数理解析研究所講究録
第198巻 1974年 9-23

カタストロフ理論と形態形成

ルネ，トム　1973年4月23日
山口 昌哉 訳
宇敷 重広 訳

I）形態の理論のプログラム，「記述」について

すべての科学的な行為は現象学的研究をその目的としている。一方すべての現象は或る一定の空間，研究されるべき現象の基質（substrat）空間において生起する。この基質空間は一般に（もっとも典型的には）巨視的な意味において普通の時空空間であるが，更に特殊な専門化された科学的な行為においてはこの時空空間を，それから数学的操作によって導かれた別の空間でおきかえることもある。例えば音響学は，上の基質空間として，空気のかたまりの振動状態を記述する無限次元の関数空間を基質空間としている。

一つの形態の記述の場合，オ一になされるべき努力は基質空間における通常点つまりその点の近傍には如何なる形態的なアクシデントも現れない点，とそれらの点の集合の補集合をなす点のあつまり（これは閉集合をなす），カタストロフ点とを区別することである。したがってカタストロフ点

の集合は形態的アクシデントをのせる台であり，その空間の媒体中での定性的不連続性のあつまりといってもよいであろう。

しかし，カタストロフ点　の閉集合Kを与えることだけではすべての経験的な形態　を特徴づけることには明らかに不十分である．（なぜなら媒体の連続的な変化を無視しているから）。けれども，これらによって本質的には特徴づけは可能であることは知覚についてのゲシュタルト理論（図がらと地づらの区別）についてはよく知られたことである。

今度は実験的形態　を考えよう，研究者は或る箱Bの中に或る状態(α)の或るシステムを準備する。この場合状態(α)はその状態を準備するための仕様書によって完全に規定されている。つまり仕様書には必要なだけの正確さで，状態(α)を導くようにいろいろの材料や品物を箱Bにつめるつめ方が記されている。

この様にして状態(α)が準備された後，観察者は箱Bと時間軸Tの直積空間B×Tにおいて，状態(α)からの自然的発展として生起する形態変化を観察する。特に，彼は状態(α)から出たカタストロフの集合$K_{(\alpha)}$を決定しようと努力する。

ここでわれわれは状態の集合に位相を定義しよう，最もしばしば，状態(α)の準備には何種類かの物理量が入ってくる。

（例えば，濃度，温度其の他である）これらによって我々の位相は通常のごとく定義される。

定義　状態(α)から出た形態変化がある時間区間T_1で構造安定であるとは，αに十分近いすべての状態(α')について，次のような$B\times T$からそれ自身へのε−同相写像h_αが存在して，あらかじめ与えられた$\varepsilon>0$について次の式がなりたつことである。

$$h_\alpha(K\alpha)=K\alpha',\quad d(y,h(y))<\varepsilon,\ y\in B\times T_1,$$

ここで，dはユークリッドの距離をあらわす。

次に，その場合一つの形態変化Kが抽象的に定義された形態形成場　によって与えられるとは次のように定義される。或る普遍的な基質空間W，普遍的なカタストロフ$\tilde{K}$が与えられたときそれによって次のように，状態(α)の近傍にある状態(α')から出たすべての実験は，連続写像Φ：$B\times T_1\longrightarrow W$（これは集合$\tilde{K}$にtransverseになっている）によって規定されている場合をそのように云う．実際Φはしばしば同相写像であり，それ以上に微分同相写像である。また特にこの同相写像hと写像Φが，時間軸（これはW上にも定義されている）への射影と両立しうるものであるとき，このカタストロフKは1つのクレオド（chréode）（C.H. Waddington の言葉）のカタストロフ集合とよばれる。

すべての科学的事実は実験的に再現可能といえるしたがって，すべての形態論的方法における科学的な所与は必然的に構造安定でなければならない；　したがって形態形成場；クレオドによって与えられると考えてよい。（このことは明らかに予見を可能とする。我々は記述の可能性と予見の可能性とを解離させることはできない。）或る種の研究においては実験者は実験を再現することは，空間的な距離の大きさまたは時間的なはなれかたの大きさによって不可能である（前者の例は天文学における形態であり後者の例は過去についての科学たとえば，地学，古生物学，历史などがそうである）。また医学や心理学におけるように倫理学的理由で再現不可能なこともある。しかしながら，このような事情の場合にもある種の典型的形態的変化が非常に多く繰返えされるとき，それらは形態形成場によってつくり出されたものであると見做してもよいであろう。このようにして実験的形態学に対してつくられたテクニックを拡張することができる。（その場合，仮定しなければならない補助的な仮説の部分を見失うことなしに。）

われわれにとっては状態 (α) を完全な正確さのもとで実現することは不可能であるし，また（箱Bの壁をどのように完全に洩らないようにしても）外の世界とこのシステムとの間

の相互関係が常に同じと仮定できるものでもない，したがって，同じ初期条件から2つの過程が形態学的に異なるものとなって現れることを覚悟しなければならない。一般に T_1 を十分長くとった場合におこることがらであり，今考えている科学的な研究における形態変化を得るのに差支えのないすべての方法で初期条件を変化させた場合得られる観察可能な形態変化のすべてをもつカタログを構成しておくことは興味あることである。このことを言語学における術語を用いて，今考えている分野の文例集(Corpus)をつくる，と云うことにしよう。このような文例集は一般に無限集合である。実用的理由から次のような場合有限な文例集で十分である。つまりその数が十分多く，新しい実験的形態変化が加ったときにも，それまでに存在する文例の集合の検査から出る性質を修正する必要がない場合である。（勿論，これは幾分の危険をおかすことになる。）

いづれにしても，上の文例集とは実験的又は経験的な形態変化を登録しておいたものに他ならない。これから一つの理論を引き出すためには，この集合を代数化（可能なとき）しておく必要がある。

有限型の形態論

形態論（形態変化の集合）は次のような場合有限型とよぶ：もしすべてのカタストロフ $K\alpha$ が局所的に坐標近傍の族 U_i でお

おわれ，且つ $K\alpha \cap U_i$ が基本的形態形成場によって U_i 中にあたえられ，その「場」は有限の"アルファベット"のカタログからとって来られたものである場合である。

例：言語学では，言語（書く場合も，話す場合も）学的形態学は有限型である。（次元は1であって且つ，有限個の文字乃至は音素（音韻）でもって生成されている。

条件つきクレオド

上に述べた文例集をしらべて見ると，しばしば或る種の基本的なクレオドの複合（aggregate）が大変よくあらわれており，一種の相対的な安定性を示していることが多い。また，次のようなこともたびたびおこる。すなわち，ある種の初期状態に関する制限（C）を正確にすることによりそれぞれが満されておる時には上のような基本的なクレオドが安定しておこるという場合である。こんな場合"条件つきのクレオド"について語ることができる。

条件つきクレオド(A)　は基本的クレオドのいくつかへの分解によって記述される。勿論上の坐標近傍 U_i（被覆の1つである）の間の結合関係をあたえねばならない。これが A の"構造"を定める。出来るならば，A を安定化するために初期条件に課すべき制限(C)を正確にするべきである。

例えば，言語学的な術語で，一つの「語」は一つの条件つき

クレオドであって，その構造は有限個の音素の列であたえられる。制限(c)これはこの語に起源をあたえるものであるが，これは意味作用と明らかに関係をもっている。つまり条件(c)は，1人の観客をしてその語を発せしめるようにしむける，環境におこつている時空的（又は人間的）現象を記述しているのである。

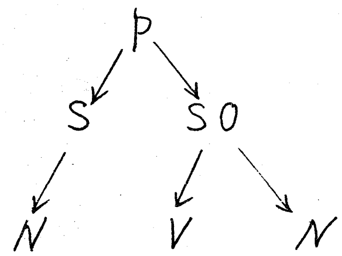
言語学におけるような1次元的形態変化においては，その代数化はたやすい，何故なら語（言語学で）はアルファベットの基本的音素によって生成される（単位元をもつ）自由半群の（代数的な意味での）語に他ならないからである（かくして我々は形式言語学にみちびかれる）。更に多次元の形態学については，一つのクレオドの記述の代数化は1次元の場合にくらべて大変むつかしい。カタストロフ理論だけが現在までのところこれをアタックする唯一の可能性を提供している。

組織のレベル

非常にしばしば，条件つきのクレオドは自然に組みあわせ的ないくつかのレベルを形づくっている。これは次のような意味である。各レベルには，これは一般には有限型であるが，単純化された形態変化の集合（$\mathcal{N}$）を定義することができるものであって，文例集にあるすべての形態の集合から上の単純化された形態の集合への準同形写

像Ψ が存在する。$\mathcal{N}$のすべてのクレオドのΨ による逆像は或る条件つきクレオドである。これは言語学におけると同様に生物学における″機能″(function)の概念をあきらかにしている。

例 言語学における文章構造. このモルフォロジーでの最も基本的な存在は、次のような文の構造から導びかれた木構造である。



かくして, すべての自然の文は自然に上の木構造の下のレベルの線にうつされ そのことによって, 各語はそれぞれ文法的なファンクション(又はカテゴリ)をもつことになるのである。

生物学における器官　ある1つの生物の大局的な調節は, いくつかの機能(ファンクション)に訴えておこなわれる. 食物補給, 運動, 呼吸, 再生, 排泄, その他である. したがって, 各器官が対応する機能へうつされるように, 組織(オルガニズム)は或る架空の組織にうつされる。

以上をまとめると, 形態の理論のプログラムは次のようになる。

1) 実験又は経験によって提供されたすべての形態変化の文例集(Corpus)をつくること。

2) そのような形態変化の集まり(morphologie)が有限型かどうかをチェックすること。もしそうなら基本的なクレオドの有限集合(アルファベット)のリストを作成すること。

3) 更に条件つきクレオドを定めてその集合に構造をいれて記述すること。またその安定性を保証する初期条件に課せられた制限をできるだけはっきりさせる。

4) 可能ならば,これらの条件つきクレオドの組織レベルを決定し,更に可能なら各レベルを特徴づける商の形態の集合($\mathcal{N}$)を明確にする。

かくして我々は記述の段階をおわり,次の「説明」の段階に進むのである。

II) 「説明」

大部分の実験学者は,〃実験をする〃ということの必要性については一点の疑念もさしはさまないときにも,得られた結果の「相対的重要性を判断する」又は「その適用の限界を明確にする」件に関しては幾分困惑している。つまり記述と説明の間の関係を定義し得るかどうかの問題はきわめてむつかしい。その場合,特殊な専門にとじこもっている専門家には不可能な或

る種の認識論的成熟が必要となってくる。

あらくいって，ある形態変化を「説明」することはそのことの原因を追求することである。したがって，すべての説明の試みには，一般に上の組織レベルの一つ下のレベルから，そのレベルに内在しているメカニズム又は決定論をはっきりさせたいという願望が存在している。そこで次の2つの科学的説明についてのアプローチの態度が哲学的には区別される。

α）還元論者的アプローチ

観察された形態変化を決定論的シェーマによって，その相互作用が再現するように“クレオド”のうちの基本的なものをとり出す（見分け）ことになる。言語学においては例えば，一人の真正の還元論者は文章構造（語順）を音素の間の相互関係によって説明することに努める。もうすこし正確に云うと言語の生成の状況によってそれを説明することができる。つまりその解剖学的，生理学的，心理学的，社会学的其の他の状況によってである。実際に経験的には，あきらかに言語的形態はその“意味論的”な局面において，それらが生成される状況に密接に関連しているわけである。一方生物学においては，還元論者はあるレベルの器官群についての構造を細胞のレベルでの相互作用によって，又は分子のレベルにおける相互作用によって説明しようと試みる（分子生物学）。理想

的にいえば，おのおのの理論において"アトム"を規定し，それの空間的な相互関係を記述し，更にその動きを規定する微分方程式を解かねばならぬ。還元論的アプローチは，なるほど理論的には完璧であるが，実際には次のようなよく知られた難点にぶつかっているのである：

1） あたえられた現象としての形態変化について，その説明をするときに，何をそれ以上還元できない最小単位の要素と見做すべきか？ 原子か？ 素粒子としては何故いけないのか？ どこまで還元すればとまるのか？

2） 上のアプローチで得られる微分方程式系の未知関数の数は恐ろしく多い（10^{23}？） また"アトム"の間の相互作用は近似的にしか知られないので，その微分方程式系を解くことは不可能である。（勿論，それが可能な唯一の場合が統計力学の場合であるが，そこでは均質性又はエルゴード性の仮説（ギッブスの定式化）をしなければならず，このことは完全気体の場合と同様に，そこにあらわれる一切の形態変化があらわれる余地をなくしてしまうのである）。

上のような難点の故に還元論的アプローチは，一寸望みを高く持ちすぎていると思われる。もうすこし，謙虚なプログラムとして，構造論的アプローチがある。

β) 構造論的アプローチ

このアプローチは先ず，「記述」の任意性を少くすることによって「記述」を改良することをねらう。理想的には，すべての経験的形態変化を公理論的に生成することであろうが，例えば形式言語学の場合などがそうであって，その場合には任意性は言語のベースとしての公理を与えるだけで消去することができるのである。

実際の場合，先ず各組織レベルにおいて，商としての形態論（$\mathcal{N}$）をはっきりさせることからはじめる。次に，このレベルから，すぐ下のレベルの要素の言葉でもって，文例集から $\mathcal{N}$ への準同型写像 Φ の核（noyau）をあらわすことに努力する。（例えば，発生学においては，ある器官形成域の成立又は分離を細胞の移動によって説明する。）しかし，言語学における，準同形写像 Φ（→ 文章構造への準同形）の核である意味論についてはあまりよくわかっていない。最後に商としての形態論（$\mathcal{N}$）に内在する代数的構造を正当化することに努力することになる。その場合，色々の専門において用いられている形態の間につくられるレベルの間の多くの同形写像が存在することを観察することによって達せられる。これらの同型写像は適当な数学的存在（グラフ，群，其の他）を導入することによって正当化される。

構造論的アプローチは人文科学（言語学，民族学等）において，いくぶんの成功をおさめることができる，けれどもその理論的基礎づけを正当化することには無力さを味わっている。つまり，あたえられた形態論を研究するために，とるべき対象としての数学的存在を何にとるべきか？　それがプラトンの形而上学やピタゴラスの形而上学でないとすればどのようにして，数学と現実の一致を示すべきか？　等という疑問がでる。

Ⅲ). カタストロフの理論

カタストロフの理論は次のようなごく平凡な注意から出発する。　つまり条件つきクレオドのすべては基質空間の連結領域（実際は一般に可縮（contractible））を台（support）としてもっている。（すべての"対象"は空間的に連結である)。

またこの理論は，これらの制限効果をクレオドの結合物($\mathcal{N}$)の上に反映することに努める。更に，この理論は機能の形態変化の集まり（$\mathcal{N}$）と考えているヒエラルキーのレベルの間にある組み合せ的な不変量（基体の性質にはよらない）が幾何学的またはトポロジー的でしかないことを確立する。そしてまた，これらの性質はすべてクレオドの台の連結性に由来していることが確証される。つまり，すべての相互作用は空間を求めての，

何ものかの斗争に由来しているという古いヘラクレイトスの考えである。

上のような作業のために，連結領域を関数の位相型の自己同型の空間と同一視する。更に，最小値にむかう点の領域はそれ自身一つの連結領域である。しかしながらカタストロフの理論のシェーマは属有性（généricité）の仮設（ポテンシャル V の普遍開析の分岐集合に対する横断性（transversalité））に関係している最適性の仮説（あるポテンシャルの勾配の力学系）によって，局所的に安定な形態的アクシデントの出現を説明できる。

<u>例</u>　生物学におけるオルガニズム.

われわれは，生命の物質代謝を一つの調節されたシステムと考える。つまりアナロジーとして，壁でかこまれその外は死の世界であるポテンシャルの井戸によって定義される。一つのオルガニズムの境界は上の壁の一つが低くなっている点の集合と考える。（したがってそこでは生命的な平衡の安定性が0であるしたとえば皮膚，そこでは細胞は角化（Kératinisation）によって死んでいっている。）

この理論によれば，時空空間における安定な形態的アクシデントの分類が可能となる（7つの基本的カタストロフ）。

勿論この理論には重大な制限（勾配の力学系に限られる）がついている。また，媒質の相（phase）による相違は考慮に入れていない。（この場合は局所的G対称性によるポテンシャルVの不変性の性質によっていいあらわせる。）それにもかかわらず，カタストロフ理論の現在の形で，すべての斗争の状況に内在する大きな定性的特色をひきだすことができるのである。この見方から，媒質の局所的性質を考えるためには更にいくぶんの修正を要するとしても，常に基礎となる役割を果たし続けるであろう。

カタストロフの理論はいまだそれ自身では科学的な理論とはいえないが，少くともモデルを形成する一つの方法を提案したのである。モデルの色々についてその間の比較の問題は，むつかしく，現在までに手がつけられていないむつかしい数学上の問題を提供するであろう。