数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 38-41

位数 p^n の f.p.f.a を持つ群について

阪大 理 松山 広

§0

1960 年代の初めに，次の様な予想が立てられた。

「$\mathrm{Aut}(G) \supseteq A$, $C_G(A)=1$, $|A| = p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$

$\left\{ \begin{array}{l} (|A|, |G|)=1 \\ \text{or } A=\text{cyclic} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ $G=$ solvable かつ $\mathrm{nilp}(G) \leq \sum_{i=1}^{s} a_i$ 」

Thompson による Frobenius 予想の解決以来，A に，具体的な形を与えた様々な結果が得られたが，一般的な解決には至っていない。例えば，A が素数巾位数の cyclic 群としても，"$n=1$"，"$p=2$ かつ $n=2$" 以外の Case では，G の可解性は示されていない。しかし，G を可解群とすると，nilpotent length の方は，Hoffman [1]，Shult [2]，Gross [3] により，"$p=2$ かつ G の Sylow q-subgroup が nonabelian for some $q=$ Mersenne prime $\in \pi(G)$" 以外の Case では，予想の正しいことが示されている。$A \cong Z_p \times \cdots \times Z_p$ のときは，Martineau [4]，[5]，[6] により，$A \cong Z_{rs}$ $(r \neq s)$ のときは，

Ralston[7]により、それぞれGの可解性が示されている。

§1.

ここでは、標題とは関係の無い次の事実と証明の概略を紹介する。

Prop.

イ) $\pi(G) \ni {}^{\exists}p_1, {}^{\exists}p_2, {}^{\exists}p_3$ = distinct primes such that

$\#\{Syl_{p_1}(G)\} = p_2$巾, $\#\{Syl_{p_i}(G)\}$ = 素数巾 $i=1,2$

$\Rightarrow {}^{\exists}j \in \{1,2,3\}$ s.t. $\langle Syl_{p_j}(G)\rangle \underset{\neq}{\trianglelefteq} G$

ロ) $\#\{Syl_p(G)\}$ = 素数巾 for any $p \in \pi(G)$

$\Rightarrow G = solv.$

証明の概略。

イ) $P_1 = S_{p_1}$ of G とする。$N = N_G(P_1)$ とおく。$N \neq G$ としてよい。

$P_2 = S_{p_2}$ of G とすると、仮定から、$G = NP_2$ と書ける。

${}^{\exists}P_3 = S_{p_3}$ of G s.t. $P_3 \leq N$. もし、$\#\{Syl_{p_3}(G)\} \neq p_2$巾 なら

$P_3^G \trianglelefteq N$ より、よい。よって $\#\{Syl_{p_3}(G)\} = p_2$巾 としてよい。

$\#\{Syl_{p_2}(G)\} \neq p_i$巾 for some $i \in \{1,3\}$.

$\therefore N_G(P_2) \supseteq {}^{\exists}\hat{P}_i = S_{p_i}$ of G.

よって、 $\hat{P}_i^G \subseteq N_G(P_2)$ よりよい。

ロ) $\#\{\pi(G)\} \geq 3$ by Burnside. 但し、G = minimal な反例。

イ)より、Proper normal subgp N がある。($N \neq 1$)

N と G/N がまた、仮定を満足することを示せばよい。

§2.

ここでは，$A \cong Z_{p^n}$ のとき，G の構造が非常に制限されるであろうという予想を述べ，強い条件つきではあるが，その予想の正しいことを示す。（Aは§Cのと同じ。）

[3]および[4]などから，次の様なことが自然に予想される。

予想1　$A=\langle\phi\rangle \cong Z_{p^n}$，$n=2$ or $p=\mathrm{odd}$ ならば，

$G=F(G)C_G(\phi^{p^{n-1}})$ と書けるか？

Prop. I.　(for any prime p)

$G/F(G)$ の Sylow q-subgroup = abelian for $\forall q \in \pi(G)$

$\Rightarrow$ $G=F(G)C_G(\phi^{p^{n-1}})$

Prop. 2.　G=solvable とする。

$n=1,2$ or $p=\mathrm{odd}$ ならば，$G=F(G)C_G(\phi^{p^{n-1}})$

Cor. 3.　(Prop. 2 と同じ仮定のもとに)

i)　$[G,\phi^{p^{n-1}}]$ = nilpotent

ii)　$G=F_k(G)C_G(\phi^{p^{n-k}})$　$(k=1,\cdots,n)$　$F_k(G)$ = 第k Fitting

iii)　$G^{(l(p))}$ = nilpotent，if $n=2$．

但し，$l(p)$ = Max{位数 p の f.p.f.a を持つ群の交換子群列の長さ}

証明の概略および注意

Prop. I については"Scimeni [8]"や"Grün による Focal 群についての結果"を用いて容易に証明できる。Prop. I が $p=2$

でも成立することは、次の予想を導く。

予想「$A \simeq Z_{2^n}$, $\bar{G}$ の Sylow q-subsp. = abelian for any q = Mersenne prime $\in \pi(\bar{G})$, (但し, $\bar{G} = G/F(G)$).

ならば、$G = F(G) C_G(\Phi^{2^{n-1}})$ となるか?」

Prop. 2 は [3] を用いて、Prop I とほぼ同様にして証明できる。Cor 3 はすべて明白だが、i) は、$C_G(\Phi^{p^{n-1}})$ が G の生成に関係しないとき、即ち、$\Phi^{p^{n-1}}$ が G に疑似的に f.p.f. a として act すると、G = nilpotent になることを示している。また ii) では、$K = n$ とすると、$G = F_n(G)$ となり、nilp$(G) \leq n$ を示している。iii) は、Ward [9] を改良した結果になっている。

—終—

参考

[1] Hoffman Math. Z. 1964

[2] Shult Ill. Jour. Math 1965

[3] Gross Proc. A.M.S. 1966

[4] Martineau Math. Z. 1972

[5] 〃 Quart. J. Math 1972

[6] 〃 Math. Z. 1973

[7] Ralston Jour. of Alg. 1972

[8] Scimemi Jour. of Alg. 1968

[9] Ward. J. Austral. Math. Soc. 1969

了.