数理解析研究所講究録
第 201 巻 1974 年 6-18

6

実解析解の semi-local な存在について

東京教育大 理 鈴木文夫

§1. 序. P を実解析多様体 M で定義された解析的係数の線形偏微分作用素とする. $\mathcal{A}$ を実解析函数の層, $\mathcal{A}_x$ を x における $\mathcal{A}$ の stalk とすれば, Cauchy-Kowalewski の定理により, P の principal symbol $p(x,\xi)$ が $\neq 0$ であるような点 $x \in M$ において

$$P\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_x$$

である. しかし, 一般には, これから x の任意の近傍 U に対して, x の近傍 $V \subset U$ が存在して

$$P\mathcal{A}(V) \supset \mathcal{A}(U)$$

となるとは言えない. 実際, Hörmander は [2, Th. 6.1.4] において次の事を証明した. P を $M \subset \mathbb{R}^n$ で定義された解析的係数の1階作用素とする. p と $\overline{p}$ の commutator を $[p, \overline{p}]$ とし, $c_1 = i[p, \overline{p}]$ とおく.

$$p(x,\xi) = 0 \quad \text{かつ} \quad c_1(x,\xi) < 0$$

となる $(x,\xi) \in M \times \mathbb{R}^n$ が存在すると仮定する. このとき,

$\varepsilon > 0$ が存在して

$$P\mathcal{D}'(M) \not\supset H_{\xi,\varepsilon}$$

となる．ここで $H_{\xi,\varepsilon}$ は $\{z \,;\, z \in \mathbb{C}^n,\ \langle \mathrm{Im}\, z, \xi \rangle < \varepsilon\}$ で *holomorphic* な函数の空間である．後に，P. Schapira [4] は，解析的係数の1階作用素 P について，次の2条件が同値であることを証明した．

(a) $x \in M$ の近傍 V で，すべての $\varepsilon > 0$ に対して，

$$P\mathcal{B}(V) \supset H_\varepsilon$$

となるものが存在する．ここで H_ε は $\{z \,;\, z \in \mathbb{C}^n,\ |\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon\}$ で *holomorphic* な函数の空間である．

(b) P は x の近傍で *Nirenberg-Treves* の条件（§2を見よ）をみたす．

さて，M の点 a の任意の近傍 U に対して，a の近傍 $V \subset U$ が存在して

$$P\mathcal{A}(V) \supset \mathcal{A}(U)$$

となるとき，a の近傍で実解析解が *semi-local* に存在するということにしよう．ここでは *semi-local* な存在について，次の定理を証明する．

<u>定理</u>．M の次元が2，P の階数が1のとき，M の各点の近傍で実解析解が *semi-local* に存在するための必要十分条件は，M において *Nirenberg-Treves* の条件が成り立つこ

とである.

§2. 準備. P は2次元実解析多様体 M で定義された解析的係数の1階偏微分作用素とする. $\tilde{M}$ を M の複素近傍とし, P を $\tilde{M}$ まで解析的に延長した作用素も P で表わす. $\mathcal{A}$ は M の上の実解析函数の層, $\mathcal{O}$ は $\tilde{M}$ の上の holomorphic な函数の層とする.

<u>命題</u> 2.1. $a \in M$ の近傍において実解析解が semi-local に存在するための必要十分条件は, a の任意の実近傍 U に対して, a の実近傍 $V \subset U$ が存在し, U の任意の複素近傍 $\tilde{U}$ に対して, V の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ で

$$P\mathcal{O}(\tilde{V}) \supset \mathcal{O}(\tilde{U})$$

となるものが存在することである.

証明. 十分性は明らか. 必要性を証明する.

$$P\mathcal{A}(V') \supset \mathcal{A}(U)$$

となる a の実近傍 $V' \subset U$ が存在する. $V \subset\subset V'$ となる a の実近傍 V を取る.

$$\tilde{V}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^n ;\ \mathrm{Re}\, x \in V,\ |\mathrm{Im}\, x| < \varepsilon\}$$

とおけば, V' の任意の複素近傍 $\tilde{V}'$ に対して, $\tilde{V}_\varepsilon \subset \tilde{V}'$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する. 従って, U の任意の複素近傍 $\tilde{U}$ に対して,

$$\bigcup_{\varepsilon} P\mathcal{O}(\tilde{V}_\varepsilon) \supset A(U) \supset \mathcal{O}(\tilde{U}).$$

Grothendieck ([1], p.16) により，ある $\varepsilon > 0$ に対して，$P\mathcal{O}(\tilde{V}_\varepsilon) \supset \mathcal{O}(\tilde{U})$ となる．

Semi-local な問題においては，P は 0 階の項を持たないと仮定しても一般性を失わない．以下 $P = p$ とする．

M の局所座標系を複素近傍まで解析的に延長したものを $\tilde{M}$ における実座標系と呼ぶことにする．複素曲線 C と M との $a \in M$ における接触次数を次のように定義する：C が $y = \varphi(x)$ の形に表されるような任意の a を中心とする実座標系 (x, y) について，

$$\begin{aligned} Im\, \varphi^{(j)}(0) &= 0, \quad j = 0, \cdots, k, \\ &\neq 0, \quad j = k+1 \end{aligned}$$

であるとき，C は点 $a \in M$ において M と k 次の接触をするという．すべての j について，$Im\, \varphi^{(j)}(0) = 0$ のときは，接触次数は ∞ とする．このとき C は実曲線である．

点 $a \in M$ を中心として実座標系 (x, y) を $Px \neq 0$, $Py \neq 0$ かつ $Re(Py/Px) \neq 0$ となるように取る．t を $Pt = 0$ の解析的解で，$t(a) = 0$ かつ $dt(a) \neq 0$ となるものとする．複素曲線 C_t：$t = const$ は P の特性曲線である．dx と dt は独立であるから，(x, t) は a を中心とする一つの複素座標系である．この座標系においては $P = (Px)\partial/\partial x$

である．座標系 (x,y) における C_t の方程式を $y=\psi(x,t)$ とする． x の実部を x'，虚部を x'' とする．

$$\frac{\partial}{\partial x''} Im\,\psi = Re\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = Re\,\frac{Py}{Px} \neq 0$$

であるから， $Im\,\psi(x'+ix'', t)=0$ を x'' について解いて， $x''=\xi(x',t)$ とすることができる．以上をまとめて

命題 2.2. M の各点 a において， a の複素近傍 $\tilde{W}$ と， $\tilde{W}$ で定義された a を中心とする実座標系 (x,y) と複素座標系 (x,t) とを次のように取ることができる．

(i) $\qquad Pt=0$ ，

(ii) 座標系 (x,t) により $\tilde{W}$ に対応する $\mathbb{C}^2$ の領域は， $X\times T$， $X=X'\times iX''$， X', X'' は $\mathbb{R}$ の開区間，T は $\mathbb{C}$ の開集合，という形である．

(iii) $X'\times T$ で定義され，X'' の値を取る函数 $\xi(x',t)$ が存在し， $\tilde{W}$ においては

$$Im\,y=0 \iff x''=\xi(x',t).$$

このような $\tilde{W}$ は任意に小さく取ることができる．

C_t と M が交わるとき，接触次数を k とすれば，交点において，

$$\mathrm{Im}\,\frac{\partial^j\varphi}{\partial x^j} \begin{cases} = 0 , & j = 0, \cdots, k, \\ \neq 0 , & j = k+1, \end{cases}$$

であるから，

$$(2.1) \qquad \frac{\partial^j\xi}{\partial x'^j} \begin{cases} = 0 , & j = 0, \cdots, k, \\ \neq 0 , & j = k+1, \end{cases}$$

である．

さて，M が 2 次元のとき，*Nirenberg-Treves* の条件 [3] は次の条件と同値である：

“M の各点において，P の複素特性曲線と M との接触次数は偶数，或は ∞ である．”

更に [5] において，次の事が証明されている．

<u>命題</u> 2.3. M において *Nirenberg-Treves* の条件が成り立つための必要十分条件は，M の各点の近傍で，特性曲線はその上に高々一つの実点しか持たないか，或は実曲線になることである．

命題 2.2 の $\xi(x', t)$ について言えば，上の条件は次のようにも表わせる．

(iv) 各 $t \in T$ について，x' の函数として $\xi(x', t)$ は高々 1 つの零点しか持たないか，或は $\equiv 0$ となる．

§3. 十分性の証明.

M において Nirenberg-Treves の条件がみたされていると仮定する. M の点 a の任意の実近傍 U に対して, a の複素近傍 $\tilde{W}$ を命題 2.2 と 2.3 の条件をみたし, かつ $V = \tilde{W} \cap M \subset\subset U$ となるように取る.

$\tilde{W}$ の点で不等式

$$|x''| < \varepsilon \ , \ |x'' - \xi(x', t)| < \varepsilon$$

にみたすものの集合を $\tilde{V}_\varepsilon$ とする. $\tilde{V}_\varepsilon$ は V の複素近傍であり, かつ U の任意の複素近傍 $\tilde{U}$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば, $\tilde{V}_\varepsilon \subset \tilde{U}$ となる. 従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, V の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{V}_\varepsilon$ で, $P\mathcal{O}(\tilde{V}) = \mathcal{O}(\tilde{V})$ となるものが存在することを証明すれば, a の近傍における semi-local な存在が言える. これを証明するには, 任意の $t \in T$ について, $\tilde{V} \cap C_t$ が単連結であることを示せば十分である [5], [6].

V の各点 b において, 次の2つの場合が考えられる:

(I) b を通る特性曲線 $C_{t(b)}$ は唯一つの実点 b を持つ.

即ち, $\xi(x', t(b))$ は唯一つの零点 $x'(b)$ を持つ.

(II) b を通る特性曲線 $C_{t(b)}$ は実曲線である.

即ち, $\xi(x', t(b)) \equiv 0$.

(I) の場合，$\xi(x', t(b))$ の零点の次数が有限かつ奇数であることに注意すれば，$t(b)$ の開近傍 $N_b \subset T$ と $\delta(b)$，$0 < \delta(b) \leqq \varepsilon$，が存在して，$t \in N_b$ のとき，$\tilde{V}_{\delta(b)} \cap C_t$ は単連結である．(II) の場合も同様な N_b，$\delta(b)$ が存在する．

$$\tilde{V}_b = \bigcup \{ \tilde{V}_{\delta(b)} \cap C_t \,;\, t \in N_b \}, \quad \tilde{V} = \{ \tilde{V}_b \,;\, b \in V \}$$

とおけば，$\tilde{V}_b$ は b の開近傍，従って，$\tilde{V}$ は V の複素近傍で，$\tilde{V} \subset \tilde{V}_\varepsilon$ である．$\tilde{V} \cap C_t = \{ \tilde{V}_{\delta(b)} \cap C_t \,;\, N_b \ni t \}$ であるから，$\tilde{V} \cap C_t$ は単連結である．

§4．§5 における必要性の証明のための準備として，次の問題を考察する．$X_0 \subset \mathbb{C}^n$ は正則領域，X は X_0 の開部分集合，$P = \partial/\partial x_1$ とし，$P\mathcal{O}(X) \supset \mathcal{O}(X_0)$ となるための必要条件を求める．

$x \in X$ に対して，$X \cap \{ y \in \mathbb{C}^n \,;\, y_i = x_i,\ i = 2, \cdots, n \}$ の連結成分で x を含むものを L_x とする．同値関係 "$L_x = L_y$" に関する X の商空間を X/P，写像 $x \longmapsto L_x : X \to X/P$ を π と書くことにする．X/P には π が *submersion* となるような複素多様体の構造が一意的に存在する．但し X/P の位相は一般にはハウスドルフではない．$L_{0,x}$，X_0/P，π_0 も同様に定義する．

$\iota : X/P \to X_0/P$ を $\iota(L_x) = L_{0,x}$, $x \in X$, と定義する.
ι は local isomorphism である.

命題 4.1. X_0 が正則領域のとき, $P\mathcal{O}(X) \supset \mathcal{O}(X_0)$ ならば, $\iota^* : H^1(X_0/P, \mathcal{O}_{X_0/P}) \to H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P})$ は零写像である.

証明は [6] の Prop. 2.2 と同様である.

命題 4.2. Z, Z_0 は(必ずしもハウスドルフでない)1次元複素多様体, $\iota : Z \to Z_0$ は local isomorphism とする. $\iota^* : H^1(Z_0, \mathcal{O}) \to H^1(Z, \mathcal{O})$ が零写像ならば, Z の中には次のような条件をみたす道 α, β は存在しない.

(a) $\alpha(0) = \beta(0)$,

(b) $\iota(\alpha(s)) = \iota(\beta(s))$, $0 \leqq s < 1$,

(c) $\iota(\alpha(s)) \neq \iota(\alpha(1))$, $\iota(\beta(s)) \neq \iota(\alpha(1))$, $0 \leqq s < 1$,

(d) $\iota(\alpha(1)) \neq \iota(\beta(1))$.

証明. 条件 (a) ~ (d) をみたす Z の中の道 α, β が存在したとする. $a = \alpha(1)$, $b = \beta(1)$, $a_0 = \iota(a)$, $b_0 = \iota(b)$ とおく. t を a_0 を中心とする局所座標, U_0 をその座標近傍とする. $V_0 = Z_0 - \{a_0\}$ とおけば, V_0 は開集合であり, (d) より, b_0 は V_0 に属する. さらに, $U_0 \cup V_0 = Z_0$ かつ $U_0 \cap V_0 = U_0 - \{a_0\}$ である. $U = \iota^{-1}(U_0)$, $V = \iota^{-1}(V_0)$ とおく. 次の可換な図式において, 行は exact

である (Mayer-Vietoris).

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(U_0)\oplus\mathcal{O}(V_0) & \to & \mathcal{O}(U_0\cap V_0) & \to & H^1(Z_0,\mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \iota^* \\ \mathcal{O}(U)\oplus\mathcal{O}(V) & \to & \mathcal{O}(U\cap V) & \to & H^1(Z,\mathcal{O}) \end{array}$$

$h_0 = 1/t$ とおけば, $h_0 \in \mathcal{O}(U_0\cap V_0)$. 従って, ι^* が零写像ならば, $f\in\mathcal{O}(U)$, $g\in\mathcal{O}(V)$ が存在して, $U\cap V$ において, $f-g=\iota^*h$.

函数 u の点 z における芽を u_z と書くことにする. $\iota: Z\to Z_0$ は local isomorphism であるから,

$$\tilde{\iota}(u_z) = (u\circ\iota^{-1})_{\iota(z)}$$

により, 写像 $\tilde{\iota}: \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_{Z_0}$ を定義することができる. $\mathcal{O}_{Z_0}$ の中の道 $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ を

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\iota}(g_{\alpha(s)}),\quad \tilde{\beta}(s)=\tilde{\iota}(g_{\beta(s)}),\quad 0\leqq s<1,$$

と定義する. (b) により, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は Z_0 の中の同じ道の上にある. さらに, (a) より, $\tilde{\alpha}(0)=\tilde{\beta}(0)$. 解析接続の一意性により, $\tilde{\alpha}(s)=\tilde{\beta}(s)$, $0\leqq s<1$, となる. 従って, $g(\alpha(s)) = g(\beta(s))$, $0\leqq s<1$. s が 1 に十分近いとき, $\alpha(s)\in U\cap V$, かつ $f(\alpha(s))\to f(a)$, $g(\alpha(s))=g(\beta(s))\to g(b)$. 従って, $h(\iota(\alpha(s))) = f(\alpha(s)) - g(\alpha(s)) \to f(a)-g(b)$. 他方, $\iota(\alpha(s))\to a_0$ だから, $h(\iota(\alpha(s)))\to\infty$. 矛盾.

§5. 必要性の証明.

M において Nirenberg-Treves の条件が成り立たないとすると，M の或る点 a において，特性曲線の接触次数 k は有限かつ奇数である．a の複素近傍 $\tilde{W}$ と座標系 (x,y)，(x,t) を命題 2.2 におけるように取る．$U=\tilde{W}\cap M$，$\tilde{U}_\varepsilon=\{|x''|<\varepsilon,\ |x''-\xi(x',t)|<\varepsilon\}$ とおく．$\tilde{U}_\varepsilon$ は U の複素近傍である．命題によれば，a の任意の実近傍 $V\subset U$ に対して，$\varepsilon>0$ が存在し，V の任意の複素近傍 $\tilde{V}\subset\tilde{U}_\varepsilon$ に対して，$P\mathcal{O}(\tilde{V})\not\supset\mathcal{O}(\tilde{U}_\varepsilon)$ となることを証明すればよい．写像 $\tilde{V}/P\to\tilde{U}_\varepsilon/P$ を ι と書く．命題 4.1，4.2 によれば，$\tilde{V}/P$ の中に命題 4.2 の条件 (a)～(d) をみたす道 α,β が存在することを言えばよい．

(2.1) より

$$\xi(x',t'+it'')=at'+bt''+cx'^{k+1}.$$

ここで，係数 a,b,c は (x',t',t'') の解析函数で，

$(a_0,b_0)=(a(0,0,0),b(0,0,0))\neq(0,0)$，$c_0=c(0,0,0)\neq0$．

$c_0>0$ としよう．$k+1$ は偶数であるから，$\tilde{W}$ を十分小さく取っておけば，各 $t\in T$ に対して，$\xi(x',t)$ は X' においで最小値を取る．$t(s)=-(a_0+ib_0)s$ とおけば，$\min\{\xi(x',t(s))\,;\,x'\in X'\}$ は s の単調減少函数である．十分小さい s に対して，$\xi(x',t(s))$ は X' において2つの零

点 $x_1(s)$, $x_2(s)$ $(x_1(s) < x_2(s))$ を持つ. $x_1(0) = x_2(0) = 0$ とする. (x, t) 座標が $(x_1(s), t(s))$, $(x_2(s), t(s))$ の点を $\alpha'(s)$, $\beta'(s)$ とすれば, α', β' は U の中の道である. $\alpha'(0) = \beta'(0) = a$ だから, 十分小さい δ に対して, $\alpha'(s)$, $\beta'(s) \in V$, $0 \leqq s \leqq \delta$, である. $2\varepsilon = \min\{\xi(x', t(\delta))\,;\, x' \in X'\}$ とおく. V の任意の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{U}_\varepsilon$ に対して, 射影 $\tilde{V} \to \tilde{V}/P$ を π, $\alpha(s) = \pi(\alpha'(s))$, $\beta(s) = \pi(\beta'(s))$ とおく. $\alpha(0) = \beta(0)$ である. $\iota(\alpha(s))$, $\iota(\beta(s))$ は $\tilde{U}_\varepsilon \cap C_{t(s)}$ の $\alpha'(s)$, $\beta'(s)$ を含む連結成分であるから, $\iota(\alpha(s)) = \iota(\beta(s))$, $0 \leqq s < \delta$, かつ $\iota(\alpha(\delta)) \neq \iota(\beta(\delta))$ となる. $0 \leqq s < \delta$ のとき, $t(s) \neq t(\delta)$ だから, $\iota(\alpha(s)) \neq \iota(\alpha(\delta))$, $\iota(\beta(s)) \neq \iota(\alpha(\delta))$. QED.

参考文献

[1] Grothendieck, A.; *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Memoirs Amer. Math. Soc., No. 16, 1955.

[2] Hörmander, L.; *Linear partial differential operators.* Grundl. d. Math. Wiss., 116, Springer, 1963.

[3] Nirenberg, L. and F. Treves ; Solvability of a first order linear partial differential equation.
Comm. Pure Appl. Math. 14 (1963), 331-351.

[4] Schapira, P. ; Solutions hyperfonctions des équations aux dérivées partielles du premier ordre.
Bull. Soc. Math. France 97 (1969), 243-255.

[5] Suzuki, H. ; Local existence and analyticity of hyperfunction solutions of partial differential equations of first order in two independent variables.
J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 18-26.

[6] Suzuki, H. ; On the global existence of holomorphic solutions of the equation $\partial u/\partial x_1 = f$.
to appear in Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku.