数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 52-55

多重可移置換群について

東大 理　坂内英一

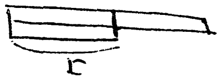
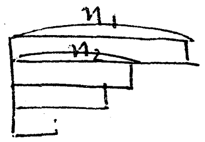
多重可移群に関して、いくつかの得られた結果について報告します

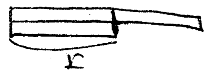
1° 多重可移群の正規部分群についての A.Wagner: Normal subgroups of triply transitive permutation groups of odd degree, Math. Zeit 94(1966). 219-222. N. Ito: Normal subgroups of quadruply transitive permutation groups, Hokkaido J. 1 (1972) 1-6. の拡張.

定理1 (character theory に関する部分の拡張)　$G = 2r$ 重可移 $(r \geq 2)$ on $\Omega = \{1, \cdots, n\}$. $n > 2r+1$. $H \lhd G$, $H \neq 1$. $H_{1,2,\cdots,2r-1}$ の $\Omega - \{1, 2, \cdots, 2r-1\}$ 上の orbits の個数 $= s$

$$\Longrightarrow 1)\quad \Big(\chi_{\substack{\boxed{}\\ \underbrace{\boxed{}}_{r}}},\ \chi_{\substack{\boxed{}\\ \underbrace{\boxed{}}_{r}}}\Big)_H = s$$

2) $(X_D, X_D)_H = 1$

(ここでDは  とは異なる任意の dimension $\leq r$ の Young diagram をあらわす. なお X_D は Young diagram D により決まる S_n の既約指標をあらわす. Young diagram D =  の dimension を $n_2 + n_3 + \cdots$ で定義する)

3) X  $\Big|_H = \chi_1 + \cdots + \chi_s$

($\chi_1, \cdots, \chi_s$ は相異なる H の既約指標)

4) $\chi_1, \cdots, \chi_s$ は全て第一種, i.e., 表現は全て $\mathbb{R}$-realizable.

(注：上の結果 $(r \geq 4)$ はもう少し弱い仮定のもとで. e.g. $H = 2r-1$ 重可移群, $H_{1,\cdots,2r-1}$ の $\Omega - \{1, \cdots, 2r-1\}$ 上の全ての orbits が <u>self-paired</u> の場合にも成り立つ.)

<u>定理2.</u> $G = t$ 重可移 $(t \geq 4)$ on $\Omega = \{1, \cdots, n\}$, $n > t+1$. q = odd prime s.t. $q \mid t-1$. $1 \neq H \lhd G$. 更に

(1) $q \nmid n$.

(2) $|G:H| = H_{1,\cdots,t-1}$ の $\Omega - \{1, \cdots, t-1\}$ 上の orbits の個数

$\Longrightarrow G = H$.

系1. $G=t$重可移 $(t\geq 4)$ on $\Omega=\{1,\cdots,n\}$. $n>t+1$.
$q=$ prime s.t. $q\mid t-1$. $1\neq H\triangleleft G$ 更に.
(1) $q\nmid n$.
(2) $G/H=$ solvable
$\Longrightarrow$ $H=t$重可移 on Ω

系2. $t=6,8$ の時は上の系1は $G/H=$ solvable という仮定(2)なしに成り立つ.

系3 $G=$ 素数次の non-solvable t重可移群 $(\forall t)$
$1\neq H\triangleleft G \Longrightarrow H$ も t重可移.

2° 多重可移群の分類問題に関しての. M. Hall: On a theorem of Jordan, Pac. J. Math 4 (1954), 219-226. H. Nagao: On multiply transitive groups V, J. of Alg. 9 (1968), 240-248. の任意の odd prime の場合（但し多重度は上がるが）への拡張.

定理3. $p=$ odd prime. $G=p^2$重可移 on $\Omega=\{1,\cdots,n\}$
$G_{1,\cdots,p^2}$ の Sylow p-subgroup は $\Omega-\{1,\cdots,p^2\}$ 上 semi-regular $(\neq 1)$
$\Longrightarrow$ $n=p^2+p$, $G\geq A^\Omega$

系 $p=$ odd prime. $G=t$重可移 on $\Omega=\{1,\cdots,n\}$.
$G\not\geq A^\Omega$. かつ $G_{1,\cdots,t}$ の order は p でわれない

$\Longrightarrow\ t < p^2 + p$

この系に対応することは最近宮本泉君により本質的に拡張された。

<u>定理（宮本）</u> $p = \text{odd prime}$. $G = t$重可移 on Ω. $G \neq A^{\Omega}$ かつ $G_{1,\dots,t}$ の order は p で割れない

$\Longrightarrow\ t < 3p$

（注：この $3p$ は実は $2p+m$，（但 $m/p \to 0$ as $p \to \infty$）まで落とすことが出来る。）

なお，大山先生の（4重可移群の）$p=2$ に関連した分類を $p = \text{odd prime}$（但，多重度は増えるが）の場合に拡張することも色々と可能である。

<u>追記</u>，なお，この講演のあと，次の結果が証明できた。

<u>定理</u>． $p = \text{an odd prime}$. $G = 2p$重可移 on $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. $p \nmid |G_{1,2,\dots,2p}|$, $p^2 \mid |G_{1,2,\dots,p}|$ $\Rightarrow$ 矛盾．

これは先の宮本君の結果を合わせることにより，<u>$2p$重可移群で $2p$ 点の stabilizer の order が p で割れないような群の分類が完成する</u>．