数理解析研究所講究録
第198巻 1974年 24-27

W. Browder 教授講演記録

Manifold と homotopy theory

京都大学　西田吾郎 記

1. Smoothing PL-manifold. 多様体を, homeo, PL-home, diffeo. 等で分類する問題を考えるとき, 例えば有限表示をもつ任意の群πは, ある4次元多様体 M の $\pi_1(M)$ として実現されることなどから, 多様体にあらかじめいくつかの structure を仮定しておかなければならない. 例として, PL-manifold の smoothing を考える。 Milnor, Hirsch, Mazur, Cairns, Lashof. Rothenberg 等による解答は次のとおりである。

M^nを PL-manifold, τ_M を PL tangent bundle とする

定理. i) M が compatible smooth structure をもつ $\Leftrightarrow$ τ_M が linear bundle と PL-bdle として同値.

ii) M の smooth structure の concordance class の全体は, τ_M の linearization の equivalence class 全体と一対一~~無~~対応する。

2. Surgery theory. 一つのホモトピー型 X が与えら

たとき，いつ $X \underset{h.e}{\simeq} M$ (smooth manifold) となるかを考える。このような X は Poincaré space である。つまり

$^\exists [X] \in H_m(X)$, $[X]\cap ; H^q(X) \to H_{m-q}(X)$ は同型.

Poincaré space X 上には，Spivak normal fibre space $\xi ; E_0(\xi) \to X$ と，map $\alpha ; S^{m+k} \longrightarrow T(\xi) = X \cup CE_0(\xi)$ が存在し，α_* は H_{m+k} 上で degree 1 である。またこのような (ξ, α) は fibre homotopy equivalence を除いて unique である。smooth manifold M に対し，$h ; M \xrightarrow{\simeq} X$ ならば，$\nu_M \to \xi$ は fibre homotopy equivalence. 従って ξ は linearization をもつ.

Surgery exact sequence

$\mathcal{S}(X) = \{(M^m, h) ; M : \text{smooth},\ h ; M \xrightarrow{\simeq} X\}/\text{concordance}$

$\mathcal{L}(\xi) = \{\text{equiv. class of linearization of } \xi\} = [X, G/O]$

また，X はすべての local coefficient system に対して Poincaré duality をみたすとし，$\pi_1(X)=\pi$, $m=\dim X \geq 5$ とする。このとき，次の exact sequence がある。

$$L_{m+1}(\pi) \overset{\omega}{\dashrightarrow} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} \mathcal{L}(\xi) \xrightarrow{\sigma} L_m(\pi)$$

ここで，$L_i(\pi)$ は Wall 群で，ω は $L_{m+1}(\pi)$ の $\mathcal{S}(X)$ への作用である。

3. Kを compact Lie group. Kの作用 $K\times X\to X$ をもつ空間を K-space という。

Def. equivariant map $f;\ X\longrightarrow Y$ が isovariant とは、$K\ni g$, $X\ni x$ に対し、$gf(x)=f(x)\Rightarrow gx=x$ になることをいう。

Def. $K\supset H$ に対し、$\{H\}$ を H の conjugacy class とする。$X^{\{H\}}=\{x\in X\ ;\ \{K_x\}>\{H\}\}=GX^{H}$ とおく。Category $\mathcal{C}_K$ を、object は、K-space X で $^{\forall}H'\subset{}^{\forall}H\subset K$ に対し、$X^{\{H\}}\subset X^{\{H'\}}$ が linear K-normal bundle をもつものとし（この bundle を $\nu_{H,H'}$ とする）、morphism $f;\ X\to Y$ は isovariant map で $f|_{E(\nu_{H,H'})}$ が linear bundle map となるものと定義する。

Def. $\mathcal{S}_K(X)=\{(M,h)\ ;\ M$ は smooth K-manifold, $h;\ M\to X$ は $\mathcal{C}$ における homotopy equivalence$\}/\sim$.
ここで $(M_0,h_0)\sim(M_1,h_1)\Leftrightarrow{}^{\exists}F;\ W\longrightarrow X\times[0,1]$ homotopy equivalence in $\mathcal{C}$, $\partial W=M_0\cup M_1$, $F|_{M_i}=(f_i,i)$ である。

定理. Xを smooth K-manifold で、smallest isotropy subgroup Eに対し、$\dim X^{\{E\}}/K\geq 5$ とする。このとき exact sequence

$$L_{m+1}(X) \to \mathcal{S}_K(X) \longrightarrow [X/K, G/O] \to L_m(X)$$

が存在する。ここで L_m は $\mathcal{C}_K \longrightarrow \mathcal{Ab}$ なる covariant functor で、

i). periodic mod 4 in m.

ii) $f: X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}_K$ が、すべての orbit type の π_1 の同型をみちびけば、$f_*: L_m(X) \longrightarrow L_m(Y)$ は同型.

$L_m(X)$ の一つの幾何学定義は、

$$L_m(X) = \{(W, f);\ f: W \longrightarrow X \times [0.1] \text{ in } \mathcal{C}_K,\ \partial W = X \cup X',\ f|_X = id,\ f|_{X'} \text{ は homotopy equivalence}\}/\sim$$

で与えられる。また、次の exact sequence がある。$H \subset K$ を largest ~~isotro~~ isotropy subgroup とすると、

$$L_m(X - X^{\{H\}}) \to L_m(X) \to L_m(X^{\{H\}}) \to L_{m-1}(X - X^{\{H\}})$$

ここで、$X^{\{H\}}$ は 1 orbit type で $X - X^{\{H\}}$ は X より orbit type が一つ少くなっている。