数理解析研究所講究録
第201巻1974年203-246

既約な概均質ベクトル空間の分類について

東大 理　木村達雄

§1. 序

既約な概均質ベクトル空間の分類は10年程前に佐藤幹夫先生によってはじめられてかなりの結果が得られいくつかの(有限個)未決定のものを残すのみとなった。

その後1970年に新谷卓郎先生によってスピン群 $Spin(n)$ $(n=11, 12, 14)$ と scalar 倍の合成がその(半)スピン表現の表現空間に概均質に作用している事が証明され，翌71年には $n=13$ のとき概均質にならない事が示された。

結局，未決定の空間としてスピン表現が関係するもの5つ(スピン型とよぶ)，例外群が関係するもの6つ(例外型とよぶ。そのうちの二つは色々な事情から概均質に違いないと思われていた)が残っていたが1972年3月にスピン型，同年5月に例外型の空間がすべて決定し，これによって既約な場合の概均質ベクトル空間の分類が完成した。

<u>定義</u> Vを$\mathbb{C}$(=複素数体)上有限次元のベクトル空間とし$G \subset GL(V)$を$\mathbb{C}$上定義された連結線型代数群とする。GのVへの作用を$g \cdot x$ ($g \in G$, $x \in V$)と書き，$x \in V$におけるGの isotropy subgroup をG_xと記す，: $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$

$\dim G_x = \dim G - \dim V$なる$x \in V$が存在するとき対$(G, V)$を<u>概均質ベクトル空間</u>(Prehomogeneous vector space)という。これはVの algebraic set SがあってGが$V-S$に homogeneous に作用している事と同値である。このとき$S = \{x \in V \mid \dim G_x > \dim G - \dim V\}$

更にVがG-module として既約であるとき(G, V)を<u>既約</u>な概均質ベクトル空間という。

我々の目標は「既約な概均質ベクトル空間」をすべて求める事である。

さて一般に概均質ベクトル空間(G, V)が一つ与えられるとGrassmann構成(裏返し変換ともいう)によって無限に新しい概均質ベクトル空間を得る事ができる。(裏返し変換についてはP. 6を参照)　裏返し変換によってより次元の小さい概均質ベクトル空間に帰着できないとき，その概均質ベクトル空間は<u>基本的</u>であるという。但しG; $\forall$半単純線型代数群，$V(n)$をその忠実なn次元既約表現空間とするとき$(G \times GL(n), V(n) \otimes \square)$は$G$のゼロ表現から得られた概均質ベクトル空間であるが便宜上これも基本的概均質ベクトル空間と考える。但し$\square$=恒等表現

以下 $\dfrac{\boxed{\text{作用する群}}}{\boxed{\text{その表現空間}}} \Big/ \boxed{\begin{array}{l}\text{generic な点における}\\ \text{isotropy subgroup の}\\ \text{連結成分}\end{array}}$ と記す事にする。

既約な概均質ベクトル空間が正則(= regular)とは generic な点における isotropy subgroup が reductive な事である。

概均質ベクトル空間の理論については [1] を参照のこと。
基本的な既約概均質ベクトル空間は　正則なものでは5つの系列とそれに属さない24個の空間，正則でないものでは5つの系列とそれに属さない1つの空間がある。

◎ 基本的既約概均質ベクトル空間

I) regular(正則)な場合

① $\dfrac{G\times GL(n)}{V(n)\otimes\Box} \Big/ G$,　但し G は任意の半単純線型代数群，$V(n)$ はその忠実な n 次元既約表現空間

② $\dfrac{GL(n)}{\Box\Box} \Big/ O(n)$　$(n\geqq 2)$　但し $\Box\Box$ は Young diagram (例えば Weyl: Classical groups 参照)を表わす 以下でも同様である.

③ $\dfrac{GL(2n)}{\begin{smallmatrix}\Box\\ \Box\end{smallmatrix}} \Big/ Sp(n)$　$(n\geqq 2)$

④ $\dfrac{O(m)\times GL(n)}{\Box\otimes\Box} \Big/ O(n)\times O(m-n)$,　但し $m>n\geqq 1$. $m<2n$ のとき，及び $m=2,4$, $n=1$ のときは更に $m=3,6$ の場合も省いてよい.

⑤ $\dfrac{Sp(m)\times GL(2n)}{\Box\otimes\Box} \Big/ Sp(n)\times Sp(m-n)$,　$m>n\geqq 1$ ($m<2n$ のとき省いてよい)

以上の5つの系列に属さないものとして

1) $GL(2)$ □□□ $/1$ （isotropy subgroup は位数18の有限群である）

2) $GL(6)$ 目 $/SL(3)\times SL(3)$

3) $GL(7)$ 目 $/(G_2)$

4) $GL(8)$ 目 $/SL(3)$

5) $GSp(3)$ 目 $/SL(3)$

6) $GO(7)$ スピン表現(8次) $/(G_2)$ （以下 $O(n)$ は正確には $Spin(n)$ だがいちいち断わらない。）

7) $GO(9)$ スピン表現(16次) $/O(7)$

8) $GO(11)$ スピン表現(32次) $/SL(5)$

9) $GO(12)$ 半スピン表現(32次) $/SL(6)$

10) $GO(14)$ 半スピン表現(64次) $/(G_2)\times(G_2)$

11) $GL(1)\times(G_2)$ 7次表現 $/SL(3)$

12) $GL(1)\times E_6$ 27次表現 $/F_4$

13) $GL(1) \times E_7 \,/\, E_6$
56次表現

14) $SL(3) \times GL(2) \,/\, 1$ (isotropy subgroup は位数 144 の有限群)
□□ ⊗ □

15) $SL(5) \times GL(3) \,/\, SL(2)$
日 ⊗ □

16) $SL(5) \times GL(4) \,/\, 1$
日 ⊗ □

17) $SL(6) \times GL(2) \,/\, SL(2) \times SL(2) \times SL(2)$
日 ⊗ □

18) $O(7) \times GL(2) \,/\, SL(3) \times O(2)$
スピン表現 ⊗ □
(8次)

19) $O(7) \times GL(3) \,/\, SL(2) \times O(3)$
スピン表現 ⊗ □
(8次)

20) $O(10) \times GL(2) \,/\, (G_2) \times SL(2)$
半スピン表現 ⊗ □
(16次)

21) $O(10) \times GL(3) \,/\, SL(2) \times O(3)$
半スピン表現 ⊗ □
(16次)

22) $(G_2) \times GL(2) \,/\, GL(2)$
7次表現 ⊗ □

23) $E_6 \times GL(2) \,/\, O(8)$
27次表現 ⊗ □

24) $SL(3) \times SL(3) \times GL(2) \,/\, GL(1) \times GL(1)$
□ ⊗ □ ⊗ □

II) regular でない場合

1) $GL(2n+1)$ / $\begin{array}{|c|c|}\hline Sp(n) & * \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$ $(n \geqq 2)$
日

2) $Sp(m) \times GL(2n+1)$ / (not reductive) $m > n \geqq 0$, 但し
□⊗□ $m < 2n+1$ のとき省いて可

3) $G \times GL(m)$ / $\begin{array}{|c|c|}\hline G & * \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$ 但し G は V 半単純線型代数群,
$V(n) \otimes$ □ $V(n)$ は その n 次元忠実既約表現空間
$m > n \geqq 0$ とする.

注). $GL(m)$ の恒等表現は 3) に帰着する事に注意.

4) $Sp(n) \times GO(3)$ / (not reductive)
□⊗□

5) $SL(2n+1) \times GL(2)$
日 ⊗ □
$(n \geqq 2)$

6) $GO(10)$ / (not reductive)
半スピン表現
(16次)

//

さて 裏返し変換について述べよう。群 G の忠実既約表現空間を V, $\dim V = m$ とする。$GL(n)$ の恒等表現の表現空間を $V(n)$ と記す。$m \leqq n$ ならば $(G \times GL(n), V \otimes V(n))$ は常に概均質ゆえ $m \geqq n$ とする。V の n 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体を $M_n(V)$ と書くことにすれば, これは自然な方法で $M_{m-n}(V^*)$ と同一視できる。このとき次の事が成り立つ.

$(G \times GL(n), V \otimes V(n))$ が概均質 $\longleftrightarrow$ G が $M_n(V)$ に概均質に作用
$\updownarrow$
$(G \times GL(m-n), V^* \otimes V(m-n))$ が概均質 $\longleftrightarrow$ G が $M_{m-n}(V^*)$ に概均質に作用

しかも, この二つの空間の generic pt. における isotropy subgroup

は一致する。さて概均質ベクトル空間 (G, V) が与えられたとき G を $G\times GL(1)$，V を $V\otimes V(1)$ と考えて裏返し変換を行なうと $(G\times GL(n-1), V^{*}\otimes V(n-1))$ なる概均質ベクトル空間が得られる。但し $n=\dim V$．これをくりかえす事によって新しい空間がいくらでも得られる。

佐藤幹夫先生によって行なわれた分類についての方針と結果を簡単に紹介する。（詳しくは [2] をみよ.）

「Cartanの定理：V が代数閉体 K 上のベクトル空間で $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー環とする。V が $\mathfrak{g}$-既約ならば $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{c}$，但し $\mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{g}$ の半単純イデアル，$\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{g}$ の中心で $\mathfrak{c}=0$, or $\dim\mathfrak{c}=1$ である。$\dim\mathfrak{c}=1$ の場合は $\mathfrak{c}$ は $\lambda\cdot 1\ (\lambda\in K)$ なる形の V の一次変換と一致する．但し 1 は V の恒等変換を表わす．」　これによって既約な概均質ベクトル空間 (G, V) を求めるために（*modulo isogeny* で考えて）次のように仮定してよい。

$$G = GL(1)\times G_1\times G_2\times\cdots\times G_k,$$
$$V = V(d_1)\otimes\cdots\otimes V(d_k) \qquad d_1\geqq d_2\geqq\cdots\geqq d_k$$

但し $G_1,\cdots,G_k$ は単純群，$V(d_i)$ は群 G_i の忠実な d_i 次既約表現空間．以下 $\dim G_i = g_i\ (i=1,\cdots,k)$ と書く。

さて (G, V) が概均質ならば $\dim G_x = \dim G-\dim V \geqq 0$ ゆえ $\dim G\geqq\dim V$，すなわち

$1+g_1+g_2+\cdots+g_k\geqq d_1 d_2\cdots d_k$ でなければならない。

このとき

$\boxed{\text{Prop 1. (Sato)}\ (G,V)\text{が概均質で，かつ}\ 2^{k-2}d_1-2 \geqq d_2\ \text{ならば}\ 1+g_1 \geqq 2^{k-1}d_1-3(k-1)}$

$\boxed{\text{Cor.}\ (GL(1)\times G_1\times\cdots\times G_k,\ V(d_1)\otimes\cdots\otimes V(d_k)),\ k\geqq k_0\geqq 3\ \text{が概均質ならば}\ 1+g_1 \geqq 2^{k_0-1}d_1-3(k_0-1)}$

Proof) Prop 1を認めればCorは自明であるからProp 1のみ証明する。

その為にまず次のlemmaを証明する.

lemma; $x_1^2+\cdots+x_n^2-cx_1\cdots x_n \leqq na^2-ca^n$, 但し

$a\leqq x_\nu \leqq ca^{n-1}-a$, $(\nu=1,\cdots,n)$ とする.

lemmaの証明) 各変数について2次式で2次の項は正ゆえ最大値は区間の端点でとる。$b=ca^{n-1}-a$ とおく. $(a\leqq b)$

$x_1,\cdots,x_n$ のうち μ 個が a，残りの $(n-\mu)$ 個が b とすれば与式の左辺の値は $M_\mu=\mu a^2+(n-\mu)b^2-ca^\mu b^{n-\mu}$ であるから特に $M_n=na^2-ca^n$ である。従って

$$\frac{M_n-M_\mu}{b-a}=-(n-\mu)(b+a)+ca^\mu(b^{n-\mu-1}+b^{n-\mu-2}a+\cdots+a^{n-\mu-1})$$

$$\geqq -(n-\mu)(b+a)+(n-\mu)ca^{n-1}=0 \qquad \therefore M_n\geqq M_\mu$$

よって $M_n=na^2-ca^n$ が最大値である. /lemの証)

さてProp 1の証明にもどる。(G,V)が概均質ならば

$1+g_1+\cdots+g_k \geqq d_1\cdots d_k$ であるが $G_i\subset SL(d_i)$ ゆえ $d_i^2-1\geqq g_i$

$(i=2,\cdots,k)$ $\quad\therefore 1+g_1 \geqq (k-1)-(d_2^2+\cdots+d_k^2-d_1d_2\cdots d_k)$ *

ここで lemma より（$x_1=d_2, \cdots, x_n=d_k$, $n=(k-1)$, $c=d_1$, $a=2$ とおけば）$d_2^2+\cdots+d_k^2-d_1d_2\cdots d_k \leq (k-1)2^2-d_1\cdot 2^{k-1}$ 但し $2 \leq d_i \leq 2^{k-2}d_1-2$ 　よって

$$* \geqq (k-1)-(k-1)\cdot 2^2+d_1\cdot 2^{k-1} = 2^{k-1}d_1-3(k-1) \quad // \text{Prop 1.}$$

次に

> Prop 2. G；単純群，$g=\dim G$，$d=G$ の既約表現の次数とするとき，$G=SL(n)$，$d=n$（恒等表現）の場合を除けば $g \leq \frac{1}{2}d(d+1)$ である．

Proof）$G=SL(n)$ $(n\geqq 2)$ のとき 恒等表現以外では

$$d \geqq \begin{cases} \frac{1}{2}n(n-1) & (n\geqq 4) \\ \frac{1}{2}n(n+1) & (n=2,3) \end{cases} \qquad \text{従って } d \geqq 2(n-1) \quad (n\geqq 2)$$

$$n\geqq 2 \rightarrow n+1 \leq 2n-1 \longrightarrow (n-1)(2n-1)=\left(\tfrac{1}{2}d(d+1)\right)_{d=2(n-1)}$$

$\geqq (n+1)(n-1)=g$ 　　$\therefore$ $SL(n)$ の場合は O.K.

$G=Sp(n)$ $(n\geqq 1)$ のとき $g=n(2n+1)$，$d\geqq 2n$ ゆえ

$$\frac{1}{2}d(d+1) \geqq \left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)_{d=2n} = n(2n+1)=g$$

$\therefore$ $Sp(n)$ の場合は O.K.

$G=SO(n)$ $(n\geqq 7)$ のとき $g=\frac{1}{2}n(n-1)$，$d\geqq n$ で証明すべき式は $\frac{1}{2}n(n-1) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$ で自明． $\therefore$ $SO(n)$ $(n\geqq 7)$ のとき O.K.

$G=$例外群の場合，G_2 に対して $g=14$，$d\geqq 7$．F_4 のとき $g=52$，$d\geqq 26$，E_6 のとき $g=78$，$d\geqq 27$，E_7 のとき $g=133$，$d\geqq 56$，E_8 のとき $g=248$，$d\geqq 248$ ゆえ すべて O.K 　　// Q.E.D

P.7 において G_1 として順次 $SL(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ (または $Spin(n)$), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 をとって Prop 1 とその Cor. および Prop 2 を使って有限個の空間(または系列)に帰着させるのである。

才二段階として，そこで得られた空間が実際に概均質になるかどうかを各々について考察するのである。

Prop 1 や Prop 2 が実際にはどのように使われているかをいくつかの例(§2, §3 に関係のあるところ)によって示そう。

例えば $G_1 = SO(n)$ (または $Spin(n)$) $n \geq 7$ の場合でしかも G_1 の表現が恒等表現と異なる場合を考えよう。このとき

$$\boxed{\text{lemma};\quad d_1 \geqq \tfrac{1}{2}n(n-1)\ (n \geqq 15),\quad d_1 \geqq 2^{[\frac{n-1}{2}]}\ (14 \geqq n \geqq 7)}$$

∵) 基本的な既約表現の次数は

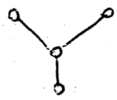
$$d(\Lambda_\nu) = \begin{cases} \binom{n}{\nu}, & \nu = 1, 2, \cdots, [\frac{n-3}{2}] \\ \underset{(\text{スピン表現})}{2^{[\frac{n-1}{2}]}}, & \nu = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & (n = \text{odd.}) \\ \frac{n}{2}-1,\ \frac{n}{2} & (n = \text{even}) \end{cases} \end{cases}$$

であり $d(\Lambda_2) = \frac{1}{2}n(n-1)$ $(n \geqq 7)$ に関して

$$2^{[\frac{n-1}{2}]} < \tfrac{1}{2}n(n-1) \text{ if } 3 \leqq n \leqq 14, \quad 2^{[\frac{n-1}{2}]} > \tfrac{1}{2}n(n-1) \text{ if } n \geqq 15$$

であり，かつ $d(2\Lambda_1) = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) > d(\Lambda_2) = \frac{1}{2}(n-1)n$

ゆえ lemma が証明された. /

さて $n=8$ のときは リー環の Dynkin diagram が  であるから G_1 の半スピン表現は G_1 内の自己同型で恒等表現に帰着できるから省いてよい。 さて $k \geqq 3$ のとき Prop 1 の Cor によ

って $1+\frac{1}{2}n(n-1) \geqq 2^2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-3\cdot 2$．これを整理して

$n(n-1) \leqq \frac{14}{3}$ で これは $n \geqq 15$ で解なし。（半）スピン表現について は（$7 \leqq n \leqq 14$，$n \neq 8$）$1+\frac{1}{2}n(n-1) \geqq 2^2\cdot d_1-3\cdot 2$

より $d_1 \leqq \frac{1}{4}(7+\frac{1}{2}n(n-1))$ … ＊

n	7	9	10	11	12	13	14
＊より $d_1 \leqq$	7	10	13	15	18	21	24
(半)スピン表現の d_1	8	16	16	32	32	64	64

ゆえ解なし。

よって $k=1$，または $k=2$ である。

$k=2$ の場合 Prop 1 により $2 \leqq d_2 \leqq d_1-2$ ならば

$1+\frac{1}{2}n(n-1) \geqq 2d_1-3 \geqq 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-3$ $\therefore n(n-1) \leqq 8$

これは $n \geqq 15$ で解なし．（半）スピン表現（$7 \leqq n \leqq 14$，$n \neq 8$）に

ついては

n	7	9	10	11	12	13	14
$d_1 \leqq$	12	20	24	29	35	41	47
d_1	8	16	16	X	32	X	X

即ち

$n=7,9$（スピン表現）$n=10,12$（半スピン表現）が条件をみたす。

このとき
$$\begin{cases} n=7\ ; & 1+21+g_2 \geqq 8d_2\ , \quad 2 \leqq d_2 \leqq 7 \\ n=9\ ; & 1+36+g_2 \geqq 16d_2\ , \quad 2 \leqq d_2 \leqq 14 \\ n=10\ ; & 1+45+g_2 \geqq 16d_2\ , \quad 2 \leqq d_2 \leqq 14 \\ n=12\ ; & 1+66+g_2 \geqq 32d_2\ , \quad 2 \leqq d_2 \leqq 30 \end{cases}$$

まず $g_2=d_2^2-1$ のとき，上記の d_2 に関する二次不等式を解けば（裏返し変換によって $d_2 \leqq \frac{1}{2}d_1$ に限ってよい事に注意せよ），

$n=7$; $2 \leqq d_2 \leqq 4$ i.e. $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(7)\times GL(2)}$, $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(7)\times GL(3)}$, $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(7)\times GL(4)}$

$n=9$; $d_2=2$ i.e. $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(9)\times GL(2)}$

$n=10$; $2 \leqq d_2 \leqq 3$ i.e. $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(2)}$, $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(3)}$

$n=12$; $d_2=2$ i.e. $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(12)\times GL(2)}$

$g_2 \neq d_2^2-1$ のとき Prop 2 により $g_2 \leqq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, ($d_2 \geqq 3$) で上記の結果から $n=7, 10$ の場合に限るが再び不等式を解いて $n=7$ のとき $d_2=3, 4$ i.e. $\underset{\substack{\text{スピン表現}\otimes\square\square \\ (d_2=3)}}{O(7)\times GL(2)}$, $\underset{\substack{\text{スピン表現}\otimes\square \\ (d_2=4)}}{O(7)\times GSp(2)}$

$n=10$ のとき $d_2=3$, i.e. $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square\square}{O(10)\times GL(2)}$

次に $2 \leqq d_2 = d_1$, または $d_2 = d_1 - 1$ のとき, $g_2 \neq d_2^2-1$ ならば Prop 2 によって $g_2 \leqq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, これを $1+g_1+g_2 \geqq d_1 d_2$ に代入すれば $d_2=d_1$ でも $d_2=d_1-1$ でもともに $1+g_1 \geqq \frac{1}{2}d_1(d_1-1)$.

$g_1 = \frac{1}{2}n(n-1)$ ゆえ $2+n(n-1) \geqq d_1(d_1-1)$ $\therefore n \geqq d_1$ すなわち $d_1 = n$ (恒等表現) でなければならないが, 現在の場合は恒等表現以外の場合を考えているから不可。よって $g_2 = d_2^2-1$, よって

$\underset{\substack{\text{スピン表現}\otimes\square \\ (d_1\text{次})}}{O(n)\times GL(d_1)}$, $\underset{\substack{\text{スピン表現}\otimes\square \\ (d_1\text{次})}}{O(n)\times GL(d_1-1)}$ となるが前者は P.3 の ① (i.e. $O(n)$ のゼロ表現の裏返し変換) の特殊な場合, 後者は裏返し変換に

より $k=1$ の場合に帰着する。

$k=1$ の場合 $d_1 \neq n$ $n \geq 7$ ゆえ $\underset{\text{随伴表現}}{GO(n)}$ および $\underset{\text{(半)スピン表現}}{GO(n)}$ $(7 \leq n \leq 14;\ n \neq 8)$ である。

随伴表現のときは概均質ではない。(P. 16)

結局 $G_1 = SO(n)$ (または $Spin(n)$, 簡単の為 $O(n)$ と書く事は前に注意した, リー環はすべて同じ), $n \geq 7$ の場合で, しかも G_1 の表現が恒等表現と異なる場合は, 次に挙げる空間に帰着する事がわかった, すなわち

$\underset{\text{スピン表現 (8次)}}{GO(7)}$, $\underset{\text{スピン表現 (16次)}}{GO(9)}$, $\underset{\text{半スピン表現 (16次)}}{GO(10)}$, $\underset{\text{スピン表現 (32次)}}{GO(11)}$, $\underset{\text{半スピン表現 (32次)}}{GO(12)}$, $\underset{\text{スピン表現 (64次)}}{GO(13)}$, $\underset{\text{半スピン表現 (64次)}}{GO(14)}$

$\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(7)\times GL(2)}$, $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square\square}{O(7)\times GL(2)}$, $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(7)\times GL(3)}$, $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(7)\times GL(4)}$

$\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(7)\times GSp(2)}$, $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(9)\times GL(2)}$, $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(2)}$, $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square\square}{O(10)\times GL(2)}$

$\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(3)}$, $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(12)\times GL(2)}$

次にこれ等の各々について実際に概均質ベクトル空間になっているかどうかを判定しなければならないが空間の次元が高くなるとそれはかなり難しい。(例えば $\underset{\text{半スピン表現}}{GO(14)}$, $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(12)\times GL(2)}$ などは64次元である。) $\underset{\text{(半)スピン表現}}{GO(n)}$ $(n=7,9,10)$, $\underset{\text{スピン表現}\otimes V(d_2)}{O(7)\times G_2\times GL(1)}$ (5つある) については佐藤先生が, $\underset{\text{(半)スピン表現}}{GO(n)}$ $(n=11,12,13,14)$ については新谷先生が解決した。残りは1972年3月に解決(木村・佐藤) それについては§2に詳しく書いてある。

次に G_1＝例外群の場合を述べよう。(これは§3と関係がある.)二番目の群 G_2 と例外群 G_2 (14次元, rank 2) を区別する為, 後者を (G_2) と記す。 $k \geqq 3$ のとき Prop 1 の Cor において $k_0=3$ とおくと $1+g_1 \geqq 2^2 \cdot d_1 - 3\cdot 2$ i.e. $g_1 \geqq 4d_1 - 7$. しかるに

	(G_2)	F_4	E_6	E_7	E_8
g_1	14	52	78	133	248
$d_1 \geqq$	7	26	27	56	248

ゆえ不成立. 従って $k=1$, または $k=2$ である。

$k=2$ のとき) $1+g_1+g_2 \geqq d_1 d_2$, $d_1 \geqq d_2 \geqq 2$ であるが $d_1 \geqq g_1$ $(\geqq 14)$ ならば ($d_2=d_1$, または $d_2=d_1-1$) かつ $G_2=SL(d_2)$ となる事を示す。(そのとき前者は P.3 の①, 後者は裏返し変換により $k=1$ へ帰着する.) $g_2 \leqq d_2^2-1$, $g_1 \leqq d_1$ より $1+d_1+(d_2^2-1) \geqq d_1 d_2$

よって $d_2 \geqq \dfrac{d_1+\sqrt{d_1^2-4d_1}}{2}$, or $d_2 \leqq \dfrac{d_1-\sqrt{d_1^2-4d_1}}{2} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{d_1}}} < 2$

$d_2 \geqq 2$ より $d_2 \geqq \dfrac{d_1+\sqrt{d_1^2-4d_1}}{2}$

簡単な計算により $d_1 > 4$ ならば $\dfrac{d_1+\sqrt{d_1^2-4d_1}}{2} > d_1-2$ 従って ($d_1 \geqq 14$ ゆえ) $d_1 \geqq d_2 \geqq d_1-1$ $\therefore$ $d_2=d_1$ または $d_2=d_1-1$.

さて $g_2 \neq d_2^2-1$ とすると Prop 2 によって $g_2 \leqq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, まず $d_2=d_1$ のとき $1+d_1+\frac{1}{2}d_1(d_1+1) \geqq d_1^2$ i.e. $d_1(d_1-3) \leqq 2$ であるが $d_1 \geqq 14$ ゆえ不成立. $d_2=d_1-1$ のときも $d_1(d_1-3) \leqq 2$ となり同様. よって $g_2=d_2^2-1$. i.e. $G_2=SL(d_2)$.

以上により $d_1 < g_1$ としてよい。とくに $G_1=E_8$ の場合上記の表より概均質にならない事がわかる。

$G_1=(G_2)$ の場合 $d_1=7,14,\cdots$ で $g_1=14$ ゆえ $d_1=7$ となる。
このとき $g_2=d_2^2-1$ $(2\le d_2\le 7)$ となる事を示す。 $g_2\ne d_2^2-1$ なら
Prop 2 により $g_2\le \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, $(3\le d_2\le 7)$ これを $1+14+g_2\ge 7d_2$
に代入して整理すると $d_2(13-d_2)\le 30$ ∴ $d_2=3$

$1+14+g_2\ge 7\times 3$ より $g_2\ge 6$, $\frac{1}{2}\times 3\times(3+1)\ge g_2$ より $6\ge g_2$
∴ $g_2=6$ 他方 $d_2=3$ のときは $g_2=3$ or 8 に限るから不成立.
∴ $g_2=d_2^2-1$, $G_2=SL(d_2)$ 裏返し変換により $d_2=4,5;6,7$ は
不要ゆえ $\boxed{(G_2)\times GL(2)\ \text{7次表現}\otimes\square}$, $\boxed{(G_2)\times GL(3)\ \text{7次表現}\otimes\square}$ に帰する。

次に $G_1=F_4,E_6,E_7$ (E_8 は不可 P.14) の場合 もし $g_2\ne d_2^2-1$
なら Prop 2 より $g_2\le\frac{1}{2}d_2(d_2+1)$ $(d_2\ge 3)$ ∴ $1+g_1+\frac{1}{2}d_2(d_2+1)\ge d_1d_2$
∴ $1+g_1\ge\frac{1}{2}d_2(2d_1-1-d_2)\ge\frac{1}{2}\cdot 3(2d_1-1-3)=3(d_1-2)$
∴ $1+g_1\ge 3(d_1-2)$ これが成立するのは
右の表より E_6 に限る。 そのとき

	g_1	d_1
F_4	52	26, 52, ⋯
E_6	78	27, 78, ⋯
E_7	133	56, 133, ⋯

$1+78+\frac{1}{2}d_2(d_2+1)\ge 27d_2$, $(3\le d_2\le d_1=27)$
∴ $d_2=3$ 他方 $g_2\le\frac{1}{2}d_2(d_2+1)=6$, $d_2=3$ より $g_2=3$ or 8
∴ $g_2=3$ よって $\boxed{E_6\times GL(2)\ \text{27次表現}\otimes\square\square}$.

$g_2=d_2^2-1$ のとき $1+g_1+(d_2^2-1)\ge d_1d_2$ より $g_1\ge d_2(d_1-d_2)$
裏返し変換により $2\le d_2\le\frac{1}{2}d_1$ なる d_2 のみを考えれば十分。
($d_1<g_1$ に注意) F_4,E_6,E_7 の各々について調べる。

$G_1=F_4$ のとき)　$52 \geqq d_2(26-d_2)$, $2 \leqq d_2 \leqq 13$　$\therefore\ d_2=2$

よって $\boxed{\underset{\text{26次表現}\otimes\square}{F_4\times GL(2)}}$

$G_1=E_6$ のとき)　$78 \geqq d_2(27-d_2)$, $2 \leqq d_2 \leqq 13$　$\therefore\ d_2=2, 3$

よって $\boxed{\underset{\text{27次表現}\otimes\square}{E_6\times GL(2)}}$, $\boxed{\underset{\text{27次表現}\otimes\square}{E_6\times GL(3)}}$

$G_1=E_7$ のとき)　$133 \geqq d_2(56-d_2)$, $2 \leqq d_2 \leqq 28$　$\therefore\ d_2=2$

よって $\boxed{\underset{\text{56次表現}\otimes\square}{E_7\times GL(2)}}$

$k=1$ の場合)　次の事が成り立つ

> lemma. 単純群 G_1 のリー環を $\mathfrak{g}$ とする。G_1 の随伴表現は既約であるが rank $G_1>1$ ならば G_1(の随伴表現)と scalar 倍の合成は $\mathfrak{g}$ に概均質に作用しない。

これは $\mathfrak{g}$ の generic な点(Cartanの意味の正則元)における isotropy subgroup が G_1 の Cartan subgroup である事から明らかである。

例外群の rank は2以上ゆえ $k=1$ の場合は

$\boxed{\underset{\text{7次表現}}{(G_2)\times GL(1)}}$, $\boxed{\underset{\text{26次表現}}{F_4\times GL(1)}}$, $\boxed{\underset{\text{27次表現}}{E_6\times GL(1)}}$, $\boxed{\underset{\text{56次表現}}{E_7\times GL(1)}}$

に限る事がわかった。

$\underset{\text{7次表現}\otimes\square}{(G_2)\times GL(n)}$　$(n=1,2,3)$　および $\underset{\text{26次表現}}{F_4\times GL(1)}$ は佐藤先生によりわかっていたが他は1972年5月にすべて解決した。(木村)

それについては §3 を参照のこと。

§2. スピン型既約概均質ベクトル空間について

この§の主な目標は 次の5つの空間（P.13参照）

$\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(2)}$, $\underset{\text{スピン表現}\otimes\square}{O(9)\times GL(2)}$, $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(3)}$, $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(2)}$, $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(12)\times GL(2)}$

が 概均質ベクトル空間か否かを 判定する事である。

そのためには リー環で 計算する。

スピン表現の一般論は[7]を参照してもらう事にして，ここでは $O(10)$ の（i.e. $Spin(10)$ の）リー環 の 半スピン表現 について具体的に，必要な事のみを記す。

$O(10)$ のリー環を $\mathfrak{g}_1$ とし，その半スピン表現の表現空間を V_1 とすれば $\dim V_1 = 16$ で そのbase は $1, e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3, \cdots, e_4\wedge e_5, e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4, \cdots, e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5$ である．（なぜ この形がでてくるかは 一般論が必要なので やめる，今は16個あるという事のみが本質的）

$$\mathfrak{g}_1 \ni X = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\
a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & a_{35} & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & b_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 & a_{45} & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & b_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_5 & -b_{15} & -b_{25} & -b_{35} & -b_{45} & 0 \\
\hline
0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\
-c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\
-c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & c_{35} & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 & -a_{43} & -a_{53} \\
-c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & c_{45} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_4 & -a_{54} \\
-c_{15} & -c_{25} & -c_{35} & -c_{45} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & -a_5
\end{array}\right) \quad \text{に対し}$$

その半スピン表現（*infinitesimal*）は 次のような V_1 の一次変換である。それを $d\rho_1(X)$ と記す。

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ e_1\wedge e_2 \\ e_1\wedge e_3 \\ e_1\wedge e_4 \\ e_1\wedge e_5 \\ e_2\wedge e_3 \\ e_2\wedge e_4 \\ e_2\wedge e_5 \\ e_3\wedge e_4 \\ e_3\wedge e_5 \\ e_4\wedge e_5 \\ e_1e_2e_3e_4 \\ e_1e_2e_3e_5 \\ e_1e_2e_4e_5 \\ e_1e_3e_4e_5 \\ e_2e_3e_4e_5 \end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
A_1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{34} & b_{35} & b_{45} & & & & & \\
-c_{12} & A_2 & a_{32} & a_{42} & a_{52} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} & & & & b_{34} & b_{35} & b_{45} & & \\
-c_{13} & a_{23} & A_3 & a_{43} & a_{53} & a_{21} & & & -a_{41} & -a_{51} & & -b_{24} & -b_{25} & & b_{45} & \\
-c_{14} & a_{24} & a_{34} & A_4 & a_{54} & & a_{21} & & a_{31} & & -a_{51} & b_{23} & & -b_{25} & -b_{35} & \\
-c_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & A_5 & & & a_{21} & & a_{31} & a_{41} & & b_{23} & b_{24} & b_{34} & \\
-c_{23} & -a_{13} & a_{12} & & & A_6 & a_{43} & a_{53} & -a_{42} & -a_{52} & & b_{14} & b_{15} & & & b_{45} \\
-c_{24} & -a_{14} & & a_{12} & & a_{34} & A_7 & a_{54} & a_{32} & & -a_{52} & -b_{13} & & b_{15} & & -b_{35} \\
-c_{25} & -a_{15} & & & a_{12} & a_{35} & a_{45} & A_8 & & a_{32} & a_{42} & & -b_{13} & -b_{14} & & b_{34} \\
-c_{34} & & -a_{14} & a_{13} & & -a_{24} & a_{23} & & A_9 & a_{54} & -a_{53} & b_{12} & & & b_{15} & b_{25} \\
-c_{35} & & -a_{15} & & a_{13} & -a_{25} & & a_{23} & -a_{45} & A_{10} & a_{43} & & b_{12} & & -b_{14} & -b_{24} \\
-c_{45} & & & -a_{15} & a_{14} & & -a_{25} & a_{24} & -a_{35} & a_{34} & A_{11} & & & b_{12} & b_{13} & b_{23} \\
 & -c_{34} & c_{24} & -c_{23} & & -c_{14} & c_{13} & & -c_{12} & & & A_{12} & a_{54} & -a_{53} & a_{52} & -a_{51} \\
 & -c_{35} & c_{25} & & -c_{23} & -c_{15} & & c_{13} & & -c_{12} & & a_{45} & A_{13} & a_{43} & -a_{42} & a_{41} \\
 & -c_{45} & & c_{25} & -c_{24} & & -c_{15} & c_{14} & & & -c_{12} & -a_{35} & a_{34} & A_{14} & a_{32} & -a_{31} \\
 & & -c_{45} & c_{35} & -c_{34} & & & & -c_{15} & c_{14} & -c_{13} & a_{25} & -a_{24} & a_{23} & A_{15} & a_{21} \\
 & & & & & -c_{45} & c_{35} & -c_{34} & -c_{25} & c_{24} & -c_{23} & -a_{15} & a_{14} & -a_{13} & a_{12} & A_{16}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ e_1\wedge e_2 \\ e_1\wedge e_3 \\ e_1\wedge e_4 \\ e_1\wedge e_5 \\ e_2\wedge e_3 \\ e_2\wedge e_4 \\ e_2\wedge e_5 \\ e_3\wedge e_4 \\ e_3\wedge e_5 \\ e_4\wedge e_5 \\ e_1e_2e_3e_4 \\ e_1e_2e_3e_5 \\ e_1e_2e_4e_5 \\ e_1e_3e_4e_5 \\ e_2e_3e_4e_5 \end{pmatrix}
$$

但し

$A_1 = -\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{2}$, $A_2 = \dfrac{a_1+a_2-a_3-a_4-a_5}{2}$, $A_3 = \dfrac{a_1-a_2+a_3-a_4-a_5}{2}$

$A_4 = \dfrac{a_1-a_2-a_3+a_4-a_5}{2}$, $A_5 = \dfrac{a_1-a_2-a_3-a_4+a_5}{2}$, $A_6 = \dfrac{-a_1+a_2+a_3-a_4-a_5}{2}$

$A_7 = \dfrac{-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5}{2}$, $A_8 = \dfrac{-a_1+a_2-a_3-a_4+a_5}{2}$, $A_9 = \dfrac{-a_1-a_2+a_3+a_4-a_5}{2}$

$A_{10} = \dfrac{-a_1-a_2+a_3-a_4+a_5}{2}$, $A_{11} = \dfrac{-a_1-a_2-a_3+a_4+a_5}{2}$, $A_{12} = \dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4-a_5}{2}$

$A_{13} = \dfrac{a_1+a_2+a_3-a_4+a_5}{2}$, $A_{14} = \dfrac{a_1+a_2-a_3+a_4+a_5}{2}$, $A_{15} = \dfrac{a_1-a_2+a_3+a_4+a_5}{2}$

$A_{16} = \dfrac{-a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{2}$ とおく。

次に $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{gl}(2)$ (=GL(2)のリー環)の$\overbrace{\text{恒等表現}}^{d\rho_2}$の表現空間を V_2 とする。 $\mathfrak{g}_2 \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = X$ に対し $d\rho_2(X)$ は

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{pmatrix}$ なる V_2 の1次変換である.

$G = O(10) \times GL(2)$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ の $V = V_1 \otimes V_2$ における表現 $d\rho = d\rho_1 \oplus d\rho_2$ を考える。$\mathfrak{g} \ni X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\lambda \in V_1$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in V_2$ に対し $d\rho\left(X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\left(\lambda \otimes \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = (d\rho_1(X)\lambda) \otimes \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda \otimes d\rho_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ である。$V = V_1 \otimes V_2 \ni v$ における $\mathfrak{g}$ の *isotropy subalgebra* $\mathfrak{g}_v$ とは $\mathfrak{g}_v = \{ X \in \mathfrak{g} \mid d\rho(X)\, v = 0 \}$ の事である。

> Prop 1. (KIMURA) $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10) \times GL(2)}$ は正則な概均質ベクトル空間で *generic* な点における *isotropy subgroup* の連結成分は $(G_2) \times SL(2)$

Proof)

$$V \ni v = (1 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (e_1 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

における *isotropy subalgebra* を計算してみると

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & C & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -b \\
\alpha_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \mu_2 & 0 & -\alpha_1 & 0 & -\beta_3 & \beta_2 & 0 \\
\alpha_2 & \nu_1 & \lambda_2 & \mu_3 & 0 & -\alpha_2 & \beta_3 & 0 & -\beta_1 & 0 \\
\alpha_3 & \nu_2 & \nu_3 & \lambda_3 & 0 & -\alpha_3 & -\beta_2 & \beta_1 & 0 & 0 \\
b & 0 & 0 & 0 & 2a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & C & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -b \\
\beta_1 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & 0 & -\beta_1 & -\lambda_1 & -\nu_1 & -\nu_2 & 0 \\
\beta_2 & -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 & 0 & -\beta_2 & -\mu_1 & -\lambda_2 & -\nu_3 & 0 \\
\beta_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 & -\beta_3 & -\mu_2 & -\mu_3 & -\lambda_3 & 0 \\
-C & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & -2a
\end{array}\right) \oplus \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

with $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

これは17次元である。群が49次元，表現空間が32次元 $49 - 32 = 17$ ゆえ これは概均質ベクトル空間である.

さて isotropy subalgebra の 10×10 行列の部分を A とおく。

$$S=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

に対し

$$S^{-1}AS=\left(\begin{array}{ccccccc|ccc} \lambda_1&\mu_1&\mu_2&0&-\beta_3&\beta_2&2\alpha_1&0&0&0\\ \nu_1&\lambda_2&\mu_3&\beta_3&0&-\beta_1&2\alpha_2&0&0&0\\ \nu_2&\nu_3&\lambda_3&-\beta_2&\beta_1&0&2\alpha_3&0&0&0\\ 0&\alpha_3&-\alpha_2&-\lambda_1&-\nu_1&-\nu_2&2\beta_1&0&0&0\\ -\alpha_3&0&\alpha_1&-\mu_1&-\lambda_2&-\nu_3&2\beta_2&0&0&0\\ \alpha_2&-\alpha_1&0&-\mu_2&-\mu_3&-\lambda_3&2\beta_3&0&0&0\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3&\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0&2a&2b&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&c&0&-b\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-2c&-2a \end{array}\right)$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} (\mathfrak{g}_2)\text{の}\ 7\text{次表現} & 0\\ \hline 0 & \mathfrak{sl}(2)\text{の}\ \text{随伴表現} \end{array}\right]$$

従って V における isotropy subgr. の連結成分は

$(G_2)\times SL(2)$ である事がわかる。これは reductive であるから この概均質ベクトル空間は正則である. // Prop 1.

さて $(G_2)\times SL(2) \hookrightarrow O(10)$ がわかったから $O(10) \xrightarrow{\text{半スピン表現}} SL(16)$ を $(G_2)\times SL(2)$ へ制限したときの様子を weight の計算によって調べてみると $V_1=V(16)$ は次のように分解する事がわかる。

$V(16)=(V(1)\oplus V(7))\otimes V(2)$　　ここで

$V(7)$ は (G_2) の最小次元(7次元)既約表現の表現空間

$V(1)$ には (G_2) が trivial に作用し, $V(2)$ は $SL(2)$ の恒等表現の表現空間である。

そして $(1+e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4)$, $(e_1\wedge e_5+e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5)$ はともに $V(1)\otimes V(2)$ ($\subset V(16)$) の元, すなわち (G_2) が trivial に作用している.

Prop.1 において isotropy subgroup が $(G_2)\times SL(2)$ である事から $SL(2)$ の作用がなくても概均質であろうと思われるが実際に計算すれば確かに $(GO(10), V(16)\oplus V(16))$ は概均質である。但しこれは既約ではない。

> **Cor.** (Sato-Kimura) $O(9)\times GL(2)$ は概均質ではない。
> スピン表現 $\otimes$ □

Proof) $O(9)$ のスピン表現は $O(10)$ の半スピン表現を $O(9)$ へ制限したものである事に注意する。$O(9)\hookrightarrow O(10)$ を適当にとれば (i.e. $V(10)$ の non-isotropic な x_0 を適当にとれば)
$(G_2)\times SL(2)\cap O(9)$ の次元が $40-32=8$ となる筈である。
リー環でいえば

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{g}_2 & 0 \\ 0 & \mathfrak{sl}(2) \end{pmatrix}\cap \mathfrak{o}(9) = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_2 & 0 \\ 0 & \mathfrak{sl}(2) \end{pmatrix}\cap \{A\in\mathfrak{o}(10) \mid A\cdot x_0=0\}$$

の次元が 8 になる筈。

しかるに $\dim\begin{pmatrix} \mathfrak{g}_2 & 0 \\ 0 & \mathfrak{sl}(2) \end{pmatrix}=17$, $\det(\mathfrak{g}_2)=0$, $\det(\mathfrak{sl}(2))=0$

ゆえ どのような x_0 をとってきても

$$\dim\begin{pmatrix} \mathfrak{g}_2 & \\ & \mathfrak{sl}(2) \end{pmatrix}\cap\mathfrak{o}(9) \geq 17-(7-1)-(3-1)=9$$

従ってこれは概均質ではあり得ない。 //Cor.

次に $O(10)\times GL(3)$ (半スピン表現 $\otimes$ □) を調べるのだが，その為に再び $O(10)\times GL(2)$ (半スピン表現 $\otimes$ □) についてその構造を調べよう。

$x_0 = 1 + e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$, $x_0' = e_1\wedge e_5 + e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5$ とすれば (x_0, x_0') の *isotropy subgroup* $(G_2)\times SL(2)$ において (G_2) は x_0, x_0' に *trivial* に作用している事は述べたが，$SL(2)$ は左右から作用して打ち消しあって (x_0, x_0') を *fix* している。その様子をリー環でみてみよう。

$X = A \oplus B$, $A = \begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & c & & & -b \\ b & & 2a & b & & \\ \hline & & c & & & -b \\ -c & & & -c & & -2a \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}5 \\ \\ \}5 \end{array} \\ \underbrace{\qquad\quad}_{5}\ \underbrace{\qquad\quad}_{5} & \end{array}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ とおくと

$Ax_0 = -ax_0 - bx_0'$, $Ax_0' = -cx_0 + ax_0'$, 一方 B は列を動かし

$\left(\boxed{\begin{smallmatrix}1\\ 列\end{smallmatrix}}\ \boxed{\begin{smallmatrix}2\\ 列\end{smallmatrix}}\right)B = \left(a\boxed{\begin{smallmatrix}1\\ 列\end{smallmatrix}} + b\boxed{\begin{smallmatrix}2\\ 列\end{smallmatrix}},\ c\boxed{\begin{smallmatrix}1\\ 列\end{smallmatrix}} - a\boxed{\begin{smallmatrix}2\\ 列\end{smallmatrix}}\right)$ となるから

$(x_0, x_0')B = (ax_0 + bx_0', cx_0 - ax_0')$ $\therefore A(x_0, x_0') + (x_0, x_0')B = 0$

これは $SL(2)$ の左右からの作用が打ち消しあっている事を示している。

さて $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(3)}$ において，$x_0, x_0' \in V(1)\otimes V(2)$ $(\subset V(16))$ ゆえ第三の16次元ベクトルは $V(7)\otimes V(2)$ の元をとるべきだという事が予想される。

> Prop 2. (Kimura-Sato) $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(3)}$ は正則な概均質ベクトル空間で *generic* な点における *isotropy subgroup* の連結成分は $SL(2)\times O(3)$ である。

Proof) x_0, x_0' を上記のベクトルとし x_0'' を新しい16次元ベクトルとする。このとり方が大切なのであるが，今 $O(10)\times GL(3)$ の *reductive* でない部分群 $O(10)\times\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{GL(2)} & * \\ & & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right)$ を考える。今 $O(10)$ を左から半スピン表現で，$\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{GL(2)} & * \\ & & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right)$ を右から列の交換 etc. として作用させる。

$O(10)$ $\begin{array}{ccc} x_0 & x_0' & x_0'' \end{array}$ $\left(\begin{array}{c|c} GL(2) & * \\ & * \\ \hline 0\ 0 & * \end{array}\right)$ （$V(16)$ の base を適当にとれば x_0, x_0' は このような 16次元 縦ベクトルとして 表わす事ができることが証明される.）

ここで右からの作用は x_0, x_0' 間の作用をひきおこす。よって この中で x_0, x_0' を fix するものは Prop.1. によって

$(G_2)\times SL(2)$ $\begin{array}{ccc} x_0 & x_0' & x_0'' \end{array}$ $\left(\begin{array}{c|c} SL(2) & h_1 \\ & h_2 \\ \hline 0\ 0 & * \end{array}\right)$ ここで 左右の $SL(2)$ は同じもの。

既述のように (G_2) は $7\{$, $7\{$ に作用し（i.e. trivial な作用。x_0' でも同様）左の $SL(2)$ は $8\{$, $8\{$ ここの交換 etc. として作用する。 右の $SL(2)$ は x_0, x_0' の列の交換 etc. として作用し 互に打ち消しあって全体として x_0, x_0' を fix する。

さて h_1, h_2 を適当にとる事によって x_0'' の形を $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \}7 \\ \\ \}7 \\ \end{matrix}$ とする事ができる。以下 h_1, h_2 をそのように fix する。そして $*\,(\neq 0)$ を任意にとれるから x_0'' を scalar 倍する事ができる。すなわち $(G_2)\times GL(2)$ が $\}7$, $\}7$ に作用する。 G_2 は $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$ の各々に作用し $GL(2)$ は $\Big)$, $\Big)$ の交換 etc. として作用する.

結局 $(G_2)\times GL(2)$ が $V(7)\oplus V(7)$ に作用しているのであるが， これは概均質で isotropy subgroup は $GL(2)$ である.

すなわち $O(10)\times\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{GL(2)} & * \\ & & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right) \Big/ GL(2)$ は概均質である.

半スピン表現 ⊗ □

群を大きくしても勿論, 概均質ゆえ $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(3)}$ も概均質である。

x_0'' をとるには $\underset{\text{7次表現}\otimes\square}{(G_2)\times GL(2)}$ の generic な点をとればよい。

例えば $V(7)\oplus V(7)\ni\left(\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{array}\right)$ は generic な点である。

これに対応するのは $x_0''=e_1\wedge e_2+e_1\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5$ である。

(x_0, x_0', x_0'') における isotropy subalgebra を計算すると次の通り。

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & -3e & & & & & -3f & & & \\
-f & a & & & -2e & 3f & & & & \\
 & & \lambda & \mu & & & & & e & \\
 & & \nu & -\lambda-a & & & & -e & & \\
 & -2f & & & 2a & & & & & \\
\hline
 & e & & & & & f & & & \\
-e & & & & & 3e & -a & & & 2f \\
 & & & -f & & & & -\lambda & -\nu & \\
 & & f & & & & & -\mu & \lambda+a & \\
 & & & & & & 2e & & & -2a
\end{array}\right)\oplus\left(\begin{array}{ccc} a & & 2f \\ & -a & 2e \\ e & f & \end{array}\right)$$

これは 6次元. 群の次元 $=54$, 表現空間の次元 $=48$

このリー環の Killing form を計算すると non-degenerate である事がわかるから Cartan の判定条件により semi-simple. よってこの空間は正則である。 実は isotropy subgroup の連結成分は $SL(2)\times O(3)$ である事がわかる。 //Prop 2.

Cor. $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(2)}$ は概均質ではない

Proof) $SL(2)$の随伴表現は$O(3)$の基本表現と考える事ができる。すなわち $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(2)}$ を $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GO(3)}$ と考える。

そのとき $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GO(3)} \hookrightarrow \underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(3)}$ と考えられる

もしこれが概均質ならば generic な点の isotropy subalgebra の次元 $= 49-48=1$ である筈。しかるに $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(10)\times GL(3)}$ の isotropy subalgebra は Prop 1 の証明中にある如くだから　どの点の isotropy subalg. も 次元 $\geqq 3$ //

Prop 3 $\underset{\text{半スピン表現}\otimes\square}{O(12)\times GL(2)}$ は概均質ではない (Sato-Kimura)

Proof) $\underset{\text{半スピン表現}}{GO(12)}/SL(6)$ が概均質である事は知られている。(1970；新谷)

表現空間 $V(32)$ は $SL(6)$ の表現空間としては次のように分解している事が weight の計算により確かめられる。

$$V(32) = V(1)\oplus V(1)\oplus \underset{\text{日}}{V(15)} \oplus \underset{\text{日のdual}}{V(15)}$$

$GL(2)$の元は一般に $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ と分解できる。(分解できない行列全体は3次元 i.e codim 1)

$O(12)\times GL(2)$ のかわりに $O(12)\times\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ なる群を考える。

$$32\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} O(12)\text{の} \\ \text{半スピン} \\ \text{表現} \end{bmatrix}}_{32}\right. \begin{bmatrix} x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

に於いて x_0 を fix するのは $SL(6)$

ゆえ
$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & A & \\ \hline & & & {}^tA^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & h \\ 0 & k \end{bmatrix},$$
但し A は $SL(6)$ の日なる表現.
(m : fixed)

ここで A と k の作用によって y_1 は $\underset{\text{日}}{GL(6)}$ の表現空間の元と考える事ができる。

$\underset{\text{日}}{GL(6)}/Sp(3)$ は正則概均質であるから y_1 をその generic な点とする。 $Sp(3)$ 日とその contragredient は同じゆえ

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \underset{\text{日}}{Sp(3)} & \\ \hline & & & \underset{\text{日}}{Sp(3)} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & h \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

(正確にいえば $\underset{\text{日}}{GL(6)}$ を $Sp(3)$ に制限すれば既約ではなく、その15次元表現空間は14次元表現空間と1次元の空間とに分解する.)

$V=\{X\in M(6)\mid {}^tX=-X\}\ni X$, $Sp(3)\ni A$ に対し
$X\longmapsto AX{}^tA$ と作用するが generic な点は $\left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -a_1 & & \\ & -a_2 & \\ & & -a_3 \end{matrix} & \end{array}\right)$ という形へうつせる. (それは a_1, a_2, a_3 の置換を除いて unique)

それを不変にする $Sp(3)$ の部分群は $3\,Sp(1)$ である事が計算により確かめられる. i.e. isotropy subgroup の次元は 9.

従って $O(12)\times\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ による generic な点の orbit は $69-9=60$ 次元.

そのあと $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ を作用させても orbit の次元は高々1つふえるだけゆえ (表現空間の次元は64だから) これは概均質ではない. //

§3. 例外型既約概均質ベクトル空間について

この§の目標は次の空間の概均質性を調べる事である。

$E_6 \times GL(2)$（27次表現⊗□），$E_6 \times GL(3)$（27次表現⊗□），$E_6 \times GL(2)$（27次表現⊗□□），$F_4 \times GL(2)$（26次表現⊗□），$E_7 \times GL(1)$（56次表現），

$E_7 \times GL(2)$（56次表現⊗□）

まず F_4 の26次表現，E_6 の27次表現について簡単に述べる。

$\mathbb{C}$ = 複素数体，$Q = \mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\cdot e_1 + \mathbb{C}\cdot e_2 + \mathbb{C}\, e_1e_2$ ($e_1^2 = 1$, $e_2^2 = 1$, $e_1e_2 = -e_2e_1$) を $\mathbb{C}$ 上の四元数環とし Q 上の二次加群 $\mathcal{L} = Q\cdot 1 + Q\cdot e$ に乗法を $(q+re)(s+te) = (qs - \bar{t}r) + (tq + r\bar{s})e$ ($q, r, s, t \in Q$，$\bar{s}, \bar{t}$ は s, t の共役四元数) と定義して得られる $\mathbb{C}$ 上8次元の *non-associative* な *algebra* を *Cayley algebra* という。$\mathcal{L} \ni x = q + re$ ($q, r \in Q$) に対しその共役を $\bar{x} = \bar{q} - re$ と定める。$\overline{xy} = \bar{y}\cdot\bar{x}$ である。$\mathfrak{J}$ が *the exceptional simple Jordan algebra over* $\mathbb{C}$ とは

$$\mathfrak{J} = \left\{ X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C} \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{L} \end{matrix} \right\}$$

に乗法を $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$（$XY$, YX は普通の行列の積）と定義したものをいう。$\dim \mathfrak{J} = 27$. $Sp\, X \overset{\text{def}}{=} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ とする。

◎ $\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{J}$ の *derivation algebra* とは $\mathfrak{J}$ の1次変換 D で $D(X\circ Y) = DX \circ Y + X \circ DY$ をみたすもの全体のなす *Lie algebra* のこと。

◎ R_Y ($Y \in \mathfrak{J}$) が右乗法とは $X \longmapsto X \circ Y$ (for $\forall X \in \mathfrak{J}$) なる $\mathfrak{J}$ の一次変換の事である。そのとき次の事が成り立つ。

☆ $\mathfrak{J}$ の derivation algebra は $\mathbb{C}$ 上 52 次元, rank 4 の 例外単純リー環 F_4 である。 $\mathbb{C}$ 上 78 次元, rank 6 の例外単純リー環 E_6 は trace 0 の元による右乗法と $\mathfrak{J}$ の derivation 全体の生成するリー環である

$$E_6 = \mathfrak{D} + \{R_Y\},\ S_p Y = 0, \qquad F_4 = \mathfrak{D}$$

これが E_6 の 27 次既約表現, $\mathfrak{J}$ は F_4 の作用で既約ではないが, それを $\mathfrak{J}_0 = \{X \in \mathfrak{J} \mid S_p X = 0\}$ へ制限したものが F_4 の 26 次既約表現である.

[注) $\mathfrak{J} \ni \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ における isotropy subalgebra を計算する事により直ちに $\boxed{\underset{27次表現}{E_6 \times GL(1)} / F_4}$ が得られる.]

$\mathfrak{D}$ の構造を述べる。 $\mathfrak{o}(8,\mathbb{C}) = \{X \in M(8,\mathbb{C}) \mid {}^t X + X = 0\}$ を Cayley alg. の一次変換と考える。 $\mathfrak{L} \ni x$ に対し $S_p x = x + \bar{x}$ とおく。そのとき $U \in \mathfrak{o}(8,\mathbb{C})$ に対して $\exists 1\ U', U'' \in \mathfrak{o}(8,\mathbb{C})$ s.t.

$$S_p (Ux)yz + S_p x(U'y)z + S_p xy(U''z) = 0$$

いま

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a \in \mathfrak{L}$ に対し

$$(a)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & \bar{a} & 0 \end{pmatrix},\quad (a)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad (a)_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ \bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。 E_1, E_2, E_3 を 0 へうつす $\mathfrak{J}$ の derivations 全体を $\mathfrak{D}_0$ とすると

$$\mathfrak{D}_0 = \left\{ D \in \mathfrak{D} \;\middle|\; D \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U''x_3 & \overline{U'x_2} \\ \overline{U''x_3} & 0 & Ux_1 \\ U'x_2 & \overline{Ux_1} & 0 \end{pmatrix} \text{ for } \exists U \in \mathfrak{o}(8,\mathbb{C}) \right\}$$

である事が知られている.

$\mathfrak{D}_0 \cong \mathfrak{o}(8,\mathbb{C})$, $\dim \mathfrak{D}_0 = 28$ である. 次に

$\mathcal{J}$の一次変換 A, B に対し $[A,B]=AB-BA$ と定義すると

$\mathcal{T}_1=\{[R_{E_2},R_{(a)_1}]\mid a\in\mathcal{L}\}$

$\mathcal{T}_2=\{[R_{E_1},R_{(a)_2}]\mid a\in\mathcal{L}\}$

$\mathcal{T}_3=\{[R_{E_1},R_{(a)_3}]\mid a\in\mathcal{L}\}$ とおけば $\dim\mathcal{T}_i=8$ ($i=1,2,3$) で $\mathcal{D}=\mathcal{D}_0\oplus\mathcal{T}_1\oplus\mathcal{T}_2\oplus\mathcal{T}_3$ と分解する。以上について詳しくは[5], [6]を参照のこと。

Prop 1. (KIMURA) $E_6\times GL(2)$ (27次表現⊗□) は正則概均質でその generic な点における isotropy subgroup の連結成分は $O(8)$ である。

Proof) $\left\langle \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}\right\rangle$ における isotropy subalg. が $\mathcal{D}_0$ ($\cong \mathcal{O}(8,\mathbb{C})$) になる事を示す。まず $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3$ の作用を具体的に計算してみると次のようになる。

$$\begin{bmatrix}\xi_1 & x_3 & \bar{x}_2\\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3\end{bmatrix}\xmapsto[\mathcal{T}_1]{[R_{E_2},R_{(a)_1}]}\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\overline{ax_2}}{4} & \dfrac{x_3a}{4}\\ -\dfrac{ax_2}{4} & -\dfrac{x_1\bar{a}+a\bar{x}_1}{4} & \dfrac{a(\xi_2-\xi_3)}{4}\\ \dfrac{\overline{x_3a}}{4} & \dfrac{\bar{a}(\xi_2-\xi_3)}{4} & \dfrac{\bar{a}x_1+\bar{x}_1a}{4}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\xi_1, & x_3, & \bar{x}_2\\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3\end{bmatrix}\xmapsto[\mathcal{T}_2]{[R_{E_1},R_{(a)_2}]}\begin{bmatrix}-\dfrac{\bar{x}_2a+\bar{a}x_2}{4}, & -\dfrac{\overline{x_1a}}{4}, & \dfrac{\bar{a}(\xi_1-\xi_3)}{4}\\ -\dfrac{x_1a}{4}, & 0, & \dfrac{\overline{ax_3}}{4}\\ \dfrac{a(\xi_1-\xi_3)}{4} & \dfrac{ax_3}{4}, & \dfrac{a\bar{x}_2+x_2\bar{a}}{4}\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[R_{E_1},\, R_{(a)_3}]} \begin{pmatrix} -\dfrac{a\bar{x}_3 + x_3\bar{a}}{4}, & \dfrac{a(\xi_1-\xi_2)}{4}, & -\dfrac{ax_1}{4} \\ \dfrac{\bar{a}(\xi_1-\xi_2)}{4}, & \dfrac{\bar{x}_3 a + \bar{a}x_3}{4}, & \dfrac{\overline{x_2 a}}{4} \\ -\dfrac{\overline{ax_1}}{4}, & \dfrac{x_2 a}{4}, & 0 \end{pmatrix}$$

さて $v = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し

$z = X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_6 \oplus \mathfrak{gl}(2)$ （群 E_6 とリー環 E_6 を区別しないで書く）で

$$d\rho(z)\cdot v = \left[X\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} +$$

$$\left[X\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right] \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 0$$ となる z

全体が すなわち v における *isotopy subalgebra* $\mathfrak{g}_v$ である。 $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{g}_v$ は定義から明らかゆえ その逆 $\mathfrak{g}_v \subseteq \mathfrak{D}_0$ を示す。

$a \in \mathfrak{L}$ に対し $(a)'_1 = [R_{E_2}, R_{(a)_1}] \in \mathfrak{J}_1$

$(a)'_2 = [R_{E_1}, R_{(a)_2}] \in \mathfrak{J}_2$, $(a)'_3 = [R_{E_1}, R_{(a)_3}] \in \mathfrak{J}_3$ と書く事にすれば

$E_6 \ni X = D_0 + (\alpha)'_1 + (\beta)'_2 + (\gamma)'_3 + R_Y$ $(S_p Y = 0)$

$D_0 \in \mathfrak{D}_0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{L}$ と一意的に分解できる。

今 $z = [D_0 + (\alpha)'_1 + (\beta)'_2 + (\gamma)'_3 + R_Y] \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_v$ とすると

$$\left[Y + \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b & & \\ & 2b & \\ & & b \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ゆえ, $Y = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$

とおけば

$$\begin{bmatrix} \xi_1 + a + 3b & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 + a + 2b & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 + a + b \end{bmatrix} = 0 \quad \text{with } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

$\therefore x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $\xi_1 = -b$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = b$

従って $Y = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, $a = -2b$ でなければならない。

次に

$$\left[(\alpha)'_1 \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + (\beta)'_2 \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + (\gamma)'_3 \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b & & \\ & 0 & \\ & & b \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} c & & \\ & c & \\ & & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3d & & \\ & 2d & \\ & & d \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{4} \\ 0 & \frac{\bar{\alpha}}{4} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\bar{\beta}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{4} & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b+c+3d & 0 & 0 \\ 0 & 2d+c & 0 \\ 0 & 0 & d+c+b \end{pmatrix}$$

$$= 0 \qquad \therefore \alpha = \beta = \gamma = 0 \qquad \begin{cases} c - 3b + 3d = 0 \\ c + 2d = 0 \\ c + b + d = 0 \end{cases} \longrightarrow b = c = d = 0 \quad \therefore a = 0$$

すなわち $z = [D_0 + (\alpha)'_1 + (\beta)'_2 + (\gamma)'_3 + R_Y] \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_v$ ならば

$z = D_0$ $\quad \therefore \mathfrak{g}_v \subseteq \mathfrak{D}_0$.

従って $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{D}_0 \cong \mathfrak{o}(8, \mathbb{C})$. よって正則概均質である //

(群の次元$=82$, 表現空間の次元$=54$
$\dim O(8) = 28 = 82 - 54$. 正則性は明らか)

Prop 2. (KIMURA) $\underset{27\text{次表現}\otimes\square}{E_6 \times GL(3)}$ は概均質ではない。

Proof) $\underset{27\text{次表現}\otimes\square}{E_6 \times GL(3)}$ がもし概均質ならば そのgenericな点として $\left\langle \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&x_3&\bar{x}_2\\ \bar{x}_3&0&x_1\\ x_2&\bar{x}_1&\xi\end{pmatrix} \right\rangle$

なる形の点をとる事ができる。まずそれを示そう。

$\langle A, B, C\rangle$ をgenericな点とする。$E_6\langle A,B,C\rangle\begin{pmatrix}a&b&0\\d&e&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$= E_6\langle aA+dB,\ bA+eB,\ C\rangle$

Prop 1 により $\underset{27\text{次表現}\otimes\square}{E_6 \times GL(2)}$ は概均質で $\left\langle \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}\right\rangle$

がgenericな点ゆえ E_6 の元 X と a, b, e, d を適当にとれば

$X(aA+dB) = \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, $X(bA+eB) = \begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$ とな

る。 よって最初から $A = \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$ としてよい。

$C = \begin{pmatrix}\xi_1&x_3&\bar{x}_2\\ \bar{x}_3&\xi_2&x_1\\ x_2&\bar{x}_1&\xi_3\end{pmatrix}$ とおく。 一般に ($k\neq 0$ なら) $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&0&c\\0&1&f\\0&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-\frac{cg}{k}, & b-\frac{ch}{k}, & 0\\ d-\frac{fg}{k}, & e-\frac{fh}{k}, & 0\\ \frac{g}{k}, & \frac{h}{k}, & 1\end{pmatrix}$$ と分解できるから

$$E_6\left\langle \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_1&x_3&\bar{x}_2\\ \bar{x}_3&\xi_2&x_1\\ x_2&\bar{x}_1&\xi_3\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}$$

$$= E_6\left\langle \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}k\xi_1+c+3f, & kx_3, & k\bar{x}_2\\ k\bar{x}_3, & k\xi_2+c+2f, & kx_1\\ kx_2, & k\bar{x}_1, & k\xi_3+c+f\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}*&*&0\\ *&*&0\\ *&*&1\end{pmatrix}$$

ここで $f' = f + k(\xi_1 - \xi_2)$, $c' = c + k(3\xi_2 - 2\xi_1)$, $\xi = \xi_1 + \xi_3 - 2\xi_2$

とおくと
$$= E_6 < \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c'+3f' & kx_3 & k\bar{x}_2 \\ k\bar{x}_3 & c'+2f' & kx_1 \\ kx_2, & k\bar{x}_1, & k\xi + c' + f' \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_6 < \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 0 & c' \\ 0 & 1 & f' \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_6 < \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & k \end{pmatrix}$$

さて
$$v = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
における $E_6 \oplus \mathfrak{gl}(3)$ の isotropy subalg を $\mathfrak{g}_v$ としよう。

今示した事により $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{L}$, $\xi \in \mathbb{C}$ を適当にとれば v は generic な点になるのであるから，そのとき $\dim \mathfrak{g}_v = (78+9) - 27 \times 3 = 6$ でなければならない。

さて $\mathfrak{g}_v \ni X' = X \oplus \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, $X = D_0 + (\alpha)_1' + (\beta)_2' + (\gamma)_3' + R_Y$

とする。 但し

$(\alpha)_1' = [R_{E_2}, R_{(\alpha)_1}]$, $(\beta)_2' = [R_{E_1}, R_{(\beta)_2}]$, $(\gamma)_3' = [R_{E_1}, R_{(\gamma)_3}]$

$$Y = \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix} \text{ with } \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$ まず

$$\left[X \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b & & \\ & 2b & \\ & & b \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \eta_1+a+3b, & y_3+cx_3, & \overline{y}_2+c\overline{x}_2 \\ \overline{y}_3+c\overline{x}_3, & \eta_2+a+2b, & y_1+cx_1 \\ y_2+cx_2, & \overline{y}_1+c\overline{x}_1, & \eta_3+a+b+c\xi \end{pmatrix}=0 .\quad \therefore Y=\begin{pmatrix} -a-3b, & -cx_3, & -c\overline{x}_2 \\ -c\overline{x}_3, & -a-2b, & -cx_1 \\ -cx_2, & -c\overline{x}_1, & -a-b-c\xi \end{pmatrix}$$

with $3a+6b+c\xi=0$ となる． 次に

$$\left[X\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & & \\ & d & \\ & & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3e & & \\ & 2e & \\ & & e\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f\xi_1, & fx_3, & f\overline{x}_2 \\ f\overline{x}_3 & f\xi_2 & fx_1 \\ fx_2 & f\overline{x}_1 & f\xi_3\end{pmatrix}\right]\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0$$

であるから

$\alpha=2(3c-2f)x_1$, $\beta=2(2c-f)x_2$, $\gamma=2(5c-2f)x_3$, $b=\frac{(f-c)\xi}{2}$

$d=3(c-f)\xi$, $e=a+\frac{5(f-c)\xi}{2}$ となる。 結局

$$X=D_0+[2(3c-2f)x_1]_1'+[2(2c-f)x_2]_2'+[2(5c-2f)x_3]_3'+RY$$

$$Y=\begin{pmatrix} -a-3b, & -cx_3, & -c\overline{x}_2 \\ -c\overline{x}_3, & -a-2b, & -cx_1 \\ -cx_2, & -c\overline{x}_1, & -a-b-c\xi \end{pmatrix},\quad 3(a+2b)=-c\xi$$

最後に

$$\left\langle X\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g & & \\ & g & \\ & & g\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3h & & \\ & 2h & \\ & & h\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k\xi_1 & kx_3 & k\overline{x}_2 \\ k\overline{x}_3 & k\xi_2 & kx_1 \\ kx_2 & k\overline{x}_1 & k\xi_3\end{pmatrix}\right\rangle\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$=0$． これは 27個の方程式を表わしているが これが

すべて独立 $\longleftrightarrow$ $\underset{\text{27次表現のロ}}{E_6\times GL(3)}$ が概均質，である。

実際に計算してみると 27個の方程式は次のようになる。

① $(f-3c)x_2\overline{x}_2+2(f-3c)x_3\overline{x}_3+g+3h=0$

② $2(f-2c)x_1\overline{x}_1+2(2c-f)x_3\overline{x}_3+g+2h=0$

③ $2(c-f)x_1\overline{x}_1+(c-f)x_2\overline{x}_2+(2a+5b)\xi+g+h+k\xi=0$

④〜⑪ $Ux_1+\frac{(4a+9b)+2k+(2f-3c)\xi}{2}x_1+\frac{(5c-3f)}{2}\overline{x_2x_3}=0$

⑫〜⑲ $U'\overline{x_2} - 2cx_3x_1 + \left(k + 2a + 4b + \frac{(f-2c)\xi}{2}\right)\overline{x_2} = 0$

⑳〜㉗ $U''x_3 + \frac{3f-7c}{2}\overline{x_1x_2} + \left(k - \frac{2a+5b}{2}\right)x_3 = 0$

($U \in \mathfrak{O}(8, \mathbb{C})$. U', U'' については P.28 参照)

$E_6 \times GL(3)$ が概均質である事と $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{L}$, $\xi \in \mathbb{C}$ を
27次表現の口

適当にとれば ①〜㉗ の方程式が独立になる、という事と同値である。 いかなる x_1, x_2, x_3, ξ に対しても決して独立にならない事を証明する。

$\xi = 0$ のとき) ①,②,③ が独立なら 例えば $f = n_1c$, $g = n_2c$, $k = n_3c$ と表わせる。($n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{C}$. もし表わせなければ c のかわりに f, g, k の いずれかを使える. $2b = (f-c)\xi = 0$, $3a + 6b = -c\xi = 0$ より $a = b = 0$ に注意) 従って ④〜㉗ は次の形をしている。

$$Ux_1 + kx_1 + n'c\overline{x_2x_3} = 0 \quad (\exists n' \in \mathbb{C}) \quad \cdots \quad 1)$$

$$U'\overline{x_2} + k\overline{x_2} - 2cx_3x_1 = 0 \quad \cdots\cdots \quad 2)$$

$$U''x_3 + kx_3 + n''c\overline{x_1x_2} = 0 \quad (\exists n'' \in \mathbb{C}) \quad \cdots \quad 3)$$

ところで U, U', U'' は 8次の歪対称行列ゆえ $Ux_1 = 0$, $U'\overline{x_2} = 0$, $U''x_3 = 0$ は各々 高々7個の独立な方程式を表わす. 例えば $Ux_1 = 0$ の表わす 8個の方程式を $P_1 = 0, \cdots, P_7 = 0$, $P_8 = P_1 + \cdots + P_7 = 0$ とし $U'\overline{x_2} = 0$ の表わす 8個の方程式を $P_1' = 0, \cdots, P_7' = 0$, $P_8' = P_1' + \cdots + P_7' = 0$ とする. 1) と 2) が独立ならば

$$\left\{\begin{array}{l} P_1 + k + \alpha_1 c = 0 \\ = = = = \\ P_8 + k + \alpha_8 c = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} P_1' + k + \alpha_1' c = 0 \\ = = = \\ P_8' + k + \alpha_8' c = 0 \end{array}\right.$$

は独立な16個の式を表わす。

$P_8 = P_1 + \cdots + P_7$ より $n\mathfrak{k} + mC = 0$ ($\exists n, m \in \mathbb{C}$, 独立性より $n = m = 0$ という事はない.) よって例えば $\mathfrak{k} = \alpha C$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) と表わせたとすれば $P_1' + \alpha_1' C = 0, \cdots, P_8' + \alpha_8' C = 0$ が独立な8個の方程式を表わすが $P_8' = P_1' + \cdots + P_7'$ より $C = 0$ $\therefore \mathfrak{k} = 0$ 従って 3) は $U'' x_3 = 0$ となるが これは高々7個の独立な式しか表わさない.

$\xi \neq 0$ の場合も $\xi = 0$ のときと殆ど同じ方法で 27個の方程式の従属性が証明できる. 従って $\underset{\text{27次表現}\otimes\square}{E_6 \times GL(3)}$ は概均質ではあり得ない. //Prop2.

Cor. $\underset{\text{27次表現}\otimes\square\square}{E_6 \times GL(2)}$ は概均質ではない.

Proof) $\underset{\text{27次表現}\otimes\square\square}{E_6 \times GL(2)}$ は $\underset{\text{27次表現}\otimes\square}{E_6 \times GO(3)}$ と考える事ができる. もしこれが概均質なら $\underset{\text{27次表現}\otimes\square}{E_6 \times GO(3)} \subset \underset{\text{27次表現}\otimes\square}{E_6 \times GL(3)}$ ゆえ勿論 $\underset{\text{27次表現}\otimes\square}{E_6 \times GL(3)}$ も概均質である. これは Prop 2 に反する. //

Prop 3. $\underset{\text{26次表現}\otimes\square}{F_4 \times GL(2)}$ は概均質ではない.

略証) F_4 の 26次元の既約表現空間は

$$\mathfrak{J}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{J} \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\}$$

であり群 F_4 のリー環 F_4 (同じ記号を使う) は $\mathfrak{J}_0$ の *derivations* 全体である。

$\mathfrak{J}$ の元は (generic なところでは) F_4 の作用で $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix}$ という形へうつす事ができる。(P.42参照) 従って $F_4 \times GL(2)$ (26次表現⊗□) の generic な点として $v = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & -\xi_1-\xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる形の点をとる事ができる。

$F_4 \oplus \mathfrak{gl}(2) \ni D_0 \oplus (\alpha)_1' \oplus (\beta)_2' \oplus (\gamma)_3' \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が v を不変にする元であるとする。ここで $D_0 \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 & \alpha_2 & a_1 \\ a_2 & \bar{a}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U''a_3 & \overline{U'a_2} \\ \overline{U''a_3} & 0 & Ua_1 \\ U'a_2 & \overline{Ua_1} & 0 \end{pmatrix}$

そのとき次の $26 \times 2 = 52$ 個の連立方程式が成り立つが これが独立になるように $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$, $y_1, y_2, y_3 \in \mathfrak{C}$ を選べる事が $F_4 \times GL(2)$ (26次表現⊗□) が概均質である事と同値である。

$a\xi_1 + b\eta_1 = 0$ — ①, $a\xi_2 + b\eta_2 = 0$ — ②, $\frac{\gamma(\xi_1 - \xi_2)}{4} + by_3 = 0$ — ③~⑩
$\frac{\overline{\beta}(2\xi_1 + \xi_2)}{4} + b\bar{y}_2 = 0$ — ⑪~⑱, $\frac{\alpha(\xi_1 + 2\xi_2)}{4} + by_1 = 0$ — ⑲~㉖

まずこれらが独立な事から $a = b = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ がでる。従って
$c\xi_1 + d\eta_1 = 0$ — ㉗, $c\xi_2 + d\eta_2 = 0$ — ㉘, $U''y_3 + cx_3 + dy_3 = 0$ — ㉙~㊱
$U'\bar{y}_2 + c\bar{x}_2 + d\bar{y}_2 = 0$ — ㊲~㊹, $Uy_1 + cx_1 + dy_1 = 0$ — ㊺~52

まず ㉗, ㉘ が独立な事から $c = d = 0$, そのとき例えば ㊻~52 は 8個の方程式 $Uy_1 = 0$ となるが U は 8次の歪対称行列ゆえ高々 7個の独立な式しか表わさない。 従ってこの空間は概均質ではあり得ない。 //Prop 3.

例外リー環 E_7 の56次表現について必要な事実を証明なしでまとめておく。詳しくは[6]を参照.

$\mathcal{J}$ = the exceptional simple Jordan algebra

$\overline{\mathcal{J}}$ は対応 $x \longmapsto \overline{x} \in \overline{\mathcal{J}}$ により $\mathcal{J}$ と同型な vector space.

$\overline{\mathcal{E}}_6 = \mathbb{C}\cdot R_1 \oplus \mathcal{E}_6(\mathcal{J})$, $\quad \mathcal{E}_6(\mathcal{J}) = R(\mathcal{J}) + [R(\mathcal{J}), R(\mathcal{J})] = E_6$

このとき $E_7 = \mathcal{J} \oplus \overline{\mathcal{J}} \oplus \mathbb{C}\cdot R_1 \oplus E_6$ (Tits-Koecher alg.)

$$\mathcal{J} \ni a = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \text{ に対し } T(a) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

$T(a, b) = T(a \circ b)$ とすれば $T(a, b)$ は非退化な対称双一次形式であり, $\mathcal{J} \ni a, b$ に対しその Freudenthal product を

$a \times b = a \circ b - \frac{1}{2}T(a)b - \frac{1}{2}T(b)a + \frac{1}{2}[T(a)T(b) - T(a \circ b)]\cdot 1$ によって定義する。

$\mathcal{J}$ の一次変換 A の trace form $T(a, b)$ に関する adjoint を A^* と記す。: $T(Aa, b) = T(a, A^*b)$

右乗法 R_a $(a \in \mathcal{J})$ は self-adjoint である.

$\mathfrak{M} = \mathbb{C}\cdot 1 \oplus \mathbb{C}\cdot 1 \oplus \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}$ $(\dim \mathfrak{M} = 1+1+27+27 = 56)$ に E_7 を次のように作用させる. ($\dim E_7 = 27+27+1+78 = 133$ である.)

$\mathfrak{M} \ni X = (\xi, \eta, x, y)$ 但し $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{J}$ に対して

E_7 の $\mathfrak{M}$ への作用を次のように定義すると $\mathfrak{M}$ は E_7 の56次元の既約な表現空間になっている事が知られている.

$$
*\begin{cases}
[X, a] = (T(a,y),\ 0,\ \eta a,\ 2a \times x) & a \in \mathfrak{J} \\
[X, \tilde{a}] = (0,\ -T(a,x),\ -2a \times y,\ -\xi a) \\
[X, 2R_1] = (3\xi,\ -3\eta,\ -x,\ y) \\
[X, L] = (0,\ 0,\ xL,\ -yL^*) & L \in \mathcal{E}_6(\mathfrak{J})
\end{cases}
$$

これから直ちに次の事がわかる。

> Prop 4. $E_7 \times GL(1)$ の 56 次表現は正則概均質で generic な点における isotropy subgroup の連結成分は E_6 である.

Proof) $\mathfrak{M} \ni X_0 = (1, 1, 0, 0)$ における $E_7 \times GL(1)$ の isotropy subalg. を $\mathfrak{g}_{X_0}$ とする. $\mathfrak{g}_{X_0} \ni A = a \oplus \tilde{b} \oplus 2mR_1 \oplus L \oplus k$, 但し $m, k \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathfrak{J}$, $L \in E_6$ とすると

$[(1,1,0,0), a] = (0, 0, a, 0)$

$[(1,1,0,0), \tilde{b}] = (0, 0, 0, -b)$

$[(1,1,0,0), 2mR_1] = (3m, -3m, 0, 0)$

$[(1,1,0,0), k] = (k, k, 0, 0)$

$[(1,1,0,0), L] = (0, 0, 0, 0)$

$\therefore [X_0, A] = (3m+k, -3m+k, a, -b) = 0 \quad \therefore a = b = 0,\ m = k = 0$

$\therefore A = L \in E_6$, 逆に $E_6 \subset \mathfrak{g}_{X_0}$ は明らか ゆえ $\mathfrak{g}_{X_0} = E_6$ //

注). $\dim E_7 \times GL(1) = 134$. $\dim E_6 = 78$.

$\dim V = 56$, $78 = 134 - 56$ ゆえ 概均質.

E_6 は reductive ゆえ 正則.

$\boxed{\text{Prop 5. (Kimura) } E_7 \times GL(2) \text{ は概均質ではない.}}$

56次表現$\otimes$□

Proof) 概均質になるとして，その generic な点を $A\otimes\binom{1}{0}+B\otimes\binom{0}{1}$ とするとき Prop. 4 により $A=(1,1,0,0)$，$B=(0,\eta,x,y)$ $\eta\in\mathbb{C}$，$x,y\in\mathfrak{J}$ としても一般性を失なわない。　さて

$E_7 \ni X = P\oplus\bar{Q}\oplus 2mR_1\oplus L$　$(P,Q\in\mathfrak{J},\ m\in\mathbb{C},\ L\in\mathfrak{E}_6(\mathfrak{J}))$ とし $X\oplus\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ が $v=A\otimes\binom{1}{0}+B\otimes\binom{0}{1}$ における isotropy subalg. の元であれば

$[X\oplus\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}]\cdot v=(XA+aA+bB)\otimes\binom{1}{0}+(XB+dB+cA)\otimes\binom{0}{1}=0$ ゆえ

$XA+aA+bB=0 \cdots 1)$，　$XB+dB+cA=0 \cdots 2)$

1) 2) をあわせて $56\times 2=112$ 個の独立な方程式をあらわすように B を (i.e. $\eta\in\mathbb{C}$　$x,y\in\mathfrak{J}$ を) とる事ができる $\longleftrightarrow$ $E_7\times GL(2)$ が概均質，である。　　まず 1) を調べる。

$XA+aA+bB=(3m+a,\ b\eta-3m+a,\ P+bx,\ -Q+by)=0$

$\therefore\ a=-3m,\ b\eta=6m,\ P=-bx,\ Q=by$　$(x,y\in\mathfrak{J})$

すなわち 1) は独立な56個の方程式を表わしている。

次に 2) を調べる。

このとき 1) により　$X=(-bx)\oplus\overline{(by)}\oplus 2mR_1\oplus L$

$(a=-3m,\ b\eta=6m)$　となっていて

$[(0,\eta,x,y),\ (-bx)]=(-bT(x,y),\ 0,\ -b\eta x,\ -2bx\times x)$

$[(0,\eta,x,y),\ \overline{(by)}]=(0,\ -bT(y,x),\ -2by\times y,\ 0)$

$$[(0,\eta,x,y),\ 2mR_1] = (0,\ -3m\eta,\ -mx,\ my)$$

$$[(0,\eta,x,y),\ L] = (0,\ 0,\ xL,\ -yL^*)$$

$dB = (0, d\eta, dx, dy)$, $\quad cA = (c, c, 0, 0)$ ゆえ

$$XB + dB + cA = (c - bT(x,y),\ c + (d-3m)\eta - bT(x,y),$$
$$(d-m-b\eta)x + xL - 2by\times y,\ (d+m)y - yL^* - 2bx\times x) = 0$$

ここで $\eta = 0$ なら $c - bT(x,y) = 0$, $c + (d-3m)\eta - bT(x,y) = 0$ が同値になってしまうから $\eta \neq 0$ である. scalar倍は許されるから $\eta = 1$ として可. そのとき

$$c = bT(x,y), \quad d = 3m \quad (a = -3m,\ b = 6m)$$

及び 27×2個の方程式 $\begin{cases} (d-m-b\eta)x + xL - 2by\times y = 0 \\ (d+m)y - yL^* - 2bx\times x = 0 \end{cases}$

が得られるが $d = 3m$, $b = 6m$, $\eta = 1$ を使うと

$$\begin{cases} -4mx + xL - 12my\times y = 0 & \cdots 3) \\ 4my - yL^* - 12mx\times x = 0 & \cdots 4) \end{cases}$$

3), 4) が $27\times 2 = 54$ 個の独立な式をあらわすように $x, y \in \mathfrak{J}$ $m \in \mathbb{C}$ を適当にとれる事と $\underbrace{E_7\times GL(2)}_{56次表現の□}$ が概均質である事が同値である. L^* の定義より $(xL)\circ y = x\circ(yL^*)$ ゆえ 3) に y をかけて 4) に x をかけ 両辺を加えると

$$m[(y\times y)\circ y + (x\times x)\circ x] = 0 \quad \therefore m = 0 \text{ or } (y\times y)\circ y + (x\times x)\circ x = 0.$$

$m = 0$ とすれば 3), 4) はそれぞれ $xL = 0$, $yL^* = 0$ という

形になってしまう。 しかし $(xL)\circ y = x\circ(yL^*)$ なる関係があり $x\neq 0,\ y\neq 0$ ゆえ一次独立でなくなってしまう。実際 例えば

$$yL^* = \begin{pmatrix} \rho_1 & z_3 & \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 & \rho_2 & z_1 \\ z_2 & \bar{z}_1 & \rho_3 \end{pmatrix}$$ とおくと $yL^*=0 \longleftrightarrow \rho_1=\rho_2=\rho_3=0,\ z_1=z_2=z_3=0$

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$ において $\underbrace{\xi_1\neq 0}_{\text{例えば}}$ ならば、$xL=0$ から $0=x\circ(yL^*)$

がでて $\xi_1\rho_1 + \dfrac{(\bar{z}_2x_2+\bar{x}_2z_2)+(x_3\bar{z}_3+z_3\bar{x}_3)}{2} = 0$ （これは $x\circ(yL^*)$ の (1-1) 成分） よって $xL=0$，$z_2=z_3=0$ から $\rho_1=0$ がでるから $xL=0$，$yL^*=0$ は独立にならない。他も同様。

従って $(y\times y)\circ y + (x\times x)\circ x = 0$ でなければならぬ。

しかし このとき 3) を $P=0$，4) を $Q=0$ と書くと

$P\circ y + Q\circ x = 0\ (x\neq 0,\ y\neq 0)$ という関係式が成り立ち

今と同様にして $P=0$，$Q=0$ は独立でない事が示される。

よって $\underset{56\text{次表現のみ}}{E_7\times GL(2)}$ は概均質でない。 //Prop 5.

補足） $\mathfrak{J}_0$ の generic な点が F_4 の作用で $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix}$ へうつる事について。(P.37) （これは佐藤幹夫先生による注意）

$F_4 = \mathfrak{D}_0\oplus\mathfrak{J}_1\oplus\mathfrak{J}_2\oplus\mathfrak{J}_3 \ni X = D_0\oplus(\alpha)_1'\oplus(\beta)_2'\oplus(\gamma)_3'$ に対し

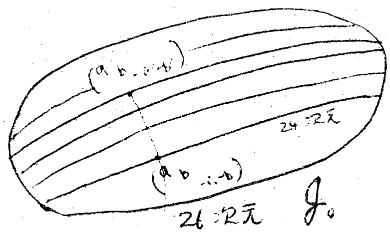
$$X\cdot\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\gamma(\xi_1-\xi_2)}{4} & \dfrac{\bar{\beta}(\xi_1-\xi_3)}{4} \\ \dfrac{\bar{\gamma}(\xi_1-\xi_2)}{4} & 0 & \dfrac{\alpha(\xi_2-\xi_3)}{4} \\ \dfrac{\beta(\xi_1-\xi_3)}{4} & \dfrac{\bar{\alpha}(\xi_2-\xi_3)}{4} & 0 \end{bmatrix}$$ ゆえ

$a, b, -a-b$ が 互に異なるならば

$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_0$ における F_4 の isotropy subalg. は $\mathfrak{D}_0$.

よって この点の F_4-orbit の次元 $= 52 - 28 = 24$ である。

次に F_4の作用によって $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a' & & \\ & b' & \\ & & -a'-b' \end{pmatrix}$ ならば $(a', b', -a'-b')$ は $(a, b, -a-b)$ の permutation である事を示す. そうすれば $\mathfrak{J}_0$ の generic な点が この標準形にうつる事が証明された事になる.



$x = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$ に対し

$P(x) = \xi_1\xi_2\xi_3 + x_1(x_2x_3) + \overline{x_1(x_2x_3)} - (\xi_1(x_1\overline{x_1}) + \xi_2(x_2\overline{x_2}) + \xi_3(x_3\overline{x_3}))$

は $\underset{27\text{次表現}}{E_6 \times GL(1)}$ の rel. inv. ゆえ F_4 でも不変.

$x = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix}$ に対し $P(x - cI) = (a-c)(b-c)(-a-b-c)$

$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ が F_4 で不変な事と $P(x - cI)$ が F_4 で不変な事から 我々の主張は明らかである. /

文献

[1] 佐藤幹夫述 新谷卓郎記 : 概均質ベクトル空間の理論 (数学の歩み 15−1)

[2] 分類に関する佐藤先生の(個人的な)ノート
(東大数学教室に原版がある)

[3] 木村達雄：概均質ベクトル空間の分類について (I)

[4] 〃 〃 (II)

[5] Chevalley and Schafer : The exceptional Lie alg. F_4 and E_6
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. V36 (1950) P.137~P141

[6] Jacobson : Exceptional Lie alg. (Dekker, lecture note)

[7] Chevalley : Algebraic theory of spinors (Columbia Univ.)

[8] J. Igusa : Classification of spinors up to dimension twelve American Journal of Math. vol.92 (1970) P997~1028

尚 概均質ベクトル空間のゼータ関数については

[9] T. Shintani : On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms. (J. of Math Soc. of Japan Vol 24 No.1 1972)

概均質ベクトル空間と超幾何関数の関係については

[10] 佐藤幹夫述 青本和彦記：概均質空間の特異軌跡と超幾何関数
(1971年6月 東大における講義) 原版が東大数学教室にある.

テータ関数との関連について最近の佐藤先生の研究がありますが文献はまだありません. //