数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 79-80

有限群の自己同型と固定点

東大教養　近藤武

P. Martineau は次の定理を証明した。

定理. G を有限群 A を G の自己同型群の部分群で基本可換群とする。$C_G(A)=1$ ならば G は可解である。

ここでは次の結果が上の定理の簡単な系である事を示す。

定理. G を有限群 A を G の自己同型群の部分群で基本可換群 A の位数が p のべきとする。A の指数 p の任意の部分群 V に対して $C_G(V)$ が G の巾零な部分群とする。この時 G は可解である。

証明. $|G|$ に関する帰納法で証明する。従って次の事を仮定して良い。

(α) G の A 不変な真部分群は可解

(β) G の A 不変な真の正規部分群をもたない。

Martineau の定理により $C_G(A)\neq 1$ としてよい。$|C_G(A)|$ を割る素数 q を取る。r を $|G|$ を割る q と異なる任意の素数とし、Q, R をそれぞれ G の A 不変な q-Sylow 群, r-Sylow 群

とする。このとき

$$R = \langle C_R(V) \mid [A:V]=p \rangle \qquad (*)$$

$C_G(V) \supseteq C_R(V), C_Q(A)$ で $C_G(V)$ は仮定により巾零だから

$$[C_R(V),\ C_Q(A)] = 1 \qquad (**)$$

(*)により

$$[R,\ C_Q(A)] = 1$$

帰納法により　$C_G(C_Q(A))$ は可解

(**)により　$C_G(C_Q(A))$ は G の A-不変な部分群 L で

$G = QL$, $Q \cap L = 1$ なるものを含む。この時

$$\bigcap_{x \in G} Q^x = \bigcap_{y \in L} Q^y$$

(**)により　$\bigcap_{y \in L} Q^y \supseteq C_Q(A)$.

$$\therefore \quad G \trianglerighteq \bigcap_{x \in G} Q^x = \bigcap_{y \in L} Q^y \supseteq C_Q(A) \neq 1$$

即ち G は A 不変な真の正規部分群を含む事になり(β)に反す.

(終り)