$; $|\theta(F)| < \infty$ と α 上で定義する。標本 $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ にと、 τ $\theta(F)$ を推定する量 $T(X^{(n)})$ として、その損失を最小 = 乗法で考えれば

$$L(F, T) = (T - \theta(F))^2 \quad (0.5)$$

通常の意味での経験分布関数 $\hat{F}_{(n)}(x | X^{(n)})$ を表せば、Mises の汎関数は

$$\theta(\hat{F}_{(n)}) = \int_{\mathbb{R}^{pm}} g(x_1, \dots, x_m) \hat{F}_{(n)}(dx_1 | X^{(n)}) \dots \hat{F}_{(n)}(dx_m | X^{(n)}) \quad (0.6)$$

にあつて与えられる。

明らかに、 $\theta(\hat{F}_{(n)})$ は (0.5) にあつて与えられるが危険を最小にするものとして $\Phi_{P_{(n)}}^*$ に一致する。■

§1. 距離 $d_{B'}(\mathbb{P}_m, P)$, $d_{\mathcal{F}}(\mathbb{P}_m, P)$ の収束

一般化された経験分布 \mathbb{P}_m が弱収束するものとして定義したことから、この節は数学的準備として、度除と関係する次ぎのよう距離を考へることとする。

今後 X はある距離 ρ による可分距離空間とし、 \mathcal{B} はその Borel σ -代数としておく。

$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ のある部分集合とし、 \mathcal{D} 上の距離として

$$d_{B'}(P_1, P_2) = \sup_{B \in \mathcal{B}'} |P_1(B) - P_2(B)| \quad \text{for } P_1, P_2 \in \mathcal{D} \quad (1.1)$$

を定義する。ある \mathbb{P} は、 $B(X, \mathcal{B})$ 上の有界かつ \mathbb{P} -可測な実関数の全体として、 \mathcal{F} 上のある部分集合とし、

$$d_{\mathcal{F}}(P_1, P_2) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_X f dP_1 - \int_X f dP_2 \right| \quad \text{for } P_1, P_2 \in \mathcal{D} \quad (1.2)$$

なる距離を定義する。

$\delta > 0$ とし、 $B \in \mathcal{B}$ に対し、 B を δ -境界

$$\partial_{\delta} B = \{x; \rho(x, B) < \delta, \rho(x, B^c) < \delta\}, \quad (1.3)$$

および δ -近傍

$$B^{\delta} = \{x; \rho(x, B) < \delta\} \quad (1.4)$$

を考へる。一般には $(\partial B)^{\delta} \subset \partial_{\delta} B$ であるが、 X が局所連結であれば

$$\partial_{\delta} B = (\partial B)^{\delta} \quad (1.5)$$

が成立する。

子に關しては, $B \in \mathcal{B}$ の oscillation とし,

$$w_{\mathcal{F}}(B) = \sup \{ |f(x) - f(x')| ; f \in \mathcal{F}, x, x' \in B \} \quad (1.6)$$

と定義する。 $\bar{x} \in S(x, \delta) \in x \in X$ とし, 半径 δ の開球としておく。

このとき, Billingsley-Topsøe [3] の結果を適用することによつて, 直ちに \mathcal{R} の結果を得る。

Prop. 1.1.

一般化された経験分布 $\{ \tilde{P}_m ; m=1, 2, \dots \}$ に対し,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{B \in \mathcal{B}'} P(\partial \delta B) = 0 \quad (1.7)$$

が成れば $d_{B'}(\tilde{P}_m, P) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) a.e. ω が従う。

また \mathcal{R} が局所連続が成れば, 条件 (1.7) は

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{B \in \mathcal{B}'} P((\partial B)^\delta) = 0 \quad (1.7')$$

と置換してよい。

Prop. 1.2.

一般化された経験分布 $\{ P_m ; m=1, 2, \dots \}$ に対し,

$$\textcircled{1} \quad w_{\mathcal{F}}(X) < \infty \quad (1.8)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} P \{ x ; w_{\mathcal{F}} S(x, \delta) > \varepsilon \} = 0 \text{ for all } \varepsilon > 0 \quad (1.9)$$

が成れば $d_{\mathcal{F}}(\tilde{P}_m, P) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) a.e. ω が従う。

注意 Prop. 1.1 および 1.2 の結果は, \tilde{P}_m が P への弱収束
 の $P \in \mathcal{P}$ への $\|\cdot\|$ による一致であり, また (1.7) あるいは (1.9) の
 収束の $P \in \mathcal{P}$ への $\|\cdot\|$ による一致であれば, 同じく距離 $d_{\mathcal{P}}(\tilde{P}_m, P)$,
 $d_{\mathcal{F}}(\tilde{P}_m, P)$ の収束も $P \in \mathcal{P}$ への $\|\cdot\|$ による一致であることが従う。■

例 \mathcal{D} は $\|\cdot\|$ による弱収束の位相と同値な関係にある Dudley [2]
 の距離 β は, この Prop. 1.2 の条件 ①, ② を満足している。

いま, $BL(\mathcal{X}, \rho)$ は \mathcal{X} 上の有界かつ Lipschitzian 実関数の
 全体の空間とする。その $\|\cdot\|_{BL}$ は

$$\begin{aligned} \|f\|_{BL} &= \|f\|_{\infty} + \|f\|_L \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)| + \sup_{x \neq x'} |f(x) - f(x')| / \rho(x, x') \quad (1.10) \end{aligned}$$

として定義し, \mathcal{D} には, τ は \mathcal{D} の距離 β

$$\beta(P_1, P_2) = \sup \left\{ \int_{\mathcal{X}} f(dP_1 - dP_2) ; \|f\|_{BL} \leq 1, f \in BL(\mathcal{X}, \rho) \right\}$$

for $P_1, P_2 \in \mathcal{D}$ (1.11)

と定義する。

このとき, Prop. 1.2 より, 一般化された経験分布 \tilde{P}_m が P への
 $\|\cdot\|$ による, $\beta(\tilde{P}_m, P) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) a.s. $\omega(\omega)$ 。■

なお, $\varphi_{\tilde{P}_m}^*$ の収束の速さの問題に就くときは, 次の結果が役に立つ。

\mathcal{X} は可分距離空間であるから, $\forall \epsilon, \forall \delta > 0$ に対し, $P(B) \leq \delta$ なる \mathcal{B} 系 $B \in \mathcal{B}'$ があって, $\mathcal{X} \sim B$ は有限個の ϵ -被覆であるといえるようにすることができる。 $B \in \mathcal{B}'$ を適当に動かして,

ϵ - 裕量 α minimal number $\in N(\mathcal{X}, P, \epsilon, \delta)$ を表す。 α とし、

$$H(\mathcal{X}, P, \epsilon, \delta) = \log N(\mathcal{X}, P, \epsilon, \delta) \quad (1.12)$$

と定義すると、 H は α の ϵ -entropy を表す。 α の意味は α entropic 次元 $\in k(\mathcal{X}, P)$;

$$k(\mathcal{X}, P) = \limsup_{\epsilon \downarrow 0} H(\mathcal{X}, P, \epsilon, \epsilon) / \log(1/\epsilon) \quad (1.13)$$

として定義する。

α とし、 次の結果を得る。

Th. 1.3.

ある $s > 0$, $C_p > 0$ があつて、

$$\sup_{B \in \mathcal{B}'} P((\theta B)^c) \leq C_p \epsilon^s \quad (1.14)$$

が成り立つと仮定する。 \mathcal{X} は 局所コンパクトとして、 $k_p = k(\mathcal{X}, P)$ とするとき、 $\forall \delta > 0$ ($\epsilon \ll \delta$)

$$\mathbb{E}_P d_{\mathcal{B}'}(\hat{P}_{(m)}, P) \leq (C_p + 1) m^{-\frac{s}{2s + k_p + \delta}} \quad (1.15)$$

が従う。

注意

$\mathbb{E}_P d_{\mathcal{B}'}(\hat{P}_{(m)}, P) \ll \delta$ とも同様の関係が成り立つ。 ■

§2. 一般化された経験分布 $\hat{P}_{(m)}$ に基づく決定関数 $\phi_{\hat{P}_{(m)}}^*$ の一貫性。

Lem. 2.1.

各 $x_0^{(m)} \in \mathcal{X}^n$ に対し,

$$M(x_0^{(m)}) = \int_{\mathcal{X}^n} \int_{\mathcal{A}} [L(\tilde{P}_{m_1}, a) - L(P, a)] \Phi_P^*(da | x^{(m)}) P^n(dx) \\ + \int_{\mathcal{X}^n} \int_{\mathcal{A}} L(\tilde{P}_{m_1}, a) \Phi_P^*(da | x^{(m)}) [\tilde{P}_{m_1}^n(dx | x_0^{(m)}) - P^n(dx)] \quad (2.1)$$

$$N(x_0^{(m)}) = \int_{\mathcal{X}^n} \int_{\mathcal{A}} [L(\tilde{P}_{m_1}, a) - L(P, a)] \Phi_{\tilde{P}_{m_1}}(da | x^{(m)}) P^n(dx) \\ + \int_{\mathcal{X}^n} \int_{\mathcal{A}} L(\tilde{P}_{m_1}, a) \Phi_{\tilde{P}_{m_1}}(da | x^{(m)}) [\tilde{P}_{m_1}^n(dx | x_0^{(m)}) - P^n(dx)] \quad (2.2)$$

とおくとき,

$$\gamma_m(P, \Phi_{\tilde{P}_{m_1}}) \leq |N(x_0^{(m)})| + \max(|M(x_0^{(m)})|, |N(x_0^{(m)})|) \quad (2.3)$$

が成立する。■

さて, \mathcal{X}^n 上の距離 $\rho^{(m)}$ としよば, $x_i^{(m)} = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$ ($i=1, 2$)

$$\rho^{(m)}(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}) = \sum_{i=1}^n \rho(x_{1,i}, x_{2,i}) \quad (2.4)$$

を考ておけ。 \mathcal{B}^m は $\rho^{(m)}$ に依る位相の Borel σ -代数と一致する。この意味で \mathcal{S}_0 で定義されたように $B(\mathcal{X}^n, \mathcal{B}^m)$ の部分族 \mathcal{F}^m を考える。

このとき, 上記 Lem. 2.1 と \mathcal{S}_1 の Prop. 1.2 によ, て決まりの関係を導く。

Th. 2.2.

最適存決定関数 Φ_P^* および $\Phi_{\tilde{P}_{m_1}}^*$ に \cap して決まりの条件 $\textcircled{1}$,

②の成立のため仮定する。

$$\textcircled{1} \quad r_{P, \tilde{P}_m}(x^{(m)}) = \int_A L(\tilde{P}_m, a) \Phi_P^*(da | x^{(m)}) \quad (2.5)$$

$$r_{\tilde{P}_m}(x^{(m)}) = \int_A L(\tilde{P}_m, a) \Phi_{\tilde{P}_m}^*(da | x^{(m)}) \quad (2.6)$$

とおくとき、十分大なる m に対しては $r_{P, \tilde{P}_m}, r_{\tilde{P}_m} \in \mathcal{F}^n$ 。 $\mathcal{F} \supset \cup \mathcal{F}^n$ は Prop. 1.2 の仮定を満足するものとする。

$$\textcircled{2} \quad 1^\circ \int_A [L(\tilde{P}_m, a) - L(P, a)] \Phi_P^*(da | x^{(m)}(\omega)) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \\ \text{a.s. } \omega(\nu) \quad (2.7)$$

$$2^\circ \int_A [L(\tilde{P}_m, a) - L(P, a)] \Phi_{\tilde{P}_m}^*(da | x^{(m)}(\omega)) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \\ \text{a.s. } \omega(\nu) \quad (2.8)$$

この条件より、

$$r_n(P, \Phi_{\tilde{P}_m}^*) - r_n(P, \Phi_P^*) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad (2.9)$$

が従う。■

特に、写像 $\alpha: \mathcal{Q} \rightarrow A$ が考えられる場合 (例えば、各 $P \in \mathcal{Q}$ に対し、 $\lim_{a \in A} L(P, a)$ が実現する $a \in A$ が存在するとき、 α の対応を $\alpha(P)$ と考えてよい。), Th. 2.2 の関係は次ぎのよう整理される。

Th. 2.3

$\{P_m; m=0, 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{Q}$ の $P_m \Rightarrow P_0$ ($m \rightarrow \infty$) 存在とき、常に次ぎのことから従うと仮定する。

\mathcal{Q} から $\mathcal{A} \cap \mathcal{a}$ なる写像 $\alpha(P)$ が存在して,

① $L(P_m, \alpha(P_m))$ が $m \rightarrow \infty$ に有界,

② 1° $[L(P_m, \alpha(P_0)) - L(P_0, \alpha(P_0))] \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad (2.10)$

2° $[L(P_m, \alpha(P_m)) - L(P_0, \alpha(P_m))] \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad (2.11)$

が成立するとする。

このとき一般化された経験分布を基にする決定関数 $\Phi_{P_m}^*$ に \rightarrow する。

$$T_n(P, \Phi_{P_m}^*) - r_n(P, \Phi_P^*) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad (2.12)$$

が従う。■

注意 1 $\tilde{P}_m \Rightarrow P$ a.s. $w(\nu)$ が $P \in \mathcal{P}$ に関し一様であり、条件②の収束が $P \in \mathcal{P}$ に \rightarrow 一様であること、および Prop. 1.2 の条件②が $P \in \mathcal{P}$ に \rightarrow 一様であれば、Th. 2.2 あるいは Th. 2.3 の結果は、 $\forall P \in \mathcal{P}$ に \rightarrow 一様であることが従う。■

注意 2 Th. 2.3 に \rightarrow する。通常 $L(P_m, \alpha(P_m)) = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) であり、 $L(P_m, \alpha(P_0)) \rightarrow 0$, $L(P_0, \alpha(P_m)) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) と考えればよい。

特に θ が $\theta(P)$ の推定の場合は、上のそれぞれは $L(\theta(P_m), \theta(P_0))$, $L(\theta(P_0), \theta(P_m))$ となり、損失 L が $P \in \mathcal{Q}$ に関する連続性に帰着する。 $\tilde{P}_m \in \tilde{\mathcal{P}}_m$ に直接基にして考えるならば、 $L(\theta(P), \theta(\tilde{P}_m))$ の収束が向われることにはなるが、

\hat{P}_m として通常の意味での経験分布 \hat{P}_m をとると、これは結局 Misès 汎関数の一致性の問題に帰着することになる。■

§3 経験分布を基にした決定関数 $\Phi_{\hat{P}_m}$ の構成

この節の標題に掲げた問題の中心は \hat{P}_m の構成を考へることである。ところで通常の意味における経験分布を基にした決定関数 $\Phi_{\hat{P}_m}^*$ を直接用いることが出来な場合がある。すなわち、 $\Phi_{\hat{P}_m}^* \in \Phi_P^*$ であつて、この決定関数として Φ_P^* のそれしか用いることが出来な場合である。例之は、制約条件

$$r_m'(P, \Phi) \leq \beta, \quad P \in \mathcal{P} \quad (3.1)$$

が与えられ、対象となる決定関数 Φ が \mathcal{P} にまつて制限されるといふ問題がある。

このまうの意味において、 $P \in \mathcal{P}$ であれば $\Phi_P^* \in \Phi_P^*$ なることを仮定し、 $\Phi_{\hat{P}_m}^*$ の基に於て経験分布 \hat{P}_m が $\omega \in \Omega$ に固定するとき、 $\hat{P}_m \in \mathcal{P}$ であるよつて \hat{P}_m を構成することと考へよう。

Th. 3.1.

次の条件を仮定する。

- ① \mathcal{P} は弱収束の位相 \mathcal{E} に導くとき、 σ -compact である。
- ② 次の性質を \mathcal{E} の一般化された経験分布 \hat{P}_m が与えられ

で11るとする。

1° $B \in \mathcal{B}$ を固定した場合, $\check{P}_m(B|x^{(m)})$ は \mathcal{X}^m の有限個の点を除き, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ の連続関数である。

2° ①において, $\inf_{P \in \mathcal{P}} d_{\mathcal{B}'}(\check{P}_m, P)$ を実現する $P \in \mathcal{P}$ が, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ を固定するとき, 存在するが, ある例外集合 $W \in \mathcal{U}$; $\nu(W) = 0$ があって, $\omega \notin W$ であれば, $x^{(m)}(\omega) \in \mathcal{X}^m$ を固定するとき, 上述の $P \in \mathcal{P}$ が一意に定まる。(B'は Prop. 1.1 の仮定を満足する集合)

以上の条件の下で, 一般化された経験分布 $\check{P}_m \in \mathcal{X}^m$ が \mathcal{X}^m を固定するとき, $\check{P}_m(\cdot|x^{(m)}) \in \mathcal{P}$ 存在するように, しかも $\omega \notin W$ であれば $\inf_{P \in \mathcal{P}} d_{\mathcal{B}'}(\check{P}_m, P)$ を実現するように構成することができる。■

注意1. 距離 $d_{\mathcal{B}'}$ に11ても同様の議論ができる。■

注意2 特に, \mathcal{P} が μ に支配され (μ は $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の σ -有限測度) $P \in \mathcal{P}$ の μ に関する密度 $dP/d\mu$ が μ に11て自乗可積分であるような μ が存在するとき, $d_{\mathcal{B}'}$ あるいは $d_{\mathcal{B}}$ により, μ に関する L_2 -ノルムが可能な空間 $\mathcal{Q}' \supset \mathcal{P}$ を考えれば, より具体的に議論ができる。すなわち, \mathcal{P} が \mathcal{Q}' に11て完備かつ凸であることを仮定すれば, \check{P}_m から \mathcal{Q}' の射影 \check{P}_m とすれば11ことにできる。その場合 \check{P}_m としては, 例えは Parzen [1] などの密度 $dP/d\mu$ の推定関数を用11れば11。この辺の具体的な展開は紙数の関係で省略することにする。■

§4. Bayes 解, \equiv マックス解の一致性の応用

§2, §3 の結果として Bayes 解, \equiv マックス解の一致性を示すのに, $\Phi_{P_m}^*$ を応用できることが示される。その場合, §2 の注意 1 に示されておるように, 収束の $P \in \mathcal{P}$ に関する一様性を前提としておく。また Bayes 解の存在をいうときは, Φ_P^* , $\Phi_{P_m}^*$ の $P \in \mathcal{P}$ に関する可測性が本問題に与えなければならない。これらの議論は紙数の都合上省略する。

§5. 特殊な場合への応用 — 最適領域の推定の問題。

$X \in \mathcal{P}$ による完備, 可分距離空間としておく。この領域 Φ とは, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ なるような \mathcal{B} -可測関数である。この Φ の全体を \mathfrak{C} とする。 (X, \mathcal{B}) 上の σ -有限測度 μ について,

$$\int_X f(x) \phi(x) d\mu \leq c \quad (c = c) \quad (5.1)$$

を制約条件として,

$$\int_X g(x) \phi(x) dP, \quad P \in \mathcal{P} \quad (5.2)$$

を最大にする $\Phi_P^* \in \mathfrak{C}$ を推定する α の問題とする。ここで g は μ -可積分な与えられた実関数。

情報の空間として $(X^n, \mathcal{B}^n, P^n)$ を考え, Φ_P^* の推定として $\phi(x, x^{(n)})$ を考える。損失, 危険を

$$L(P, \phi) = \int_X g(x) (\Phi_P^*(x) - \phi(x, x^{(n)})) P(dx) \quad (5.3)$$

$$r_n(P, \phi) = \int_{X^n} \int_X g(x) (\Phi_P^*(x) - \phi(x, x^{(n)})) P(dx) P^n(dx) \quad (5.4)$$

とある。④ $\ll \nu$ である場合は、 ϕ^* , $\phi_{\tilde{P}_m}^*$ の explicit form を求めることができる。[5]。この結果は Prop. 1.1. に適用すると、 $\phi_{\tilde{P}_m}^*$ の一様性の十分条件として、 ν の関係を得る。各 $x_0^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ を固定するとき、

$$\begin{aligned} (\partial \phi_{\tilde{P}_m}^*(x, x_0^{(m)}))^\delta &= \int (x, x_0^{(m)}) ; g(x) \frac{d\tilde{P}_m}{d\mu}(x, x_0^{(m)}) - \lambda_m(x, x_0^{(m)}) f(x) \\ &= 0 \int^\delta \end{aligned} \quad (5.5)$$

として、 $(\partial \phi_{\tilde{P}_m}^* \in \mathcal{E}$ であるものとして λ_m が存在する[5])

$$\sup_n P((\partial \phi_{\tilde{P}_m}^*)^\delta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (5.6)$$

が a.e. $\omega(\nu)$ に \cap して成立することである。

収束の一様性, Bayes 解, \equiv マックス解に \cap しては略。

文 献

- [1] Parzen, E.: "On estimation of a prob. density func. & mode," A.M.S., 33 (1962)
- [2] Dudley, R.H.: "Convergence of Baire measures," Studia Math., 27 (1966)
- [3] Billingsley & Topsøe: "Uniformity in weak convergence," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, verw. Geb. 7, 1~16 (1967).
- [4] Parthasarathy, K.R., "Prob. measures on metric spaces," Academic Press (1967)
- [5] Noda & Toga, "Minimax estimation method for the optimum decomposition of a sample space based on prior information," A.I.S.M., Vol. 23, 1971.