数理解析研究所講究録
第201巻 1974年 126-141

ウルトラ超函数の構造

上智大 理工　森本光生

1° Vを$\mathbb{R}$上の有限次元ベクトル空間とする. $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ とおく.

$$S(V) = (V \setminus 0)/\mathbb{R}^+$$

と表わす. $S(V)$ は $(n-1)$-球面であり, Vの原点を端点とする半直線の"方向"の集合と考えられる. $S(V)$ の部分集合Γが凸であるとは $\Gamma \ni x, y$ なる任意の2点に対し x と y を結ぶ測地線をすべてΓが含むことをいう. もしΓが凸で対蹠点を1組含めば, $\Gamma = S(V)$ でなくてはならない.

$$V^{SC} = V \sqcup S(V)$$

をVのコンパクト化とする. Vの"無限遠"に$S(V)$をくっつけるのである. V^{SC}は閉球と同相となり, その内包がVと同相となるのである. また,

$$p' : V^{SC} \setminus 0 \longrightarrow S(V)$$

なる射影が存在する.

2° X を V の複素化としよう．すなわち

$$X = V \times \sqrt{-1}\,V .$$

$\mathcal{O}_X$ で X 上の整型（holomorphic）函数の芽の層を表わす．

$$\mathcal{B}(V) = H^n[V ; \mathcal{O}_X]$$

$$\mathcal{U}(V) = \lim_{\substack{G \subset X/V \\ G \text{ compact}}} \mathrm{ind}\ H^n[t_V^{-1}(G) ; \mathcal{O}_X]$$

但し，$t_V : X \longrightarrow X/V$ は標準的射影である．$t_V^{-1}(G)$ は，G を底とする柱状領域に他ならない．$\mathcal{B}(V)$，$\mathcal{U}(V)$ はそれぞれ V 上の超函数（hyperfunctions）の空間，ウルトラ超函数（ultra-hyperfunctions ultradistributions cohomologiques）の空間と呼ばれている．共に $\mathcal{O}(X)$－加群としての構造をもち，

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{U}(V)$$

なる $\mathcal{O}(X)$－加群としての完全列がある．

U を V の部分空間とする．

$$\mathcal{B}_V[U] = H^n[U ; \mathcal{O}_X]$$

とおくと，$\mathcal{B}_V[U]$ は U に台をもつ V 上の超函数の空間と一致する．

$$\mathcal{U}_V[U] = \lim_{\substack{G \subset X/U \\ \text{コンパクト}}} \mathrm{ind}\ H^n[t_U^{-1}(G) ; \mathcal{O}_X]$$

とおこう．但し，

$$\pi_U : X \longrightarrow X/U$$

は標準的射影である．$\mathfrak{B}_V[U]$，$\mathfrak{U}_V[U]$ 共に $\mathcal{O}(X)$-加群であり，

$$0 \longrightarrow \mathfrak{B}_V[U] \longrightarrow \mathfrak{U}_V[U]$$

なる $\mathcal{O}(X)$-加群の完全列がある．

U が V に一致するときには，明らかに

$$\mathfrak{B}_V[V] = \mathfrak{B}(V), \quad \mathfrak{U}_V[V] = \mathfrak{U}(V)$$

が成立つ．$U=\{0\}$ のとき，$\mathfrak{B}_V[0]$ は 0 に台が集中している V 上の超函数の空間である．また

$$\mathfrak{U}_V[0] = H^n_*(X\,;\,\mathcal{O}_X)$$ （コンパクト台をもつ n 次のコホモロジー空間）

であるから，$\mathfrak{U}_V[0]$ は $\mathcal{O}(X)$ の双対空間，すなわち，X 上の解析的汎函数の空間である．

$U_1 \subset U_2$ を V の部分空間とすると，

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow & \mathfrak{B}_V[U_1] & \longrightarrow & \mathfrak{B}_V[U_2] \\
& \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & \mathfrak{U}_V[U_1] & \longrightarrow & \mathfrak{U}_V[U_2]
\end{array}$$

なる可換図の各行は $\mathcal{O}(X)$-加群の完全列である．

我々の目的は，ウルトラ超函数 $\mathfrak{U}(V)$ の部分空間 $\mathfrak{U}_V[U]$ の構造を調査することである．

3° 4つの$\mathbb{R}$上のベクトル空間が次のように与えられているとしよう:

$$
\begin{tikzcd}
X & V \arrow[l, hook'] \\
Y \arrow[u, hook] & U. \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

この図式を完全化すると次を得る:

$$
\begin{tikzcd}
0 & & 0 & 0 & \\
& X/U \arrow[ul] & X/Y \arrow[u] & V/U \arrow[u] & \\
0 & X/V \arrow[l] & X \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul] & V \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \\
0 & Y/U \arrow[l] & Y \arrow[l] \arrow[u] & U \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul] & 0 \arrow[l] \\
& & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

これより次の図式を得る:

$$
\begin{tikzcd}
& 0 & 0 & & \\
0 & X/Y+V \arrow[l] \arrow[u] & X/Y \arrow[l] \arrow[u] & V/U \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & X/V \arrow[l] \arrow[u] & X/U \arrow[l] \arrow[u] & V/U \arrow[l] \arrow[u, equal] & 0 \arrow[l] \\
& Y/U \arrow[u] \arrow[r, equal] & Y/U \arrow[u] & & \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

この図式で双対空間に移ると次を得る：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & (X/Y)^* \cap (X/V)^* \arrow[r] \arrow[d] & (X/Y)^* \arrow[r] \arrow[d] & (V/U)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & (X/V)^* \arrow[r] \arrow[d] & (X/U)^* \arrow[r] \arrow[d] & (V/U)^* \arrow[r] & 0 \\
 & (Y/U)^* \arrow[r, equal] \arrow[d] & (Y/U)^* \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

注意　$(X/Y)^* \cap (X/V)^* \cong (X/Y+V)^*$

4°. 又, $X = V \times \sqrt{-1}\, V$ としよう.

$$X \setminus U \xrightarrow{t_U} X/U \setminus 0 \xrightarrow{p} S(X/U)$$

を自然な射影の列としよう. $S(X/U)$ 上の $\mathcal{O}(X)$-加群の層 $\mathring{\mathcal{P}}_{X/U}$ を次のように定義しよう：

$$\mathring{\mathcal{P}}_{X/U} = p_*(t_U)_*(\mathcal{O}_X|_{X \setminus U})$$

次に,

$$X \xrightarrow{t_U} X/U \xrightarrow{i_1} (X/U)^{sc} \xleftarrow{i_2} S(X/U)$$

を考える. $(X/U)^{sc} = X/U \sqcup S(X/U)$ で i_1 および i_2 は自然な単射である.

$$\mathcal{J}_{X/U} = i_2^{-1} i_{1*}(t_U)_* \mathcal{O}_X$$

もまた $\mathcal{S}(X/U)$ 上の $\mathcal{O}(X)$ 加群の層である．また

$$0 \longrightarrow \mathring{\mathcal{J}}_{X/U} \longrightarrow \mathcal{J}_{X/U}$$

なる $\mathcal{O}(X)$-加群の完全列も自然に定義される．

さて

$$\begin{tikzcd}
X \setminus U \arrow[r, "t_U"] & X/U \setminus 0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "p"'] & (X/U)^{sc} \setminus 0 \arrow[d, shift right, "p'"'] \\
 & & \mathcal{S}(X/U) \arrow[u, shift right, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

であるから，$\mathring{\mathcal{J}}_{X/U}$, $\mathcal{J}_{X/U}$ は $(X/U)^{sc} \setminus 0$ 上の $\mathcal{O}(X)$ 加群の層 $i_{1*}(t_U)_*(\mathcal{O}_X|X \setminus U)$ より次のように定まる

$$\mathring{\mathcal{J}}_{X/U} = (p')_* i_{1*}(t_U)_* (\mathcal{O}_X|X \setminus U)$$

$$\mathcal{J}_{X/U} = i_2^{-1} i_{1*}(t_U)_* (\mathcal{O}_X|X \setminus U).$$

5° X を位相空間，$\mathcal{F}$ をその上の層とするとき，$(X, \mathcal{F})$ なる組を<u>層付空間</u>という．$(Y, \mathcal{G})$ を別の層付空間としたとき，層付空間の準同型

$$(X, \mathcal{F}) \longrightarrow (Y, \mathcal{G})$$

が与えられるとは，$f: X \longrightarrow Y$ なる連続写像と

$$\mathcal{F} \longleftarrow f^{-1}\mathcal{G}$$

なる層の準同型が与えられることをいう．もし 層付空間の準同型 $(X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ が与えられたとすると

コホモロジー空間

$$H^k(Y \leftarrow X\,;\ \mathscr{G} \rightarrow \mathscr{F})$$

が定義できる．これらのことについては小松彦三郎の論文の結果を用いる．

$\mathring{\mathscr{P}}_{X/V}$, $\mathscr{P}_{X/V}$ で $\mathscr{B}_V[V]$, $\mathscr{U}_V[V]$ が与えられる．すなわち，

<u>命題1</u> (i) O で1点よりなる位相空間を表わす．

$$(S(X/V)\,;\ \mathring{\mathscr{P}}_{X/V}) \longrightarrow (O,\ \mathcal{O}(X))$$

なる層付空間の準同型が自然に定まるが，これに対し，

$$H^k(O \leftarrow S(X/V)\,;\ \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathring{\mathscr{P}}_{X/V}) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathscr{B}_V[V] & k = n. \end{cases}$$

(ii) 層付空間の準同型

$$(S(X/V)\,;\ \mathscr{P}_{X/V}) \longrightarrow (O,\ \mathcal{O}(X))$$

に対し次が成立つ．

$$H^k(O \leftarrow S(X/V)\,;\ \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathscr{P}_{X/V}) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathscr{U}_V[V] & k = n. \end{cases}$$

<u>系</u> $(S(X/V),\ \mathring{\mathscr{P}}_{X/V}) \longrightarrow (O,\ \mathcal{O}(X))$

および $(S(X/V)\,;\ \mathscr{P}_{X/V}) \rightarrow (O,\ \mathcal{O}(X))$

は共に純 n 余次元的である．

注意(i) Γ を $S(X/V)$ の任意の開集合とするとき,

$$H^k(\Gamma;\ \overset{\circ}{\mathscr{P}}_{X/V}) = H^k((t_V)^{-1}\ p^{-1}(\Gamma)\ ;\ \mathcal{O}_X)$$

が成立する. したがって, F を $S(X/V)$ の閉じた凸集合とすると,

$$H^k(S(X/V) \setminus F\ ;\ \overset{\circ}{\mathscr{P}}_{X/V}) = \begin{cases} \mathcal{O}(X) & k=0 \\ H^n[t_V^{-1}\ p^{-1}(F)\ ;\mathcal{O}_X) & k=n-1, \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

故に, $H^k[F;\ \overset{\circ}{\mathscr{P}}_{X/V}]$ は $k \neq n-1,\ n$ のときゼロになる. また次の完全列も得られる:

$$0 \to H^{n-1}[F;\overset{\circ}{\mathscr{P}}_{X/V}] \to \mathcal{B}_V[V] \to H^n[t_V^{-1}p^{-1}(F);\mathcal{O}_X]$$
$$\to H^n[F;\overset{\circ}{\mathscr{P}}_{X/V}] \to 0$$

(あとで, $H^n[F.;\overset{\circ}{\mathscr{P}}_{X/V}] = 0$ になることにも注意する.)

注意(ii) $\mathscr{P}_{X/V}$ に対しても同様のことがいえる. $S(X/V)$ の任意の開集合 Γ に対し,

$$H^k(\Gamma;\mathscr{P}_{X/V}) = \varprojlim_{\substack{\Gamma' \subset\subset \Gamma \\ \Gamma' \text{ open}}} \varinjlim_{\substack{G \subset X/V \\ \text{compact}}} H^k(t_V^{-1}(p^{-1}(\Gamma') \setminus G)\ ;\mathcal{O}_X)$$

今, F を $S(X/V)$ の凸な閉集合とすると, 次式が成立する:

$$H^k(S(X/v)\smallsetminus F\,;\mathcal{P}_{X/v})$$
$$=\begin{cases} \mathcal{O}(X) & k=0 \\ \displaystyle\lim_{\substack{F'\supset\supset F \\ F'\ \text{convex closed},}}\text{proj}\ \lim_{x\in X/v}\text{ind}\ H^n[t_v^{-1}(p^{-1}(F')+x);\mathcal{O}_X] & k=n-1 \\ 0 & \text{其の他の場合.} \end{cases}$$

<u>命題2</u>　$(S(X/v);\mathring{\mathcal{P}}_{X/v})\to(S(X/v);\mathcal{O}(X))$

および，　$(S(X/v);\mathcal{P}_{X/v})\to(S(X/v);\mathcal{O}(X))$

は共に，純1余次元的である.

<u>証明</u>　$\overset{(\circ)}{\mathcal{P}}$ で $\mathring{\mathcal{P}}_{X/v}$ か $\mathcal{P}_{X/v}$ のいずれかを表わし，S で $S(X/v)$ を表わすと，次の完全列が書ける：

$$0\to\mathcal{H}^0(S\leftarrow S;\mathcal{O}(X)\to\overset{(\circ)}{\mathcal{P}})\to\mathcal{O}(X)\to\overset{(\circ)}{\mathcal{P}}$$
$$\to\mathcal{H}^1(S\leftarrow S;\mathcal{O}(X)\to\overset{(\circ)}{\mathcal{P}})\to 0\to 0$$
$$\to\mathcal{H}^2(S\leftarrow S;\mathcal{O}(X)\to\overset{(\circ)}{\mathcal{P}})\to 0\cdots$$

これより明らかに.

$$\mathcal{H}^k(S\leftarrow S;\mathcal{O}(X)\to\overset{(\circ)}{\mathcal{P}})=0,\quad k\neq 1$$

(q.e.d.)

<u>定義</u>　$S(X/v)$ 上の $\mathcal{O}(X)$加群の層 $\mathring{\text{亜}}_{X/v}$，$\text{亜}_{X/v}$ を次のように定義する：

$$\mathring{\text{亜}}_{X/v}=\mathcal{H}^1(S(X/v)\leftarrow S(X/v);\mathcal{O}(X)\to\mathring{\mathcal{P}}_{X/v})$$
$$\text{亜}_{X/v}=\mathcal{H}^1(S(X/v)\leftarrow S(X/v);\mathcal{O}(X)\to\mathcal{P}_{X/v}).$$

注意

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{O}(X) & \to & \mathcal{P}_{X/U} & \to & \Phi_{X/U} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{O}(X) & \to & \mathcal{P}_{X/U} & \to & \Phi_{X/U} & \to & 0 \end{array}$$

は $\mathcal{O}(X)$-加群の可換図式，各行は完全である。

命題3　$\operatorname{codim}_V U = d$ とおく。

$$H^k(0 \leftarrow S(X/U); \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)) = \begin{cases} \mathcal{O}(X) & k = n+d \\ 0 & k \neq n+d. \end{cases}$$

証明　$H^k(0; \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & k=0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$

$$H^k(S(X/U); \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & k=0,\ n+d-1 \\ 0 & \text{其他の場合}. \end{cases}$$

また 系列

$$\cdots \to H^k(0 \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)) \to H^k(0; \mathcal{O}(X)) \to H^k(S, \mathcal{O}(X))$$
$$\to H^{k+1}(0 \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)) \to \cdots$$

は完全であるから 命題を得る。　(q. e. d.)

命題4　層付空間の準同型の列

$$(S(X/U); \mathcal{P}_{X/U}) \to (S(X/U); \mathcal{O}(X)) \to (0; \mathcal{O}(X))$$

および

$$(S(X/U); \mathcal{P}_{X/U}) \to (S(X/U); \mathcal{O}(X)) \to (0; \mathcal{O}(X))$$

に対応するコホモロジーの完全列は次の形をとる:

$d=0$ の場合

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Theta(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{B}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}(\mathcal{S}(X/V); \mathring{\Phi}_{X/V}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Theta(X) \arrow[r] & \mathfrak{U}(V) \arrow[r] & H^{n-1}(\mathcal{S}(X/V); \Phi_{X/V}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$d=1$ の場合,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{B}_V[U] \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}(\mathcal{S}(X/U); \mathring{\Phi}_{X/U}) \arrow[r] \arrow[d] & \Theta(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{U}_V[U] \arrow[r] & H^{n-1}(\mathcal{S}(X/U); \Phi_{X/U}) \arrow[r] & \Theta(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$d \geqq 2$ の場合,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{B}_V[U] \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}(\mathcal{S}(X/U); \mathring{\Phi}_{X/U}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{U}_V[U] \arrow[r] & H^{n-1}(\mathcal{S}(X/U); \Phi_{X/U}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

および,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/U); \mathring{\Phi}_{X/U}) \arrow[r] \arrow[d] & \Theta(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/U); \Phi_{X/U}) \arrow[r] & \Theta(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

系 $d \geqq 2$ の場合

$$H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/U); \mathring{\Phi}_{X/U}) \cong H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/U); \Phi_{X/U}).$$

証明 次の完全列を考える:

$$\cdots \to H^k(0 \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)) \to H^k(0 \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \to \mathcal{P}^{(0)})$$
$$\to H^k(S \leftarrow S, \mathcal{O}(X) \to \mathcal{P}^{(0)})$$
$$\to H^{k+1}(0 \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)) \to \cdots$$

第1項は命題3で、第2項は命題3でそれぞれ計算されている. 第3項は命題2より次のように与えられる:

$$H^k(S \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \to \mathcal{P}^{(0)}) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ H^{k-1}(S, \overset{(0)}{\Phi}_{X/U}) & k=1,2,\cdots \end{cases}$$

これらを最初の長い完全列に代入すれば, 求める結果を得る.

(q.e.d.)

6°. $$D(X/U) = \frac{1}{2}(S(X/U) \times S(X/U)^*)$$
$$= \{(\xi, \eta) ; \xi \in S(X/U), \eta \in S(X/U)^*, \langle \xi, \eta \rangle \geq 0\}$$

を考える. 次のダイヤモンドを考える。

$$\begin{tikzcd} & D(X/U) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ S(X/U) \arrow[dr, "\tau"'] & & S(X/U)^* \arrow[dl, "\pi"] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

注意　$d=0, 1$ の場合.

$\tau: \mathcal{S}(X/U) \to 0$ は $\Phi^{(0)}_{X/U}$ に関して純 $n-1$ 次元的であるが, $d \geqq 2$ であれば, これは純次元的でない。

命題5.　$\pi: D(X/U) \to \mathcal{S}(X/U)$

なる写像は, $\pi^{-1}\Phi^{(0)}_{X/U}$ に関して純0次元的である.

証明　$\pi: D(X/U) \to \mathcal{S}(X/U)$

のファイバーは可縮なコンパクト集合である.　(q.e.d.)

命題6　$\tau: D(X/U) \to \mathcal{S}(X/U)^*$

は $\pi^{-1}\Phi^{(0)}_{X/U}$ に関して純 $n-1$ 次元的である.

証明　この証明が, この議論の中で本質的な部分である.

$G \subset X$ を閉じた凸集合でいかなる複素1次元線形多様体を含まないならば,

$$H^k[G; \mathcal{O}_X] = 0 \quad k \neq n$$

である. この事実のいいかえである.　(q.e.d.)

定義　$$\dot{\Phi}_{X/U} = \mathcal{H}^{n-1}_{\tau}(\pi^{-1}\dot{\Phi}_{X/U})$$

$$\Phi_{X/U} = \mathcal{H}^{n-1}_{\tau}(\pi\ \Phi_{X/U})$$

とおく. これらは $\mathcal{S}(X/U)^*$ 上の $\mathcal{O}(X)$-加群の層である.

系　$\xi \in \mathcal{S}(X/U)^*$ とする.

$$\dot{\Phi}_{X/U}(\xi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{ind}\, H^n[t^{-1}p^{-1}(F_\varepsilon); \mathcal{O}_X]$$

$$\Phi_{X/U}(\xi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{ind} \lim_{x \in X/U} \mathrm{ind}\, H^n[t^{-1}(p^{-1}(F_\varepsilon)+x); \mathcal{O}_X]$$

が成り立つ，但し

F_ε は ξ の双対集合に内側から近ずく閉じた凸集合である（$\varepsilon \to 0$ のとき）． $F_\varepsilon \subset S(X/U)$ である．

命題7 $d=0$ とする．

$$\mathcal{H}^0_\pi \overset{(0)}{\Phi}_{X/U} = \mathcal{H}^{n-1}_\tau \overset{(0)}{\Phi}_{X/U}$$

$$\mathcal{H}^k_\pi \overset{(0)}{\Phi}_{X/U} = 0 \qquad k \neq 0$$

$d \geqq 1$ とする．

$$\mathcal{H}^0_\pi \overset{(0)}{\Phi}_{X/U} = \mathcal{H}^{n-1}_\tau \overset{(0)}{\Phi}_{X/U}$$

$$\mathcal{H}^{d-1}_\pi \overset{(0)}{\Phi}_{X/U} = \mathcal{H}^{n+d-2} \overset{(0)}{\Phi}_{X/U}$$

$$\mathcal{H}^k_\pi \overset{(0)}{\Phi}_{X/U} = 0 \qquad k \neq 0,\ d-1.$$

証明 下つきの X/U は省略にする：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k_\pi \overset{(0)}{\Phi} &= \mathcal{H}^k_\pi \mathcal{H}^{n-1}_\tau \pi^{-1} \overset{(0)}{\Phi} && \text{（定義より）}\\
&= \mathcal{H}^{k+n-1}_{\pi\cdot\tau} \pi^{-1} \overset{(0)}{\Phi} && \text{（命題6）}\\
&= \mathcal{H}^{k+n-1}_{\tau\pi} \pi^{-1} \overset{(0)}{\Phi} && \text{（ダイヤの可換性）}\\
&= \mathcal{H}^{k+n-1}_{\tau} \pi_* \pi^{-1} \overset{(0)}{\Phi} && \text{（命題5）}\\
&= \mathcal{H}^{k+n-1}_{\tau} \overset{(0)}{\Phi} && (\pi \text{ onto})\\
&= \begin{cases} 0 & \begin{cases} k \neq 0 & \text{（}d=0\text{の場合）}\\ k \neq 0,\ d-1 & (d \geqq 1) \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

(q.e.d.)

系

$$\begin{array}{ccc}
H^0(\mathcal{S}^*(X/\mathcal{V});\mathring{\Psi}_{X/\mathcal{V}}) & \cong & H^{n-1}(\mathcal{S}(X/\mathcal{V});\mathring{\Phi}_{X/\mathcal{V}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^0(\mathcal{S}^*(X/\mathcal{V});\bar{\Psi}_{X/\mathcal{V}}) & \cong & H^{n-1}(\mathcal{S}(X/\mathcal{V});\bar{\Phi}_{X/\mathcal{V}})
\end{array}$$

および，

$$\begin{array}{ccc}
H^{d-1}(\mathcal{S}^*(X/\mathcal{V});\mathring{\Psi}_{X/\mathcal{V}}) & \cong & H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/\mathcal{V});\mathring{\Phi}_{X/\mathcal{V}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{d-1}(\mathcal{S}^*(X/\mathcal{V});\bar{\Psi}_{X/\mathcal{V}}) & \cong & H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/\mathcal{V});\bar{\Phi}_{X/\mathcal{V}})
\end{array}$$

定理

$d=0$ の場合

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{O}(X) & \to & \mathfrak{B}(V) & \to & H^0(\mathcal{S}(X/V)^*;\mathring{\Psi}_{X/V}) & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}(X) & \to & \mathfrak{U}(V) & \to & H^0(\mathcal{S}(X/V)^*;\bar{\Psi}_{X/V}) & \to & 0
\end{array}$$

$d=1$ の場合．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathfrak{B}_V[\mathcal{V}] & \to & H^0(\mathcal{S}(X/\mathcal{V})^*;\mathring{\Psi}_{X/\mathcal{V}}) & \to & \mathcal{O}(X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & \mathfrak{U}_V[\mathcal{V}] & \to & H^0(\mathcal{S}(X/\mathcal{V})^*;\bar{\Psi}_{X/\mathcal{V}}) & \to & \mathcal{O}(X) & \to & 0
\end{array}$$

$d\geqq 2$ の場合

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathfrak{B}_V[\mathcal{V}] & \to & H^0(\mathcal{S}(X/\mathcal{V})^*;\mathring{\Psi}_{X/\mathcal{V}}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathfrak{U}_V[\mathcal{V}] & \to & H^0(\mathcal{S}(X/\mathcal{V})^*;\bar{\Psi}_{X/\mathcal{V}}) & \to & 0
\end{array}$$

および，

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to & H^{d-1}(S(X/U)^{*}\,;\,\mathring{\Phi}_{X/U}) & \to & \mathcal{O}(X) & \to 0 \\
& \wr\!\downarrow & & \| & \\
0 \to & H^{d-1}(S(X/U)^{*}\,;\,\Phi_{X/U}) & \to & \mathcal{O}(X) & \to 0
\end{array}
$$

<u>Cor</u>　$U=\{0\}$ の場合　$S(X)^{*}$ 上の層 $\Phi_{X/0}$ により．

$$\mathcal{O}(X)^{*} \cong H^{0}(S(X)^{*}\,;\,\Phi_{X/0})$$

という解析的汎函数空間の表示式を得る。

文献（不完全なものです）

MORIMOTO. [1] Ann. Inst. Fourier <u>19</u> 129-153 (1970)

[2] J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA <u>17</u>, 215-239 (1970)

[3] Proc. Japan Acad. <u>48</u> (1972) 161-165.

Komatsu. Cohomology of morphisms of sheafed spaces. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA