数理解析研究所講究録
第197巻 1974年 102-112

2つのWishart行列の固有値と固有ベクトルの漸近分布

広島大 理　小 西 貞則

§1. 序

S_1, S_2は互いに独立で各々Wishart分布$W_p(\Sigma_1, n_1)$, $W_p(\Sigma_2, n_2)$に従う行列とする。(ただし$n_1=\rho_1 n, n_2=\rho_2 n, n_1+n_2=n$とおく)。このときAnderson, T.W.(1951) Proc. Second Berkeley Sym.の方法を使って$n\to+\infty$のとき$S_2^{-1}S_1$の固有値と固有ベクトルの漸近分布を考える。一般性を失うことなく$\Sigma_1=\Gamma$, $\Sigma_2=I$としてよい。

ただし
$$\Gamma=\begin{bmatrix} \gamma_1 I_{q_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 I_{q_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \gamma_k I_{q_k} \end{bmatrix} \qquad p=\sum_{i=1}^{k} q_i \qquad \gamma_1>\cdots>\gamma_k>0$$

I_{q_i} ; $q_i\times q_i$単位行列

いま$S_2^{-1}S_1$のp個の固有値を$\phi_1(n)\geq\cdots\geq\phi_p(n)>0$とし対応する固有ベクトル$\underline{c}_1(n),\cdots,\underline{c}_p(n)$は、$\underline{c}_i'(n)S_2\underline{c}_j(n)=n_2\delta_{ij}$を満たすように定め、$\Phi_n=\mathrm{diag}(\phi_1(n),\cdots,\phi_p(n))$, $C_n=[\underline{c}_1(n),\cdots,\underline{c}_p(n)]$とおく。まず§2において$\Gamma$の対角要素がすべて等しい時、すなわち$\gamma_1=\cdots=\gamma_k=\gamma$のとき固有値$\Phi_n$と固有ベクトル$C_n$の逆行列$X_n$の漸近分布を考える。さらに§3において$\Gamma$が上の一般の場合に$\Phi_n, X_n$の漸近

分布について考える。最後に§4においてΦ_n, C_nの漸近分布を考える。なおAnderson, T.W.(1951)は，多変量線型仮説モデルについて固有値，固有ベクトルの漸近分布をあつかっている。

§ 2. Γの対角要素がすべて等しい場合

この節では$\Gamma=\gamma I$のときを考える。$S_2^{-1}S_1$の固有値Φ_nと固有ベクトルC_nの逆行列X_nは，

(2.1) $$\frac{1}{n_2}S_1 = X_n' \Phi_n X_n$$

(2.2) $$\frac{1}{n_2}S_2 = X_n' X_n$$

(ただし$X_n=[x_{ij}(n)]$とするとき$x_{i1}(n) \geqq 0$であるとする。)

によってS_1, S_2から unique に定義され unique に定義されない集合の measure はS_1, S_2に関して0となる。また中心極限定理より，

(2.3) $$V_n = \frac{1}{\sqrt{n_1}}\left(\frac{1}{\gamma}S_1 - n_1 I\right)$$

(2.4) $$U_n = \frac{1}{\sqrt{n_2}}\left(S_2 - n_2 I\right)$$

は$n \to +\infty$のとき漸近的に平均0の正規分布に従う。このことからS_1, S_2に代って random matrix U_n, V_nを使用する。次にX_nから新しい行列W_n, Z_nが，X_nの measure zero の集合を除いて，

(2.5) $$X_n = W_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}}Z_n \quad \text{ただし} \quad W_n'W_n = I \,,\; W_n'Z_n = Z_n'W_n$$

によって unique に定義されることが示される。なおW_n, Z_nは次のようにおくことができる。$X_n'X_n$が対称行列であることから$X_n'X_n = O_n' D_n O_n$なる直交行列O_nと対角行列D_nへの分解が，

可能である。ただし O_n の第1列は負でなく，D_n の対角要素は大きさの順とする。このとき $W_n = X_n O_n' D_n^{-1/2} O_n$ とおく。また(2.2)，(2.4)から $D_n = I + \frac{1}{\sqrt{n_2}}\Psi_n$ と表わせる。ここで Ψ_n は，対角行列でその対角要素は U_n の固有値である。$D_n^{1/2} = I + \frac{1}{\sqrt{n_2}}\Psi_n^*$ とする。このとき $Z_n = W_n O_n' \Psi_n^* O_n$ とおく。これによって(2.5)がでてくる。*Wishart* 行列 S_1, S_2 に代って U_n, V_n を用いて $S_2^{-1}S_1$ の固有値 Φ_n を考えると $n \to +\infty$ のとき Φ_n は $\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\gamma I - \phi I\right| = 0$ の根に収束することがわかる。そこで Φ_n を

$$(2.6) \qquad \Phi_n = \frac{\rho_1}{\rho_2}\gamma I + \frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_n$$

とおく。以上のことから (X_n, Φ_n) に代って(2.5)，(2.6)によって定義される (W_n, Z_n, Θ_n) の極限分布について考える。(2.1)，(2.2)において X_n, Φ_n に(2.5)，(2.6)式を代入して左辺の S_1, S_2 を(2.3)，(2.4)の関係から U_n, V_n でおきかえて整理すると次の2式をえる。

$$(2.7) \qquad V_n - \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U_n = \frac{\rho_2}{\gamma\sqrt{\rho_1}}W_n'\Theta_n W_n + \frac{\sqrt{\rho_2}}{\gamma\sqrt{n_1}}[W_n'\Theta_n Z_n + Z_n'\Theta_n W_n] + \frac{1}{\gamma\sqrt{\rho_1}n}Z_n'\Theta_n Z_n$$

$$(2.8) \qquad U_n = 2W_n'Z_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}}Z_n'Z_n$$

以上のことから $W_n'W_n = I$，$W_n'Z_n = Z_n'W_n$ なる条件のもとで，(2.7)，(2.8)によって U_n, V_n の *measure zero* の集合を除いて，U_n, V_n から W_n, Z_n, Θ_n が *unique* に定義されることがわかる。そこで *Rubin* の定理（Anderson, T. W. (1951)）を適用するに当って，U_n, V_n が $n \to +\infty$ のとき点列として各々 U, V に収束するとき (W_n, Z_n, Θ_n) は，

(2.9) $\quad V-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U=\frac{\rho_2}{\gamma\sqrt{\rho_1}}W'\Theta W \quad$ ただし $W'W=I,\ W'Z=Z'W$

(2.10) $\quad U=2W'Z \quad w_{i1}\geqq 0\ (i=1,\cdots,p)$

の解(W,Z,Θ)に収束することを示す必要がある。まず$\frac{\rho_2}{\gamma\sqrt{\rho_1}}\Theta_n$の対角要素は，$U_n\to U$，$V_n\to V\ (n\to+\infty)$ なるとき $V-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U$ の固有値に収束することが示される。W_n は直交行列より，確率有界であり，Z_nはその定義の仕方から確率有界であることが示される。すると(2.7)，(2.8)から $V_n-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U_n-\frac{\rho_2}{\gamma\sqrt{\rho_1}}W_n'\Theta_n W_n$，$U_n-2W_n'Z_n$ の norm は $n\to+\infty$ のとき 0 に収束する。そこで$(p\times p)$行列 $\tilde{W},\tilde{Z},\tilde{\Theta}$ を変数として$(p\times p)$行列 Q,Rなる値をとる次のような matrix function を考える。

(2.11) $\quad (Q,R)=(V-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U-\frac{\rho_2}{\gamma\sqrt{\rho_1}}\tilde{W}'\tilde{\Theta}\tilde{W},\ U-2\tilde{W}'\tilde{Z})$

ここで$\tilde{\Theta}$は対角行列でその対角要素はすべて異なり大きさの順に並んでいるとする。また$\tilde{W}=[\tilde{w}_{ij}]$は直交行列で $\tilde{w}_{i1}>0$，$\tilde{W}'\tilde{Z}=\tilde{Z}'\tilde{W}$であるとする。(2.11)において Q,Rを fix すると $\tilde{W},\tilde{Z},\tilde{\Theta}$ は unique に定まる。そこで Q,R の関数として(2.11)の逆関数を考える。すなわち

(2.12) $\quad (\tilde{W},\tilde{Z},\tilde{\Theta})=(f_1(Q,R),\ f_2(Q,R),\ f_3(Q,R))$

この関数は連続であるから，いまOを零行列として

(2.13) $\quad (W,Z,\Theta)=(f_1(O,O),\ f_2(O,O),\ f_3(O,O))$

とすると，(Q,R)の norm を十分小さくするとき $(\tilde{W}-W,\ \tilde{Z}-Z,\ \tilde{\Theta}-\Theta)$の norm を十分小さくすることができる。いま

$U_n \to U$, $V_n \to V$ $(n \to +\infty)$ なる点列に対して (2.7), (2.8) で定まる (W_n, Z_n, Θ_n) に対して (2.11) から $(Q_n, R_n) = (V - \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U - \frac{\rho_2}{\gamma\sqrt{\rho_1}} W_n' \Theta_n W_n,\ U - 2W_n' Z_n)$ とおく。$n \to +\infty$ のとき Q_n, R_n の norm は 0 に収束することから同様に逆関数 (2.12) を考えると (W_n, Z_n, Θ_n) は, (2.13) で定義される (W, Z, Θ) にしたがって (2.9), (2.10) で定まる (W, Z, Θ) に収束することがわかる。ここで (W, Z, Θ) の分布を求めるために次の補助定理.1. (Anderson, T. W. (1951), Hsu, P. L. (1939), Ann. Eugen.) を上げておく。

補助定理 1.　random matrix $B_{(p\times p)}$ は対称行列でその密度関数は, $\pi^{-p(p+1)/4}\, 2^{-\frac{1}{2}p} \exp[-\frac{1}{2} \mathrm{tr} B^2]$ であるとする。また $C_{(p\times p)}$, $\Phi_{(p\times p)}$ は次の 2 式によって定義されるものとする。

$$C'\Phi C = B \quad , \quad C'C = I$$

ここで Φ は対角行列で対角要素 ϕ_i $(i=1,\cdots,p)$ は $\phi_1 \geq \cdots \geq \phi_p$ であるとし $C = [c_{ij}]$ において $c_{i1} \geq 0$ とする。

このとき C と Φ は互いに独立で Φ の対角要素の密度関数は,

$$2^{-\frac{1}{2}p} \left\{ \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\tfrac{1}{2}(p+1-i)\right] \right\}^{-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^{p} \phi_i^2/2\right] \prod_{i<j} (\phi_i - \phi_j)$$

であり直交行列 C の分布は Haar Conditional distribution である。

なお (2.9), (2.10) で定義される (W, Z, Θ) の分布をこの補助定理を使って求めるわけであるがそれは §3 の定理 1. に帰着して, 述べる。

§3. Γが一般の形をとる場合

この節ではΓが§1で上げた一般の形をとる場合を考える。X_nをΓの対角要素の重複度$g_1,\cdots,g_k$に従ってk^2個の小行列に分割して次のようにおく。

$$(3.1)\quad X_n=\begin{pmatrix} X_{11}(n) & X_{12}(n) & \cdots & X_{1k}(n) \\ X_{21}(n) & X_{22}(n) & \cdots & X_{2k}(n) \\ & \cdots & & \\ X_{k1}(n) & X_{k2}(n) & \cdots & X_{kk}(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} W_1(n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_2(n) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & W_k(n) \end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{n_2}}\begin{pmatrix} Z_{11}(n) & Z_{12}(n) & \cdots & Z_{1k}(n) \\ Z_{21}(n) & Z_{22}(n) & \cdots & Z_{2k}(n) \\ & \cdots & & \\ Z_{k1}(n) & Z_{k2}(n) & \cdots & Z_{kk}(n) \end{pmatrix}$$

$$=W_n+\frac{1}{\sqrt{n_2}}Z_n$$

ただし　$W_i(n)'W_i(n)=I_{g_i}$，$W_i'(n)Z_{ii}(n)=Z_{ii}'(n)W_i(n)$　$(i=1,\cdots,k)$

$X_{ii}(n)$の第1列はすべて正であるとする。

次に(2.3)に代ってここでは$n\to+\infty$のとき

$$(3.2)\qquad V_n=\frac{1}{\sqrt{n_1}}\left(\Gamma^{-\frac{1}{2}}S_1\Gamma^{-\frac{1}{2}}-n_1 I\right)$$

が漸近的に平均0の正規分布に従うことを使う。S_1,S_2に代ってU_n,V_nでおきかえて考えると$S_2^{-1}S_1$の固有値Φ_nは$\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\Gamma-\phi I\right|=0$の固有値に収束することが示される。そこで$\Phi_n$を

$$(3.3)\qquad \Phi_n=\begin{pmatrix} \frac{\rho_1}{\rho_2}\delta_1 I_{g_1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_1(n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\rho_1}{\rho_2}\delta_2 I_{g_2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_2(n) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\rho_1}{\rho_2}\delta_k I_{g_k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_k(n) \end{pmatrix}$$

とおく。U_n,V_n,S_1,S_2も同様にk^2個の小行列に分割して，$U_n=[U_{ij}(n)]$，$V_n=[V_{ij}(n)]$　$(i,j=1,\cdots,k)$とおく。(2.1),(2.2)の関係式からS_1,S_2をU_n,V_nでおきかえさらにX_n,Φ_nを(3.1),(3.3)でおきかえると次の式がえられる。

(3.4) $U_{ii}(n) = 2W_i'(n)Z_{ii}(n) + \frac{1}{\sqrt{n_2}}\sum_{k=1}^{h} Z_{ki}'(n)Z_{ki}(n)$

(3.5) $U_{ij}(n) = W_i'(n)Z_{ij}(n) + Z_{ji}'(n)W_j(n) + \frac{1}{\sqrt{n_2}}\sum_{k=1}^{h} Z_{ki}'(n)Z_{kj}(n) \quad (i \neq j)$

(3.6) $V_{ii}(n) = \frac{\rho_2}{\delta_i\sqrt{\rho_1}}W_i'(n)\Theta_i(n)W_i(n) + 2\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}W_i'(n)Z_{ii}(n) + \frac{1}{\sqrt{n}}M_i(n)$

(3.7) $V_{ij}(n) = \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\delta_i\delta_j\rho_2}}[\delta_i W_i'(n)Z_{ij}(n) + \delta_j Z_{ji}'(n)W_j(n)] + \frac{1}{\sqrt{n}}M_{ij}(n)$

ただし$M_i(n)$, $M_{ij}(n)$ は, $Z_{ij}(n)$, $\Theta_i(n)$, $W_i(n)$, δ_i, ρ_1, ρ_2, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ の積和である。

この4式によって$(W_i(n), Z_{ij}(n), \Theta_i(n) ; i,j=1,\cdots,h)$ は, $(U_{ij}(n), V_{ij}(n) ; i,j=1,\cdots,h)$によって, *measure zero* の集合を除いて *unique* に定義される。この$(W_i(n), Z_{ij}(n), \Theta_i(n) ; i,j=1,\cdots,h)$ は $n \to +\infty$ のとき次の式によって定義される$(W_i, Z_{ij}, \Theta_i ; i,j=1,\cdots,h)$に法則収束することが示される。

(3.8) $U_{ii} = 2W_i'Z_{ii}$

(3.9) $U_{ij} = W_i'Z_{ij} + Z_{ji}'W_j \quad (i \neq j)$

(3.10) $V_{ii} - \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U_{ii} = \frac{\rho_2}{\delta_i\sqrt{\rho_1}}W_i'\Theta_i W_i$

(3.11) $V_{ij} = \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\delta_i\delta_j\rho_2}}[\delta_i W_i'Z_{ij} + \delta_j Z_{ji}'W_j] \quad (i \neq j)$

(3.12) $W_i'W_i = I_{g_i}, \quad W_i'Z_{ii} = Z_{ii}'W_i$

このことは§2と同様の方法を使って証明することができる。まず$\frac{\rho_2}{\delta_i\sqrt{\rho_1}}\Theta_i(n)$の対角要素は $n \to +\infty$ のとき $V_{ii} - \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U_{ii}$ の固有値に収束することが証明できる。$W_i(n)$ は直交行列より確率有界であることがわかる。最後に$Z_{ij}(n)$ が確率有界であることをいう必要がある。そのために固有ベクトルC_nの形を調べて

みる。なおAnderson (1951)の論文において多変量線型仮説モデルの固有ベクトルの形が特殊な場合に求められているが，ただちには一般化できない。ここでは一般の場合を次の補助定理2. として述べる。

補助定理2.　S_1, S_2は互いに独立で$W_p(\Gamma, n_1)$, $W_p(I, n_2)$に各々従うとする。このとき$S_2^{-1}S_1$の最大根$\phi_1(n)$に対する固有ベクトル$\underline{c}_1(n)$の要素は次のように表わせる。

$\underline{c}_1'(n) = [c_{11}(n), \cdots, c_{p1}(n)]$とするとき

$1 \leqq j \leqq q_1$　$$c_{j1}(n) = g_1(n)\left\{k_{j1}(n)\prod_{i \neq 1}^{h} \rho_1^{q_i}(\gamma_i - \gamma_1)^{q_i} + \frac{1}{\sqrt{n}} k_{j1}^*(n)\right\}$$

$q_l + 1 \leqq j \leqq q_{l+1}$　$(l = 1, 2, \cdots, h-1)$

$$c_{j1}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} g_1(n)\left\{k_{j1}(n)\rho_1^{q_{l+1}-1}(\gamma_{l+1} - \gamma_1)^{q_{l+1}-1}\prod_{i \neq 1, l+1} \rho_1^{q_i}(\gamma_i - \gamma_1)^{q_i} + \frac{1}{\sqrt{n}} k_{j1}^*(n)\right\}$$

ここで$g_1(n)$は$\underline{c}_1'(n) S_2 \underline{c}_1(n) = n_2$をみたすように定められ，$k_{j1}(n)$は$U_n, V_n$の要素と$\rho_1, \rho_2, \gamma_i\ (i = 1, \cdots, h)$の積和であり，$k_{j1}^*(n)$はさらに$\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \cdots,$と$U_n, V_n$の要素，$\rho_1, \rho_2, \gamma_i$の積和である。このことから$g_1(n), k_{j1}(n), k_{j1}^*(n)$は$n \to +\infty$のとき収束することが示される。同様にしてi番目の根に対する固有ベクトルは

$q_l + 1 \leqq i \leqq q_{l+1}$　$(l = 0, 1, \cdots, h-1)$　$q_0 = 0$

$$\underline{c}_i'(n) = g_i(n)\Big[\underbrace{O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right), \cdots, O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{q_1 + \cdots + q_l\text{個}},\ \underbrace{k_{q_1+\cdots+q_l+1, i}(n) + O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right), \cdots, k_{q_1+\cdots+q_{l+1}, i}(n)}_{q_{l+1} - q_l\text{個}}$$
$$+ O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right),\ O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right), \cdots, O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\Big]$$

ただし$g_i(n)$は$\underline{c}_i'(n) S_2 \underline{c}_i(n) = n_2$をみたすように定められ$g_i(n), k_{ij}(n)$ともに$n \to +\infty$のとき収束する。

これを行列で表わすと

$$C_n=\begin{pmatrix} K_{11}(n) & \frac{1}{\sqrt{n}}K_{12}(n) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}}K_{1k}(n) \\ \frac{1}{\sqrt{n}}K_{21}(n) & K_{22}(n) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}}K_{2k}(n) \\ & \cdots & & \\ \frac{1}{\sqrt{n}}K_{k1}(n) & \frac{1}{\sqrt{n}}K_{k2}(n) & \cdots & K_{kk}(n) \end{pmatrix} \qquad K_{ij}(n)\ ;\ q_i\times q_j \text{ 行列}$$

ここで $K_{ij}(n)$ は $n\to+\infty$ のとき収束することがわかる。

$X_n=C_n^{-1}$ より．X_n も C_n と同様の形の行列で表わせる。これから $Z_{ij}(n)\ (i\neq j)$ は $n\to+\infty$ のとき収束し，さらに $Z_{ii}(n)$ は有界であることが示される。したがって§2と同様の方法で，$(W_i(n), Z_{ij}(n), \Theta_i(n)\ ;\ i,j=1,\cdots,k)$ は，(3.8)～(3.12) によって定義される $(W_i, Z_{ij}, \Theta_i\ ;\ i,j=1,\cdots,k)$ に法則収束することが Rubin の定理から示される。

定理1. $(W_i(n), Z_{ij}(n), \Theta_i(n)\ ;\ i,j=1,\cdots,k)$ は $n\to+\infty$ のときその極限分布は下の(1)，(2)，(3)の分布に従う $(W_i, Z_{ij}, \Theta_i\ ;\ i,j=1,\cdots,k)$ によって $\left[\prod_{i=1}^{k} f_i(\Theta_i)\,g_i(W_i)\right] h(Z\mid\Theta,W)$ と表わすことができる。ただし $Z=[Z_{ij}]$．$W=\mathrm{diag}(W_1,\cdots,W_k)$，$\Theta=\mathrm{diag}(\Theta_1,\cdots,\Theta_k)$

(1) $$f_i(\Theta_i)=2^{-\frac{1}{2}q_i}\left\{\prod_{g=1}^{q_i}\Gamma\left[\tfrac{1}{2}(q_i+1-g)\right]\right\}^{-1}\exp\left\{-\lambda_i^2\sum_{g=q_1+\cdots+q_{i-1}+1}^{q_1+\cdots+q_i}\theta_g^2/2\right\}$$
$$\times\prod_{g<g'}(\theta_g-\theta_{g'})\,\lambda_i^{\frac{1}{2}q_i(q_i+1)} \quad \left(\text{ただし } \lambda_i=\frac{\rho_2^{3/2}}{\delta_i(2\rho_1)^{1/2}} \text{ とおく}\right)$$

(2) 直交行列 W_i の分布は Haar conditional distribution

(3) $h(Z\mid W,\Theta)$ は正規分布でその条件付平均，分散，共分散は次のようになる。ただし $W_i=(w_{gk}^{(i)})$ とする。

$$E(Z_{ij}\mid\Theta,W)=\begin{cases}-\dfrac{\rho_2^{3/2}}{2\delta_i}\Theta_iW_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

Z_{ii}の元 $z_{gk}, z_{g'k'}$ の条件付共分散は $\frac{\rho_2}{4}(\delta_{gg'}\delta_{kk'} + w^{(i)}_{gk'}w^{(i)}_{g'k})$

Z_{ij}の元 z_{gk} の条件付分散は $\gamma_j(\rho_1\gamma_j + \rho_2\gamma_i)/\rho_1(\gamma_i - \gamma_j)^2$

Z_{ij}の元 z_{gk}とZ_{ji}の元 $z_{g'k'}$の条件付共分散は $\frac{-\gamma_i\gamma_j}{\rho_1(\gamma_i-\gamma_j)^2} w^{(i)}_{gk'}w^{(j)}_{g'k}$

その他の元の間の条件付共分散はすべて0となる。

§4. $S_2^{-1}S_1$の固有値，固有ベクトルの漸近分布

いま固有ベクトルC_nをΓの対角要素の重複度q_i $(i=1,\cdots,k)$によってk^2個の小行列に分割したものを $C_n = [C_{ij}(n)]$として，これを次のようにおく。

$$C_n = \begin{bmatrix} C_{11}(n) & C_{12}(n) & \cdots & C_{1k}(n) \\ C_{21}(n) & C_{22}(n) & \cdots & C_{2k}(n) \\ & \cdots & & \\ C_{k1}(n) & C_{k2}(n) & \cdots & C_{kk}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_2(n) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & H_k(n) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n_2}} \begin{bmatrix} F_{11}(n) & F_{12}(n) & \cdots & F_{1k}(n) \\ F_{21}(n) & F_{22}(n) & \cdots & F_{2k}(n) \\ & \cdots & & \\ F_{k1}(n) & F_{k2}(n) & \cdots & F_{kk}(n) \end{bmatrix}$$

$$= H_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}}F_n$$

ただし $H_i'(n)H_i(n) = I_{q_i}$ ， $H_i'(n)F_{ii}(n) = F_{ii}'(n)H_i(n)$

C_nをuniqueに決めるため便宜上$C_{ii}(n)$の第1行は負でないとしておく。このとき(2.1), (2.2)によって定義されるX_nの逆行列X_n^{-1}とC_nとは列ベクトルの正負の差だけである。ところが十分大きなnに対して $C_n = X_n^{-1}$ が成り立つ。したがって，

$$C_n = H_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}}F_n = \left(W_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}}Z_n\right)^{-1} = W_n' - \frac{1}{\sqrt{n_2}}W_n'Z_nW_n' + \frac{1}{n}T_n$$

ここでT_nの要素は$n \to +\infty$のとき収束する。この式から小行列をとって考えると

$$(4.1) \quad H_i(n) + \frac{1}{\sqrt{n_2}}F_{ii}(n) = W_i'(n) - \frac{1}{\sqrt{n_2}}Z_{ii}(n) + \frac{1}{n}T_{ii}(n)$$

(4.2) $\frac{1}{\sqrt{n_2}}F_{ij}(n) = -\frac{1}{\sqrt{n_2}} W_i'(n) Z_{ij}(n) W_j'(n) + \frac{1}{n} T_{ij}(n)$ $(i \neq j)$

これから($H_i(n)$, $F_{ii}(n)$, $F_{ij}(n)$, $\Theta_i(n)$; $i, j=1, \cdots, k$)の極限分布は(W_i', $-Z_{ii}$, $-W_i' Z_{ij} W_j'$, Θ_i ; $i, j=1, \cdots, k$)の分布で与えられることが示される。

定理2. ($\Phi_i(n)$, $C_{ii}(n)$, $C_{ij}(n)$; $i, j=1, \cdots, k$)は，極限分布が次の(1)に従う対角行列$\Theta_i(n)$，(2)に従う直交行列$H_i(n)$，(3)に従う$F_{ij}(n)$によって($\Phi_i(n)$, $C_{ii}(n)$, $C_{ij}(n)$; $i, j=1, \cdots, k$) = ($\frac{\rho_1}{\rho_2}\delta_i I_{q_i} + \frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_i(n)$, $H_i(n) + \frac{1}{\sqrt{n_2}}F_{ii}(n)$, $\frac{1}{\sqrt{n_2}}F_{ij}(n)$; $i, j=1, \cdots, k$)と，表わすことができる。ここで($H_i(n)$, $F_{ij}(n)$, $\Theta_i(n)$; $i, j=1, \cdots, k$)の極限分布は($\prod_{i=1}^{k} f_i(\Theta_i) g_i(H_i)$)$h(F \mid \Theta, H)$で表わされる。
ただし $F=[F_{ij}]$, $H=\mathrm{diag}(H_1, \cdots, H_k)$, $\Theta = \mathrm{diag}(\Theta_1, \cdots, \Theta_k)$とする。

(1) $f_i(\Theta_i)$の密度関数は定理1で与えられるもの。

(2) 直交行列H_iの分布は Haar Conditional distribution

(3) $h(F \mid \Theta, H)$は正規分布でその条件付平均，分散，共分散は次のように与えられる。ただし $H_i = [h_{gk}^{(i)}]$ とおく。

$$E[F_{ij} \mid \Theta, H] = \begin{cases} \frac{\rho_2^{3/2}}{2\delta_i} H_i \Theta_i & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

F_{ii}の元f_{gk}, $f_{g'k'}$の条件付共分散は $\frac{\rho_2}{4}(\delta_{gg'}\delta_{kk'} + h_{gk'}^{(i)} h_{g'k}^{(i)})$

F_{ij}の元f_{gk}の条件付分散は $\delta_j(\rho_1\delta_j + \rho_2\delta_i)/\rho_1(\delta_i - \delta_j)^2$

F_{ij}の元f_{gk}とF_{ji}の元$f_{g'k'}$の条件付共分散は $-\frac{\delta_i\delta_j}{\rho_1(\delta_i-\delta_j)^2} h_{gk'}^{(i)} h_{g'k}^{(j)}$

その他の元の間の条件付共分散はすべて0となる。