数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 42-44

2-local cores of finite groups

北大　大学院　林　誠

§1　序

“有限群Gが次の3つの条件；(i) Gは balanced group (ii) $SCN_3(G)_2 \neq \phi$ (iii) $O(G)=1$ を満たしているとき、Gの 2-local core は1である。”これは、D. Goldshmidt D. Gorenstein 等に依り得られた 2-signalizer functor に関する有名な結果ですが、こゝでは balanced group である為の1つの条件について考えてみたいと思います。

以下、記号は一般的なものを用ねます。(例えば、D. Gorenstein 著“Finite Groups”を参照して下さい。)

尚、$(G)_p$ に依りGの或る Sylow p-subgroup を表わすことにします。

§2 命題とその証明の概略

有限群の族 $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{X}$ を次の様に定義します。

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{ll} L_2(q) & q \text{ は奇数でフェルマ素数でもメルセヌ素数でも } 9 \\ & \text{でもない。} \\ U_3(q) & q \text{ は、フェルマ素数亦は } 9 \\ A_7 & \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{M} = \{ M \,/\, M/(Z(M))_2 \simeq L \times L \times \cdots \times L \qquad L \in \mathcal{L} \}$$

$$\mathfrak{X} = \left\{ X \,/\, H/O(H) \ntrianglerighteq M \quad \text{for any 2-local subgroup } H \text{ of } X \right\}$$

命題： $\mathfrak{X} \ni X$ ならば X は balanced group

証明の概略：(1) X の任意の 2-local subgroup は $\mathfrak{X}$ に入る。

もし $\mathfrak{X} \not\ni H = N_X(T)$ とすると、$\mathfrak{X}$ の定義より H の 2-local subgroup $H_0 = N_H(T_0)$ で $H_0/O(H_0) \trianglerighteq \overline{M}_0$ $\overline{M}_0 \in \mathfrak{M}$ となるものが存在する。$\overline{M}_0$ の H_0 への逆写像を M_0 とおく。M_0 の任意の奇数位数の部分群 K は TT_0 に作用して、

$$[TT_0, K] = [TT_0, K, K] \subseteq [O_2(M_0), K] \subseteq O_2(M_0) \cap O(M) = 1$$

となり $K \subseteq C_X(TT_0)$

K の任意性より $O^{2'}(M_0) \subseteq C_{M_0}(TT_1)$

$C = C_X(TT_0) \subseteq H$ と $O^{2'}(M_0)$ char $M_0 \triangleleft H$ より $O^{2'}(M_0) \triangleleft C$

依って $O(M_1) \subseteq O(C)$ より $\overline{M_1} \lhd \overline{C}$

ここで、$\overline{C} = C/O(C)$, $\overline{M_1}$は$O^{2'}(M_0)$の$\overline{C}$への準同型像

このとき $O^{2'}(M_0) \in \mathfrak{M}$ 且つ $C \lhd N_X(TT_1) = N$ であるから

$\mathfrak{M}$の定義より、$\mathfrak{M}$の元$\overline{M_2}$が存在して$\overline{M_2} = N/O(N)$ となり、これは$\mathfrak{X} \ni X$ に矛盾する。依って(1)が成立。

(2) $Z(X) \supseteq Z$ とすると X/Z は$\mathfrak{X}$に入る。

もし$\mathfrak{X} \not\ni \tilde{X} = X/Z$ とすると、$\tilde{X}$の 2-*local subgroup* $\tilde{H} = N_{\tilde{X}}(\tilde{T_0})$が存在して、$\overline{\tilde{H}} = \tilde{H}/O(\tilde{H}) \rhd \overline{\tilde{M}}$ ここで $\overline{\tilde{M}} \in \mathfrak{M}$

このとき $\tilde{T_0}$ の X への逆写像をT_0, $H = N_X(T_0)$ $\tilde{M}$ を$\overline{\tilde{M}}$の$\tilde{H}$への逆写像、Mを$\tilde{M}$のXへの逆写像とすると、$H \rhd M$ 且つ $M/O(M) \in \mathfrak{X}$ 。 $O(M) \subseteq O(X)$より $H/O(H) \rhd M/O(H) \in \mathfrak{X}$ となり、これは$\mathfrak{X} \ni X$ に矛盾。

(3) X を命題の極小反例群とすれば $O(X) = O_2(X) = 1$

$O(X) = 1$ は明らか。もし $O_2(X) \neq 1$ とすると $X_0 = C_X(O_2(X)) \in \mathfrak{X}$ であり、X の 2-*local core* がX_0に入ること及び $Z(O_2(X)) \subseteq Z(X_0)$ に依り $X/Z(O_2(X))$ に帰納法を適用して命題が成立。依って $O_2(X) = 1$。

最後にXの各 2-*local subgroup* が$\mathfrak{X}$に入ることより、各 2-*local subgroup* に帰納法を適用して *balance condition* の成立を容易に確かめることができる。