数理解析研究所講究録
第 201 巻 1974 年 142-165

Ultradifferentiable function と ultra-distribution の空間の位相的構造

東大理　小松彦三郎

1. Ultradifferentiable functions.

Distribution は C^∞ 函数のなす線型位相空間の双対空間の元として定義され，hyperfunction は実解析函数のなす線型位相空間の双対空間の元の和として表わされる．従って，C^∞ 函数全体より狭く，実解析函数全体より広い函数族を用いれば，distribution と hyperfunction の中間に位する超函数の族が定まることが期待される．そのため次のような函数族を考える．

M_p，$p=0,1,2,\cdots$，を正数列とする．$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω 上の C^∞ 函数 $\varphi(x)$ は，任意のコンパクト集合 $K\subset\Omega$ に対して

$$(1.1)\qquad \sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)| \leq C\,h^{|\alpha|}M_{|\alpha|},\quad |\alpha|=0,1,2,\cdots$$

という評価をもつとき，M_p 族の函数という．この族が $\mathbb{R}^n$ のアフィン変換に関して不変になるためには，定数 h につ

いて二つの選択がある.

任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ および任意の $h > 0$ に対して定数 C が存在して (1.1) がなりたつとき, φ は (M_p) 族の函数といい, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して定数 h および C が存在して (1.1) がなりたつとき, φ は $\{M_p\}$ 族の函数という. また distribution の理論 [11] と同様に, 台に制限のない函数族を $\mathcal{E}^*$, コンパクト台をもつ函数の族を $\mathcal{D}^*$ で表わすことにすると次の4つの函数族が得られる:

$$\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega) = \varprojlim_{K \subset\subset \Omega} \varprojlim_{h \to 0} \mathcal{E}^{\{M_p\}, h}(K), \tag{1.2}$$

$$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega) = \varprojlim_{K \subset\subset \Omega} \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{E}^{\{M_p\}, h}(K), \tag{1.3}$$

$$\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega) = \varinjlim_{K \subset\subset \Omega} \varprojlim_{h \to 0} \mathcal{D}_K^{\{M_p\}, h}, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega) = \varinjlim_{K \subset\subset \Omega} \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{D}_K^{\{M_p\}, h}. \tag{1.5}$$

但し

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\{M_p\}, h}(K) = \{ \varphi \in C^\infty(K) \, ; \\ \|\varphi\|_{\mathcal{E}^{\{M_p\}, h}(K)} = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \frac{|D^\alpha \varphi(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} < \infty \}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$(1.7)\quad \mathcal{D}_K^{\{M_p\},h} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,;\ \mathrm{supp}\,\varphi \subset K,\ \|\varphi\|_{\mathcal{D}_K^{\{M_p\},h}} = \sup_{\substack{x\in K\\ \alpha}} \frac{|D^\alpha \varphi(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} < \infty\}$$

とする．なお，(1.6)において $C^\infty(K)$ の定義を明確にするため，K は Whitney の意味で正則なコンパクト集合，即ち，有限個の連結成分を持ち，各成分 L に属する二点 x, y は L 内の高々長さ $C|x-y|$ の曲線によって結ばれることを仮定する．(但し C は K のみによって定まる定数である．更に，$C^\infty(K)$ は K 上で Whitney の意味で C^∞ の函数族を表わすとする．即ち，$C^\infty(K)$ の元は各階の導函数に相当する $\varphi_\alpha \in C(K)$ の組 (φ_α) であって，各 φ_α の Taylor 展開の残余項

$$(1.8)\quad R_{\alpha,m}(x,y) = \varphi_\alpha(x) - \sum_{|\beta|\le m-|\alpha|} \frac{\varphi_{\alpha+\beta}(y)}{\beta!}(x-y)^\beta$$

が，任意の $|\alpha| \leqq m = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，

$$(1.9)\quad R_{\alpha,m}(x,y) = o\left(|x-y|^{m-|\alpha|}\right),\ |x-y| \to 0$$

をみたすものであるとする．

Whitney の拡張定理により，$C^\infty(K)$ の元は K の近傍で定義された C^∞ 函数の各導函数を K に制限した函数からなる組と一致する．このことから厳密にいえば正

しくないこともあるのであるが，(φ_α) を $\varphi=\varphi_0$ で代表させ，$\varphi_\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi$ と書く．(1.6) はこの簡便法を用いている．

$m=0,1,2,\cdots$ を固定したときも同様に条件 (1.9) によって Whitney の意味で m 回連続微分可能な函数の族 $C^m(K)$ が定義される．これもまた K の近傍で C^m 級の函数の導函数を K に制限した函数の組の族と同一である．$C^m(K)$ はノルム

$$(1.10)\qquad \|\varphi\|_{C^m(K)}=\sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leqq m}}|D^\alpha\varphi(x)|$$

によって Banach 空間をなす．また Ascoli-Arzela の定理が成立する．以上については Whitney [12], [13], Glaeser [3] を参照せよ．これから，$\mathcal{E}^{\{M_p\},h}(K)$ および $\mathcal{D}_K^{\{M_p\},h}$ もまた Banach 空間をなすことがわかる．これらの Banach 空間から出発して (1.2)-(1.5) によって $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ 等には局所凸線型位相空間のカテゴリでの極限位相を与える．

以下，われわれは数列 M_p について次の条件を課す：

$$(M.1)\qquad M_p^2\leqq M_{p-1}M_{p+1},\quad p=1,2,3,\cdots,$$

(M.2)′ 定数 A および H が存在して

$$M_{p+1} \leqq A H^p M_p, \quad p = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\text{(M.3)}' \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty.$$

$s > 1$ ならば，Gevrey の数列

$$\text{(1.11)} \qquad M_p = (p!)^s \text{ または } p^{sp} \text{ または } \Gamma(1+sp)$$

はこれらの条件をみたす．

これらの条件の根拠は次の諸事実にある．

<u>定理</u>（Gorny - H. Cartan - Kolmogorov）．数列 M_p に対し M_p^c を $M_p^c \leqq M_p$ および (M.1) をみたす最大の数列とすれば，位相もこめて

$$\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega) = \mathcal{D}^{(M_p^c)}(\Omega), \quad \mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega) = \mathcal{D}^{\{M_p^c\}}(\Omega).$$

<u>定理</u>（Denjoy - Carleman - Mandelbrojt）．(M.1) の條件の下で (M.3)′ は $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega) \neq \{0\}$ あるいは $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega) \neq \{0\}$ となるための必要十分條件である．

(M.1)，(M.3)′ の仮定の下で，$\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ の元は十分にたくさんある．例えば任意の開被覆に対し，それに従属する $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ の元による 1 の分割が存在する．

明らかに，(M.2)′ の下では，(1.2) ～ (1.5) の空間において，任意の有限階の微分作用素 $P(D)$ をほどこすことができ，それぞれの空間において $P(D)$ は連続な線型作用素となる．

また，(M.1) の下では，(M_p) 族の函数，$\{M_p\}$ 族の函数はそれぞれ各点毎の積に関して閉じており，積は $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega) \times \mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$，$\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega) \times \mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ 等の写像として連続または亜連続である．

M_p が上の条件をみたすとき，M_p 族の函数を <u>ultradifferentiable function</u> と呼ぶことにする．

2. Ultradistributions.

M_p は (M.1)，(M.2)' および (M.3)' をみたす数列であるとし，$*$ でもって (M_p) または $\{M_p\}$ を表わす．以上により ultradifferentiable functions の空間 $\mathcal{E}^*(\Omega)$ および $\mathcal{D}^*(\Omega)$ は Schwartz の distribution 理論における $\mathcal{E}(\Omega)$ および $\mathcal{D}(\Omega)$ とほゞ同じ性質をもつことがわかる．そこで Schwartz 理論と同様に

(2.1) $$\mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega) = (\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega))',$$

(2.2) $$\mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega) = (\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega))',$$

(2.3) $$\mathcal{E}^{(M_p)'}(\Omega) = (\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega))',$$

(2.4) $$\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega) = (\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega))'$$

と書き，これらの元を (M_p) 族および $\{M_p\}$ 族の <u>ultra-</u>

distribution という．(但し，右辺は局所凸空間の強双対空間（連続線型汎函数全体のなすベクトル空間に各有界集合上一様収束の位相を入れたもの）を意味する．

$\{M_p\}$ 族の ultradistribution は Roumieu [9] によって導入された．また，(M_p) 族の ultradistribution は上とは少し異なった観点から Beurling（Björck [1] 参照）によって導入された generalized distribution である．

$\mathcal{D}^*$ が 1 の分割を許すことから，Schwartz 理論と同様に，$\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$，$\Omega \subset R^n$，が自然な制限写像の下で層をなすことが証明される．特に，ultradistribution f には台 supp f が定義される．そして，$\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ は $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ の元のうちコンパクトな台をもつもの全体からなる部分空間と自然な対応で同一視することができる．

Schwartz 理論と同様に，同一族の ultradifferentiable function と ultradistribution の積が定義され，これは $\mathcal{E}^*(\Omega) \times \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ 等の写像として亜連続である．また，有限階の微分作用素 $P(D)$ の作用が定義され，いずれの空間においても連続となる．

もし M_p が次の条件：

(M. 2)　定数 A および H が存在し

$$M_p \leqq A H^p \min_{0 \leqq q \leqq p} M_q M_{p-q}, \quad p = 0, 1, 2, \cdots$$

をみたすならば，$\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ 等は更にある種の無限階の微分作用素を許し，また ultradistribution 同士の convolution が定義できる．

$\mathcal{E}^*(\Omega)$ が実解析函数全体 $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{E}^{\{p!\}}(\Omega)$ を連続にかつ稠密に含むことから，任意の族の ultradistribution の層は hyperfunction の層の部分層であることが証明される．一方 distribution の層は任意の族の ultradistribution の層の部分層である．しかも函数との積，微分，convolution 等はこれらが共通に定義できる限り，hyperfunction，ultradistribution あるいは distribution のどれであるとしても同一である．

<u>注意</u> Ultradistribution の理論は Schwartz の distribution の理論を手本とし，$\mathcal{D}^*(\Omega)$ を基礎として組立てられている．そのため條件 (M.1) と (M.3)$'$ が必要となるのであった．しかし Martineau [6] および Schapira [10] の hyperfunction の理論の組立てのように，$\mathcal{E}^*(\Omega)$ を基礎とする超函数の理論ができてもよいと思われる．即ち，$\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ の元にコンパクトな台を定義し，それが Ω に関係しないことを証明する．そして

一般の超函数はコンパクト台の超函数の局所有限和として定義するのである．このようにして定義される超函数を <u>superfunction</u>，その基礎となる $\mathcal{E}^*(\Omega)$ の元を <u>superdifferentiable function</u> と名づけることにしよう．Superfunction の理論のためには，條件 (M.1)，(M.3)′ をもっと弱い條件におきかえることが可能であると思われる．例えば $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ に対する Gorny-Cartan-Kolmogorov の定理の類似物は Mandelbrojt [5] が得ている．その際でてくる M_p の正則化 M_p^e は (M.1) とは異なる性質をもっている．

しかし得られる超函数が層をなすことを要求するかぎりは，あまり勝手な函数族をとることはできない．$\{p!\}$ 族の superdifferentiable function は実解析函数であるから，$\{p!\}$ 族の superfunction は hyperfunction と同じである．ところが，これよりわずか狭い $(p!)$ 族の函数は整函数と同じになる．そして，整函数の空間の双対空間の元，解析汎函数に対しては台が確定しないことが知られている（Martineau [7]）．即ち，$(p!)$ 族の函数は superdifferentiable と呼ばれる資格を欠く．

私の予想では，superdifferentiable 函数族は次ら

ず実解析函数全体を含み，従ってすべての superfunction は hyperfunction になる．

3．位相的構造．

局所凸線型位相空間の性質には記述的なものと構成的なものがある．例えば，完備であることと Banach 空間の射影極限であることが同等であるなど，この二つを厳密に区分することは不可能であり，相互に関連し合っているのであるが，一応次の性質を記述的な性質とみなそう．

第1のグループ．Hausdorff；準完備，完備；半反射的，半 Montel（すべての有界閉集合はコンパクトである）．

第2のグループ．準樽型，樽型；有界型，超有界型（Banach 空間の帰納極限として表わされる）．

第3のグループ．弱 Schwartz（任意の Banach 空間への連続線型写像は 0 のある近傍を相対弱コンパクト集合にうつす），Schwartz，核型．

第1のグループの性質は射影的な性質ともいうべく，閉部分空間，直積，射影極限をとる操作に関して安定であり，第2のグループの性質は帰納的な性質というべく，商空間，直和，帰納極限をとる操作に関して安定である．第3のグループの性質は部分空間，直積，射影極限

商空間のほか可算個の直和，可算列の帰納極限をとる操作に関して安定である．

通常はとりあげられないが，第3のグループのものと双対的な全弱Schwartz，全Schwartz，全核型という第4のグループの性質も考えられる．

われわれの目標は次の定理を証明することである．

<u>定理1</u>．Ultradifferentiable functionsの空間(1.2)－(1.5)およびultradistributionsの空間(2.1)－(2.4)は上に挙げたすべての性質をもつ局所凸線型位相空間である．

これを証明するために，局所凸空間の構成的な性質をいくつか列挙しておく．

局所凸空間 X が Fréchet かつ Schwartz（あるいは核型）であるための必要十分条件は Banach 空間の列

(3.1) $$X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \cdots \leftarrow X_j \leftarrow \cdots$$

であって，$X_j \rightarrow X_{j-1}$ がコンパクト（あるいは核型）であるものが存在して，$X = \varprojlim X_j$ と表わされることである．このような空間を<u>(FS)空間</u>（あるいは<u>(FN)空間</u>）と略記する．

X が(FS)空間（あるいは(FN)空間）の強双対空間であるための必要十分条件は Banach 空間の列

(3.2) $$X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_j \to \cdots$$

であって $X_j \to X_{j+1}$ が1対1かつコンパクト（あるいは核型）であるものが存在し，$X = \varinjlim X_j$ と表わされることである．このような空間を (DFS) 空間（(DFN) 空間）という．

局所凸空間の列 (3.2) において $X_j \to X_{j+1}$ が X_{j+1} の閉部分空間への同相写像であるとき，$\varinjlim X_j$ を狭義の帰納極限といい，(FS) 空間列（(FN) 空間列）の狭義帰納極限を (LFS) 空間（(LFN) 空間）という．

(LFS) 空間（(LFN) 空間）の強双対空間を (DLFS) 空間（(DLFN) 空間）という．

定理（吉永）．X が (DLFS) 空間（(DLFN) 空間）であるための必要十分条件は (DFS) 空間（(DFN) 空間）の列 (3.1) であって $X_j \to X_{j-1}$ が連続な全射となるものが存在し，$X = \varprojlim X_j$ と表わされることである．

(FN)，(DFN)，(LFN) および (DLFN) 空間は前に挙げた局所凸空間のすべての性質を持っている．また，(FS)，(DFS)，(LFS) および (DLFS) 空間は核型を除くすべての性質を持っている．

さて，定理1の証明のため使うことのできる事実として次の三つの命題がある．

命題 1. $\mathcal{E}^{\{M_p\},h}(K)$ および $\mathcal{D}_K^{\{M_p\},h}$ は Banach 空間である.

命題 2. $h<k$ ならば

$$(3.3)\qquad \mathcal{E}^{\{M_p\},h}(K) \hookrightarrow \mathcal{E}^{\{M_p\},k}(K)$$

$$(3.4)\qquad \mathcal{D}_K^{\{M_p\},h} \hookrightarrow \mathcal{D}_K^{\{M_p\},k}$$

はコンパクトである.

既に注意したように, 以上二つは Whitney の拡張定理の系である.

命題 3. k/h が十分大ならば, (3.3) および (3.4) は核型である.

これを証明するため次の二つの補題を用いる.

補題 1. $K \subset \mathbb{R}^n$ が正則なコンパクト集合ならば, 恒等写像

$$(3.5)\qquad C^{n+1}(K) \longrightarrow C(K)$$

は核型である.

証明. $L \supset K$ を十分大きい立方体とし, $C_L^{n+1}(\pi L)$ でもって πL 上の通常の C^{n+1} 級の函数であって台が L に含まれるもの全体のなす Banach 空間を表わす.

Whitney の拡張定理により, 制限写像 $C_L^{n+1}(\pi L) \longrightarrow C^{n+1}(K)$ の左逆となる連続線型写像 T が存在する.

Fourier 級数展開を用いると，恒等写像 $C_L^{n+1}(\pi L)\longrightarrow C_L(\pi L)$ は核型であることがわかる．故にこれらの結合

(3.6) $$C^{n+1}(K)\xrightarrow{T} C_L^{n+1}(\pi L)\longrightarrow C_L(\pi L)\to C(K)$$

も核型である．

補題2（Pietsch [8]）．Banach 空間の間の連続線型写像 $T: X\longrightarrow Y$ は次の性質をもつ列 $x_j'\in X'$ が存在するとき準核型という：

(3.7) $$\|Tx\|_Y\leqq\sum_{j=1}^{\infty}|\langle x, x_j'\rangle|,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\|x_j'\|_{X'}<\infty.$$

核型写像は準核型である．二つの準核型写像の積は核型である．

命題3の証明．(3.3)，(3.4) は同様の埋蔵写像二つの積として表わされるから，補題2によりこれらが準核型であることを証明すれば十分である．どちらも同じであるから，(3.3) についてのみ証明する．

補題1により $\sum\|v_j\|_{(C^{n+1}(K))'}<\infty$ をみたす列 $v_j\in(C^{n+1}(K))'$ が存在し，$\varphi\in C^{n+1}(K)$ に対し

$$\|\varphi\|_{C(K)}\leqq\sum_{j=1}^{\infty}|\langle\varphi, v_j\rangle|$$

がなりたつ．故に

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}^{\{M_p\},k}(K)} = \sup_{\alpha} \frac{\|D^\alpha \varphi\|_{C(K)}}{k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

$$\leqq \sum_{\alpha} \frac{\|D^\alpha \varphi\|_{C(K)}}{k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \leqq \sum_{\alpha, j} \frac{|\langle D^\alpha \varphi, v_j \rangle_{C^{n+1}(K)}|}{k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

従って，
$$\langle \varphi, x'_{\alpha,j} \rangle = \frac{\langle D^\alpha \varphi, v_j \rangle_{C^{n+1}(K)}}{k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

によって $x'_{\alpha,j} \in (\mathcal{E}^{\{M_p\},h}(K))'$ を定義すれば，(3.7)の前半は成立する．後半を証明するため，$\varphi \in \mathcal{E}^{\{M_p\},h}(K)$ とすれば

$$|\langle \varphi, x'_{\alpha,j} \rangle| \leqq \frac{1}{k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \|v_j\|_{(C^{n+1}(K))'} \sup_{0 \leqq q \leqq n+1} h^{|\alpha|+q} M_{|\alpha|+q} \|\varphi\|.$$

(M.2)′ により定数 A，H が存在し

$$\sup_{0 \leqq q \leqq n+1} M_{|\alpha|+q} \leqq A H^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$$

が成立する．故に，$k/h > H$ ならば，

$$\sum_{\alpha,j} \|x'_{\alpha,j}\|_{(\mathcal{E}^{\{M_p\},h}(K))'} \leqq \sum_{\alpha,j} \frac{A H^{|\alpha|} h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}{k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} (1 + h^{n+1}) \|v_j\| < \infty$$

<u>定理 2</u>. (i) $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ は (FN) 空間である．

(ii) $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ は (LFN) 空間である．

(iii) $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は (DFN) 空間である．

(iv) $\mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega)$ は (DLFN) 空間である．

(v) $\mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ は (FN) 空間である.

(vi) $\mathcal{E}^{(M_p)'}(\Omega)$ は (DFN) 空間である.

証明. (i) 命題1および3により $\varprojlim \mathcal{E}^{\{M_p\},h}(K)$ は (FN) 空間である. (FN) 空間は可算射影極限をとる操作に関して安定であるから, $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ も (FN) 空間である.

(ii). 射影極限の位相の与え方より, (1.4) は (FN) 空間の狭義の帰納極限と同値であることがわかる.

(iii) 少しばかりめんどうな議論の後 (1.5) は (DFN) 空間の狭義の帰納極限と同値であることがわかる. 特に極限は Hausdorff である. (DFN) 空間の Hausdorff 可算帰納極限は (DFN) 空間であるから, $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ も (DFN) 空間である. これは $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ を極限とする 1 対 1 核型写像をもつ帰納列を作って直接証明することもできる.

(iv), (v) および (vi) はそれぞれ (ii), (iii) および (i) の系である.

特に, $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ と $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ を除く 6 つの空間に対し定理1の証明ができた.

もし $\{M_p\}$ 族の函数に対しても Whitney の拡張定理が成立するならば, 即ち次の命題? が成立するならば, 吉永の定理により, $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は (DLFN) 空間となり, 従っ

て $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ は（LFN）空間となる.

<u>命題？</u> 二つの正則なコンパクト集合 $K \subset L$ に対し，制限写像

(3. 8) $$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(L) \longrightarrow \mathcal{E}^{\{M_p\}}(K)$$

は全射である.

Carleson [2] の結果から，次元 $n=1$ かつ M_p が（M. 1），（M. 2）および

（M. 3） 定数 A が存在して

$$\sum_{j=p}^{\infty} \frac{M_j}{M_{j+1}} \leqq Ap\frac{M_p}{M_{p+1}}, \quad p=1, 2, 3, \cdots$$

をみたすならば，命題？は正しい. $n>1$ のときも同じ仮定の下で命題？が成立すると予想される.

$\mathcal{D}^{\{M_p\}}$ の元で 1 の分割が可能であることから，各 $\varphi \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(K)$ が K のある近傍まで拡張できることが証明されれば十分である. 等々力正夫君は $M_p=p!$ のとき，即ち実解析函数に対して，任意の正則コンパクト集合 K に対してこの拡張が可能であること，また非正則コンパクト集合 K に対しては必ずしも可能でないことを示した.

命題？の証明の困難さは $C^m(K)$，$m<\infty$，の場合と異なり，拡張写像として決して連続線型写像がとれないところにもある.

なお，命題？は $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ の位相的構造を知るためだけでなく，Kに台のある $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ の元の構造を知るためにも必要であることに注意する（Schwartz [11] 参照）．この意味では (M_p) 族に対しても命題？の正否を知ることは大切である．

以下，命題？を用いずに，$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ および $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ に対する定理1の証明を行なう．

1° $\varinjlim \mathcal{E}^{\{M_p\},h}(K)$ は（DFN）空間であるから，これの射影極限である $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は第1および第3のグループの性質はすべてもっている．

$\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ が樽型であることを証明するため次の命題を準備しておく．

<u>命題4.</u> $B \subset \mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ が有界であるための必要十分条件は $\mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ の部分集合として有界，かつコンパクト集合Kが存在してすべての $f \in B$ に対し $\mathrm{supp}\, f \subset K$ が成立することである．

<u>証明.</u> $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ および $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は半反射的であるから $B \subset \mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ $(\mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega))$ が有界であるための必要十分条件はすべての $\varphi \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ $(\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega))$ に対し $\langle \varphi, B \rangle = \{\langle \varphi, f \rangle ; f \in B\}$ が有界となることである．

$\mathrm{supp}\, B$ が相対コンパクトでないとする．コンパクト集合の列 $K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset \cdots$ で $\bigcup K_j = \Omega$ となるものをとると，$\mathrm{supp}\, B$ はどの K_j にも含まれないから，

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\, \varphi_j \cap K_j = \phi, \\ \langle \varphi_j, f_k \rangle = 0, \quad j > k, \\ \langle \varphi_j, f_j \rangle \geq j + \sum_{k=1}^{j-1} |\langle \varphi_k, f_j \rangle|, \end{cases}$$

をみたす列 $\varphi_j \in \mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ と $f_j \in B$ をみつけることができる．このとき，$\varphi = \sum \varphi_j \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ かつ $\langle \varphi, f_j \rangle \geq j$ が成立する．従って B は有界ではない．

逆に $B \subset \mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ が有界かつ $\mathrm{supp}\, B \subset K$ となるコンパクト集合 K が存在すれば，K の近傍で 1 に等しい $\chi \in \mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ をとると，任意の $\varphi \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ に対し $\langle \varphi, B \rangle = \langle \chi\varphi, B \rangle$ は有界である．

$2°$ $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は樽型である．

B を $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ の絶対凸有界集合とする．$\mathrm{supp}\, B \subset K$ となるコンパクト集合および K の近傍で 1 に等しい $\chi \in \mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ をとる．

$\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は樽型であるから，$\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ における極集合 $U = B°$ は 0 の近傍である．χ を掛ける作用素は $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ から $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ への連続写像であるから，$V = \{\varphi \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega) ; \chi\varphi \in U\}$ は $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ におけ

る 0 の近傍である．ところで，

$$|\langle V, B\rangle| = |\langle \chi V, B\rangle| \leq |\langle U, B\rangle| \leq 1.$$

3° $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は Montel 空間であるから，$\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ も Montel 空間である．また，$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は完備（弱）Schwartz 空間であるから，Schwartz－高橋の定理により $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ は超有界型である．

4° $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ は核型である．

$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ が余核型，すなわち任意の絶対凸有界閉集合 B に対して，$X_B \to X_A$ が核型となるような絶対凸有界閉集合 $A \supset B$ が存在することを証明すればよい．但し，X_B は B が生成し，B を単位球とする Banach 空間を表わす．

$\{K_j\}$ を正則コンパクト集合の局所有限族で $\bigcup \operatorname{int} K_j = \Omega$ をみたすものとする．χ_j，$\rho_j \in \mathcal{D}^{\{M_p\}}(\operatorname{int} K_j)$ を

$$\sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(x) = 1, \ x \in \Omega \ ; \quad \rho_j(x) = 1, \ \operatorname{supp} \chi_j \text{ の近傍}$$

をみたすようにとっておく．

$\chi_j B$ は $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(K_j)$ の有界集合であるから，ある $\mathcal{E}^{\{M_p\}, h_j}(K_j)$ に含まれる有界集合になる．

$$(3.9) \qquad \mathcal{E}^{\{M_p\}, h_j}(K_j) \hookrightarrow \mathcal{E}^{\{M_p\}, Hh_j}(K_j)$$

が核型となるようにHをとり，A_j を $\mathcal{E}^{\{M_p\},Hh_j}(K_j)$ の単位球とする．

$$b_j = \sup\{\|X_j\varphi\|_{\mathcal{E}^{\{M_p\},h_j}(K_j)};\ \varphi\in B\},$$

c_j を（3．9）の核型ノルムとし，A を

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^j b_j c_j \rho_j A_j$$

の $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ における閉包とする．$\{K_j\}$ が局所有限族であるから，A は絶対凸有界閉集合になり，作り方から容易に埋蔵写像

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \circ 1 \cdot X_j \ :\ X_B \longrightarrow X_A$$

が核型になることが証明される．

5° $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は超有界型である．

$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は完備であるから，有界型であることを証明すればよい．また，樽型であるから，各有界集合で有界な線型汎函数fが連続であることを証明すればよい．

g を f の $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ への制限とする．$\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ は有界型で，$\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ の有界集合は $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ の有界集合でもあるから，g は連続である．g はコンパクトな台をもつ．もしそうでなければ，命題4の証明のようにコンパクト集合列 K_j をとったとき，

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\,\varphi_j \cap K_j = \phi \\ \langle \varphi_j , g \rangle \geq j + \sum_{k=1}^{j-1} |\langle \varphi_k , g \rangle| \end{cases}$$

をみたす $\varphi_j \in \mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ を見つけることができる.

$$\psi_j = \varphi_1 + \cdots + \varphi_j$$

とすれば, $\{\psi_j\}$ は $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ において有界であるが,

$$\langle \psi_j , g \rangle \geq j$$

が成立し, 矛盾する.

$\tilde{g}$ を g の $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ への自然な拡張とすると, $f_0 = f - \tilde{g}$ は $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ の任意の有界集合上有界な線型汎函数であって, かつ $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ の上では 0 となる.

任意の絶対凸有界閉集合 B に対して 4° のように A をとる. 4° の証明から, 任意の $\varphi \in X_B$ に対し, X_A において

$$(1 - \sum_{k=1}^{j} \chi_k)\varphi \longrightarrow 0 \ , \ j \longrightarrow \infty$$

が成立することがわかる. f_0 は X_A 上有界な線型汎函数であって $\langle \chi_k \varphi , f_0 \rangle = 0$ をみたすから, $\langle \varphi , f_0 \rangle = 0$ が結論される. 任意の $\varphi \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ はある X_B に含まれるから, $f_0 = 0$ でなければならない.

6° $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega)$ は有界型空間の強双対空間として完備である.

詳しくは [4] を見られたい.

References

[1] G. Björck, Linear partial differential operators and generalized distributions, Ark. Mat., 6 (1966), 351-407.

[2] L. Carleson, On universal moment problems, Math. Scand., 9 (1961), 197-206.

[3] G. Glaeser, Étude de quelques algèbres tayloriennes, J. Anal. Math., 6 (1958), 1-124.

[4] H. Komatsu, Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 20 (1973), to appear.

[5] S. Mandelbrojt, Séries Adhérentes, Régularisation des Suites, Applications, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[6] A. Martineau, Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki, 13 (1960-61), No.214.

[7] A. Martineau, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Analyse Math., 11 (1963), 1-164.

[8] A. Pietsch, Nukleare Lokalkonvexe Räume, 2 Auflage, Akademie-Verlag, Berlin, 1969.

[9] C. Roumieu, Sur quelques extensions de la notion de distribution, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris, 3 Sér., 77 (1960), 41-121.

[10] P. Schapira, Théorie des Hyperfonctions, Lecture Notes in Math. No.126, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[11] L. Schwartz, Théorie des Distributions, 3 éd., Hermann, Paris, 1966.

[12] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934), 63-89.

[13] H. Whitney, On the extension of differentiable functions, Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 76-81.

[14] K. Yoshinaga, On a locally convex space introduced by J. S. E. Silva, J. Sci. Hirohsima Univ. Ser. A, 21 (1957), 89-98.