数理解析研究所講究録
第197巻 1974年 60-69

推定量の一致性の order と漸近的有効性について

東大 経 竹内 啓
電通大 赤平昌文

§1. 序

一致推定量の収束の order を定義し、そのような order をもつ一致推定量が存在するための必要条件を、非正則な場合を含めて一般的に求める。ここでは密度函数 $f(x:\theta)$ の support $\{x: f(x;\theta)>0\}$ が θ に依存する場合について考えてみることにする。このとき限界の order をもつ一致推定量が存在すること、すなわちそれより速い order をもつ一致推定量が存在しないことが示される。さらにある order をもつ漸近分布を求め、その分布からいろいろな性質をもつ推定量についても議論する。なお§2、§3はそれぞれ Akahira and Takeuchi [1]、Akahira [2] に基づいている。

§2. 一致推定量と収束の order

$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ を標本空間とし、$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ 上の確率測度の族を、$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ とする。但し parameter space Θ を E^1 の任意の開区間とする。$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ の n 個の直積空間を $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)})$ とし、P_θ の n 個の直積測度を $P_\theta^{(n)}$ として $\mathcal{P}^{(n)} = \{P_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta\}$ とおく。これからは簡単のために $\mathcal{X}^{(n)}$ の元 $(x_1, \cdots, x_n)$ を $\tilde{x}_n$ と書くことにする。$\mathcal{X}^{(n)}$ から Θ への $\mathcal{A}^{(n)}$-可測写像 T_n を θ の推定量とよぶことにする。

<u>定義 2.1.</u> $\{T_n\}$ が一致推定量であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\lim_{n\to\infty} P_\theta^{(n)}(\{|T_n - \theta| > \varepsilon\}) = 0 \quad (\forall \theta \in \Theta)$ が成り立つことである。

<u>定義 2.2.</u> $\{T_n\}$ が <u>order $\{c_n\}$ をもつ一致推定量</u>であるとはある正数列 $\{c_n\}$ が存在して、次のことが成り立つことである。$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ であり、任意のコンパクト集合 $K(\subset \Theta)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分大きな $L > 0$ が存在して、

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{\theta \in K} P_\theta^{(n)}(\{|c_n(T_n - \theta)| \geq L\}) < \varepsilon$$

が成り立つ。これから以後では、order $\{c_n\}$ をもつ一致推定量を、<u>$\{c_n\}$-一致推定量</u>とよぶこともある。

<u>$\{c_n\}$-一致推定量</u>ならば一致推定量であることは明らかである。次に order $\{c_n\}$, $\{c_n'\}$ に対して、$\lim_{n\to\infty} c_n'/c_n = 0$ であるとき order $\{c_n\}$ は order $\{c_n'\}$ より<u>速い</u>とよぶことにする。任意の θ, $\theta'(\in \Theta)$ に対して、ある測度 μ_n があって $P_\theta^{(n)} \ll \mu_n$ ($P_\theta^{(n)}$

がμ_nに関して絶対連続)であり、$P_{\theta'}^{(n)} \ll \mu_n$ である。例えば、μ_nとして $(P_\theta^{(n)}+P_{\theta'}^{(n)})/2$ をとればよい。そこで$\mathcal{P}^{(n)}$上に次のような距離dを導入する。

$$d(P_\theta^{(n)},\ P_{\theta'}^{(n)}) = \int_{\mathfrak{X}^{(n)}} \left| \frac{dP_\theta^{(n)}}{d\mu_n} - \frac{dP_{\theta'}^{(n)}}{d\mu_n} \right| d\mu_n$$

但し $dP_\theta^{(n)}/d\mu_n$ はμ_nに関する密度函数を表わす。明らかに上のdはμ_nに無関係である。次に述べる2つの定理で、一致推定量と$\{c_n\}$-一致推定量が存在するための必要条件を求める。

定理 2.1. 一致推定量が存在するための必要条件は、$\theta_1 \neq \theta_2$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d(P_{\theta_1}^{(n)},\ P_{\theta_2}^{(n)}) = 2$ が成り立つことである。

定理 2.2. $\{c_n\}$-一致推定量が存在するための必要条件は、任意の$\varepsilon>0$に対して、$t>0$が存在して

$$\varliminf_{n\to\infty} d(P_\theta^{(n)},\ P_{\theta\pm tc_n^{-1}}^{(n)}) \geq 2-\varepsilon$$

が成り立つことである。

定理 2.1、2.2 の証明は、$\theta_1, \theta_2\ (\in \Theta)$ に対して

$$d(P_{\theta_1}^{(n)},\ P_{\theta_2}^{(n)}) = 2 \sup_{A\in\mathcal{A}^{(n)}} \left| P_{\theta_1}^{(n)}(A) - P_{\theta_2}^{(n)}(A) \right|$$

が成り立つことを用いればよい。

次に実際に$\{c_n\}$-一致推定量を求めてみよう。まず$\mathfrak{X}=E^1$とし、ルベーグ測度mに対して $P_\theta \ll m\ (\forall\theta\in\Theta)$ であることを仮定し、そのときの密度函数 $dP_\theta/dm = f(x:\theta)$ とする。このとき $f(x:\theta)=f(x-\theta)$ であることを仮定する。すなわち location parameter をもつ分布について考えることにする。

またさらに次のような条件を仮定する。

$$f(x) > 0 \;,\quad a < x < b \;;\quad f(x) = 0 \;,\; x \leq a \text{ 又は } x \geq b$$

でありかつ $f(x)$ は開区間 (a, b) 上で2回連続微分可能であるとし、さらに次のことが成り立つ。

$$\lim_{x \to a+} (x-a)^{-(\alpha-1)} f(x) = A \;;\quad \lim_{x \to b-} (b-x)^{-(\beta-1)} f(x) = B$$

但し $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, $0 < A, B < \infty$ である。

例えばベータ分布 $Be(\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha \leq \beta)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \; 0 < x < 1, \\ 0 & , \; \text{その他} \end{cases}$$

はこれらの条件を満たしている。

<u>定理 2.3.</u> $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ を互いに独立な確率変数で上の条件を満たす密度函数 f に従っていると仮定する。そのとき任意の $\alpha > 0$ に対して、<u>$\{c_n\}$-一致推定量</u>が存在し、しかもそれらは表1のように与えられる。さらに各場合に表1で与えられる order $\{c_n\}$ より<u>速い</u> order を持つ一致推定量は存在しない。

α	order $\{c_n\}$	$\{c_n\}$-一致推定量
$0 < \alpha < 2$	$n^{1/\alpha}$	$\{\min_{1 \leq i \leq n} X_i + \max_{1 \leq i \leq n} X_i - (a+b)\}/2$
$\alpha = 2$	$(n \log n)^{1/2}$	M. L. E.
$2 < \alpha$	$n^{1/2}$	M. L. E.

表 1

§3. 漸近分布

<u>定義3.1.</u> $F_{\theta,\mathbf{T}}^{\mathbb{C}}(\cdot)$ が order $\mathbb{C}=\{c_n\}$ の推定量 $\mathbf{T}=\{T_n\}$ の漸近分布であるとは、次の(i),(ii)が成り立つことである。

(i) 任意の $\vartheta(\in\Theta)$ に対して、$d>0$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\theta\in I_d(\vartheta)}\left|P_\theta^{(n)}(\{c_n(T_n-\theta)\leq y\})-F_{\theta,\mathbf{T}}^{\mathbb{C}}(y)\right|=0$$

である。但し $I_d(\vartheta)=[\vartheta-d,\vartheta+d]$ である。

(ii) 任意の実数 y に対して、$F_{\theta,\mathbf{T}}^{\mathbb{C}}(y)$ は θ の<u>連続函数</u>である。

<u>定義3.2.</u> $\mathbf{T}=\{T_n\}$ が asymptotically median unbiased estimator (A.M.U.E.)であるとは、

$$F_{\theta,\mathbf{T}}^{\mathbb{C}}(-0)\leq 1/2 \quad , \quad F_{\theta,\mathbf{T}}^{\mathbb{C}}(+0)\geq 1/2$$

が成り立つことである。

<u>定義3.3.</u> A.M.U.E. $\mathbf{T}^*=\{T_n^*\}$ が y で asymptotically most accurate であるとは、次のことが成り立つことである。

$$F_{\theta,\mathbf{T}^*}^{\mathbb{C}}(y)=\begin{cases}\inf_{\mathbf{T}\in\mathcal{J}_M^{\mathbb{C}}}F_{\theta,\mathbf{T}}^{\mathbb{C}}(y) & \text{if}\quad y<0,\\ \sup_{\mathbf{T}\in\mathcal{J}_M^{\mathbb{C}}}F_{\theta,\mathbf{T}}^{\mathbb{C}}(y) & \text{if}\quad y>0.\end{cases}$$

但し $\mathcal{J}_M^{\mathbb{C}}$ は同じ order $\mathbb{C}=\{c_n\}$ のときのA.M.U.E.の全体である。

<u>定義3.4.</u> A.M.U.E. $\mathbf{T}^*=\{T_n^*\}$ が uniformly asymptotically most accurate であるとは、次の(i)′、(ii)′が成り立つことで

ある。

(i)′ $F^{\mathbb{C}}_{\theta,\mathbf{T}^*}(y) = \inf_{\mathbf{T}\in\mathcal{J}^{\mathbb{C}}_M} F^{\mathbb{C}}_{\theta,\mathbf{T}}(y)$ for all $y<0$,

(ii)′ $F^{\mathbb{C}}_{\theta,\mathbf{T}^*}(y) = \sup_{\mathbf{T}\in\mathcal{J}^{\mathbb{C}}_M} F^{\mathbb{C}}_{\theta,\mathbf{T}}(y)$ for all $y>0$.

さらに(i)′、(ii)′のいずれか一方が成り立つとき、$\mathbf{T}^*$は one-sided asymptotically most accurate であるとよぶことにする。

さてここで、$\mathcal{X}=E^1$であり、location parameter をもつ密度函数の族について考えることにする。$A(\theta)=\{x : f(x-\theta)>0\}$とおく。まず次のような場合について議論する。

Case Ia. ある正数列$\{c_n\}$が存在して、次のことが成り立つ。$\lim_{n\to\infty} c_n=\infty$、$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{A(\theta)} f(x-\theta+yc_n^{-1})\,dx\right\}^n=1$ $(-\infty<y<\infty)$、$0<\varliminf_{n\to\infty} nV_n \le \varlimsup_{n\to\infty} nV_n<\infty$。

但し $V_n=\mathrm{Var}_{\theta-yc_n^{-1}}[W(X:\theta-yc_n^{-1},\theta)]$

$$W(X:\varphi,\theta)=\chi_{A(\varphi)\cap A(\theta)}(X)\log\{f(X-\varphi)/f(X-\theta)\}$$

である。

Case Ib. ある正数列$\{c_n'\}$が存在して、次のことが成り立つ。$\lim_{n\to\infty} c_n'=\infty$、$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{A(\theta)} f(x-\theta+yc_n'^{-1})\,dx\right\}^n=1$ $(-\infty<y<\infty)$、$\lim_{n\to\infty} nV_n'=0$。但し $V_n'=\mathrm{Var}_{\theta-yc_n'^{-1}}[W(X:\theta-yc_n'^{-1},\theta)]$ である。

Case II. ある正数列$\{c_n''\}$が存在して、次のことが成り立つ。$\lim_{n\to\infty} c_n''=\infty$、

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{A(\theta)} f(x-\theta+yc_n''^{-1})\,dx\right\}^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_{A(\theta - y c_n^{\prime\prime -1})} f(x-\theta)\,dx \right\}^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_{A(\theta)\cap A(\theta - y c_n^{\prime\prime -1})} f^2(x-\theta+y c_n^{\prime\prime -1}) / f(x-\theta)\,dx \right\}^n$$
$$= e^{-C_\alpha |y|^\alpha}$$

$(-\infty < y < \infty)$。但しC_αはある正の定数で、αは§2で与えられた正数である。$\lim_{n\to\infty} n V_n'' = 0$。但し$V_n'' = Var_{\theta - y c_n^{\prime\prime -1}}[W(X:\theta - y c_n^{\prime\prime -1}, \theta)]$である。

定理 3.1. Case Ia のとき、order $\mathbb{C} = \{c_n\}$ の漸近分布 $N(0, 1/I)$ $(I>0)$ をもつ推定量$\mathbf{T}^* = \{T_n^*\}$が存在すれば、$\mathbf{T}^*$は uniformly asymptotically most accurate である。Case Ib のとき、order $\mathbb{C}' = \{c_n'\}$の漸近分布 $N(0, 1/I')$ $(I'>0)$ をもつ推定量$\mathbf{T}^{**} = \{T_n^{**}\}$が存在すれば、$\mathbf{T}^{**}$は uniformly asymptotically most accurate である。

定理 3.1.の例としては、§2で仮定された密度函数で、$\alpha = \beta$ のときを考えると、$\alpha > 2$ のとき Case Ia の条件を、$\alpha = 2$ のとき Case Ib の条件をそれぞれ満たしている。$\alpha > 2$ のとき order $\{n^{1/2}\}$ の M.L.E. の漸近分布は $N(0, 1/I_1)$ であり、$\alpha = 2$ のとき order $\{(n \log n)^{1/2}\}$ の M.L.E. の漸近分布が $N(0, 1/I_2)$ であるから、M.L.E. は uniformly asymptotically most accurate である。

次に§2で仮定された密度函数で、$\alpha = \beta = 1$ のとき、Case II の条件を満たしている。いまuを $0 < u < \xi_1 = \frac{1}{C_1}\log 2$ を

満たす任意の点とし、$u' = -\frac{1}{C_1} \log\left(1 - e^{-C_1(s_1 - u)}\right)$とする。このとき$\mathbf{T}^* = \{T_n^*\}$で$T_n^* = \max\{T_n^+, T_n^-\}$とする。但し$T_n^+ = \max_{1 \le i \le n} X_i - b + un^{-1}$、$T_n^- = \min_{1 \le i \le n} X_i - a - u'n^{-1}$である。次に$v'$を$0 < v' < s_1$を満たす任意の点とし、$v = -\frac{1}{C_1}\log\left(1 - e^{-C_1(s_1 - v')}\right)$とする。このとき$\mathbf{T}^{**} = \{T_n^{**}\}$で$T_n^{**} = \min\{T_n'^+, T_n'^-\}$とする。但し$T_n'^+ = \max_{1 \le i \le n} X_i - b + vn^{-1}$，$T_n'^- = \min_{1 \le i \le n} X_i - a - v'n^{-1}$である。そこでorder $\{n\}$の$\mathbf{T}^*$、$\mathbf{T}^{**}$の漸近分布は、あるWeibull分布

$$F_{\theta,\mathbf{T}^*}^{\{n\}}(y) = \begin{cases} e^{-C_1(u-y)} - e^{-C_1(u'+u)}, & 0 < y \le u \\ 1 - e^{-C_1(u'+y)}, & u < y, \end{cases}$$

$$F_{\theta,\mathbf{T}^{**}}^{\{n\}}(y) = \begin{cases} 1 - e^{-C_1(v'+y)} + e^{-C_1(v'+v)}, & -v' \le y < 0 \\ e^{-C_1(v-y)}, & y < -v' \end{cases}$$

となるから、$\mathbf{T}^*$、$\mathbf{T}^{**}$は閉区間$[0, s_1]$の任意の一点yで、閉区間$[-s_1, 0]$の任意の一点yでそれぞれasymptotically most accurateである。

さらにCase Ⅲ、Ⅳ、Ⅴを考える前に次のことを仮定する。ある正数M_1、M_2が存在して次のことが成り立つ。$f(x)$は$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$上で2回連続微分可能でかつ$x > M_1$ならば$f''(x) > 0$であり、$x < -M_2$ならば$f''(x) < 0$であって、$\int_{M_1}^{\infty} \{f'(x)\}^2 / f(x)\,dx < \infty$、$\int_{-\infty}^{-M_2} \{f'(x)\}^2 / f(x)\,dx < \infty$である。

Case Ⅲ.

$\lim_{x\to 0+} f(x) = a'$、$\lim_{x\to 0-} f(x) = b'$、但し $a', b' > 0$ で $a' \neq b'$ である。

Case Ⅳ. $\lim_{x\to 0\pm} (\gamma + \delta |x|^{\alpha})^{-1} f(x) = \mathrm{constant}$、
但し $0 < \gamma, \delta < \infty$、$0 < \alpha \leq 1/2$ である。

Case Ⅴ. $f(0) = \infty$、$\lim_{x\to 0\pm} |x|^{\alpha} f(x) = \mathrm{constant}$、
但し $0 < \alpha < 1/2$ である。

注）Case Ⅳ のとき f の Fisher's information は無限大である。

各 Case において、$\{c_n\}$-一致推定量が存在する order の限界とそのときの A.M.U.E. と、その漸近分布と order $\{c_n\}$ は、表2で与えられる。

Case	A.M.U.E.	Bound of the order	漸近分布とその order $c_n = O(V_n^{-\frac{1}{2}})$
Ⅲ	ε-smooth M.L.E.	n	$N(0, 1/nI_\varepsilon)$ $I_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$
Ⅳ	ε-smooth M.L.E.	$n^{\frac{1}{2\alpha+1}}$ if $0<\alpha<1/2$ $(n\log n)^{1/2}$ if $\alpha = 1/2$	$N(0, 1/nI'_\varepsilon)$ $I'_\varepsilon = \begin{cases} O(\varepsilon^{2\alpha-1}) & \text{if } 0<\alpha<1/2 \\ O(-\log\varepsilon) & \text{if } \alpha = 1/2 \end{cases}$
Ⅴ	$X_{med.}$	$n^{\frac{1}{1-\alpha}}$	$G_n(y, \alpha)$ 但し $\lvert Y\rvert^{\frac{1}{1-\alpha}}(\mathrm{sgn}\,Y) \to G_n(y,\alpha)$ $Y \to N(0, 1/4n)$ $C_n = n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

表2

但し $\varepsilon(>0)$ を十分小さくとったとき、$\{T_{\varepsilon,n}\}$ が ε-*smooth* M.L.E. であるとは、$\lambda_\varepsilon(\theta, \tilde{x}_n) = \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_i + t)\,dt\right\}$ とするとき、$T_{\varepsilon,n}$ が a.a. $\tilde{x}_n$ で $\lambda_\varepsilon(T_{\varepsilon,n}(\tilde{x}_n), \tilde{x}_n) = \sup_{\theta\in\Theta} \lambda_\varepsilon(\theta, \tilde{x}_n)$ を満たす $\mathscr{X}^{(n)}$ から Θ への $\mathscr{A}^{(n)}$-可測写像となることである。

References

[1] Akahira, M and K. Takeuchi, *On the order of convergence of consistent estimators*, submitted to the Annals of Statistics.

[2] Akahira, M, *Bounds of asymptotic distributions of consistent estimators for general case*, submitted to the Annals of Statistics.